Проблемы углубленного математического образования: программы, задачи, эстетика и стиль

О. А. Иванов (Санкт–Петербургский государственный университет)

Мое выступление будет иметь субъективный и эмоциональный характер и не претендует на сколь-нибудь глубокий анализ. Хотя мы все и собрались здесь по приятному поводу — юбилею одной из лучших школ не только нашего города, но и всей нашей страны, но говорить я собираюсь о том, что мне не нравится в преподавании математики в наших физмат школах, в том числе, и ведущих. А не нравится мне сейчас многое, хотя, казалось бы, объективная картина вполне радужная. Говоря об объективной картине, я имею в виду единственный числовой параметр, по которому в настоящее время можно судить о качестве математического образования, получаемого выпускниками наших школ. А именно, о результатах ЕГЭ по математике. В следующей таблице приведен средний балл по итогам ЕГЭ–2012.

ФТШ	79,89
30	77,32
239	75,64
366	72,24
419	64,09

Очень приличные баллы у первой четверки и существенно хуже у школы № 419, которая также называется математической. Но давайте проанализируем не голые баллы, а решенные задачи. В следующей таблице приведены дополнительно: количества первичных баллов и номера задач, которые можно было решить для того, чтобы их заработать.

ФТШ	80	23	C1, C2, C3, половина C5
30	77	21	C1, C2, C3
239	75	20	C1, C2, бо́льшая часть C3
366	72	19	C1, C2, малая часть C3
419	64	16	C1

Моя оценка задач группы **C** этого года состоит в том, что задача **C1** — это вообще не задача, задачи **C2**, **C3** и **C5** являются типовыми. При этом реальное рассуждение требовалось провести только при решении задачи **C5**. Возможно, что успехи выпускников указанных школ при решении задач группы **C** в действительности были чуть выше, поскольку для них характерно допустить ошибку при решении задач группы **B**, но сути дела это не меняет. Мой вывод таков: нельзя судить об уровне математического образования выпускников ведущих школ нашего города по приведенным результатам. Можно только константировать, что у выпускников других специализированных школ этот уровень явно недостаточен.

В обоснование моего критического настроения приведу следующие данные. По моей просьбе несколько раз учащимся «тридцатки» предлагался для решения набор из 10 задач другого типа. Образец такого набора перед вами.

1. Объясните, что произойдет с величиной положительной рациональной дроби, если ее числитель увеличить на 1, а знаменатель — на 2.

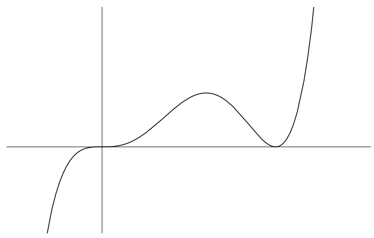
2. Какие значения может принимать выражение $a^2 + 2a - b$, если $a \in [-2; 3]$ и $b \in [-2; 1]$?

3. Сколько существует пар (x, y) действительных чисел, таких, что $2^x + 2^y = 2^{x+y}$?

4. Выясните, является ли простым число 100903027.

5. Известно, что числа x^{199} и x^{213} рациональны. Верно ли, что само число x рационально?

6. Задайте формулой какую-нибудь функцию, эскиз графика которой имеет изображенный на следующем рисунке вид.



7. Найдите наибольшее значение дроби $\dfrac{n^2}{2^n}$, где n — натуральное число.

8. Выясните, существует ли касательная к параболе $y = x^2 - x + 5$, параллельная прямой $y = 2011x$.

9. Пусть a, b и c — это длины сторон треугольника, а S — его площадь. Докажите, что $6S < ab + bc + ac$.

10. Рассматриваются системы вида

$$\begin{cases} x \,\square\, 1, \\ x \,\square\, 2, \\ x \,\square\, 3, \\ x \,\square\, 4, \end{cases}$$

в каждой из которых вместо знака $\square$ стоит один из знаков $\leq$ или $\geq$. Найдите число таких систем, множество решений которых не пусто.

Казалось бы, что это вовсе не задачи — настолько они просты. А результаты таковы: в среднем ученики решали только половину из предложенных задач. Когда я предложил эти задачи учащимся школы 419, то они вообще ничего не решили. На мой взгляд, картина грустная.

При подготовке своего выступления я случайно наткнулся на статью Е. А. Белякова (*Математика в школе*, 2012, вып. 3). Мысли, высказанные в ней, вполне созвучны моим. Например «*Обычно мы почти не обращаем внимания на рассуждения, а это* **и есть математика**.» Проблема в том, что рассуждения, которые необходимо проводить при решении типовых для учащихся задач, перестают выглядеть рассуждениями, превращаясь в схемы, при использовании которых мышление вообще не задействуется. Превращению рассуждений в схемы способствует и превалирующая в школе форма записи решений уравнений и неравенств. Совсем свежий пример. Ребятам было предложено решить уравнение

$$\sqrt{x^2-5x+2}+4x=1+\sqrt{x^2-x+1}\ .$$

В результате естественной замены $a=\sqrt{x^2-x+1}$ и $b=\sqrt{x^2-5x+2}$ они пришли к уравнению $a^2-b^2=a-b$, сделали верный вывод, что $a=b$ или $a+b=1$. Далее решение является вполне стандартным. Давайте я покажу вам копию решения одного из учащихся.

Не знаю, может быть, кого-то подобная запись порадует, но для меня она прежде всего *неэстетична*, правда, иногда я выражаюсь откровеннее. Как-то раз, прочитав подобное решение, я сказал своему ученику, что он «изнасиловал задачу в особо извращенной форме». Я не зря включил слова **эстетика и стиль** в название своего выступления. Математика красива, хорошую математическую статью или же хорошее решение задачи приятно читать, восхищаясь мыслями и логикой ее автора. Можно ли **прочитать** приведенное решение? Спросите любого профессионального математика, что он думает по этому поводу!

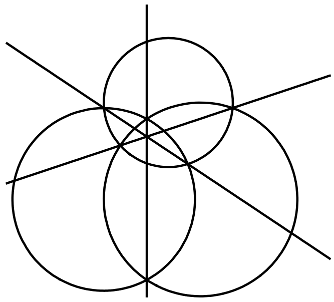
12 лет назад я выступал на конференции в Дубне с сообщением «Состояние и перспективы школьного углубленного математического образования», по материалам которого была опубликована статья в журнале "Математика в школе" (2001, вып. 2). С тех пор ситуация по объективным причинам только ухудшилась. Далее я собираюсь говорить, в основном, о тех проблемах, решение которых зависит от самого нашего математического сообщества. Хочу повторить сказанное в 2000-м году, что:

к сожалению, приходится с грустью констатировать, что несмотря на почти сорокалетнюю (*теперь — пятидесятилетнюю*) историю специализированных математических школ и классов, **система** углубленного математического образования так и не была создана.

Что я имею в виду, говоря о **системе** углубленного школьного математического образования. Например, нужны программа и учебники, методики и методические пособия. Не могу сказать, чтобы то, что было опубликовано за последнее время, меня очень радовало. Хочу подчеркнуть, что я говорю о школьном математическом образовании, не касаясь кружковой работы. Да, статьи из сборников «Математическое просвещение» очень интересны с математической точки зрения, но какой процент учащихся физматшкол, да и работающих с ними учителей, в состоянии их понять?

Давно знаю авторов написанного у нас в Петербурге учебника профильного уровня «Алгебра и начала математического анализа» и с большим уважением к ним отношусь. Однако он никак не соответствует моим представлениям о том, **чему и как надо учить** в математических школах. Например, мне совсем не нравится излишняя формализованное изложение. Мне кажется, что параграф «Высказывания и предикаты» не должен быть первым параграфом учебника для 10 класса. Но не буду ничего иметь против, если этот параграф будет присутствовать в конце учебника для 11 класса. С другой стороны, каждый ученик 10 класса должен понимать, что если кривая $\mathcal{A}$ задана уравнением $f(x, y) = 0$, а кривая — $\mathcal{B}$ уравнением $g(x, y) = 0$, то уравнение $f(x, y) = g(x, y)$ задает кривую, проходящую через точки пересечения кривых $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Кстати, на таком пути можно получить естественное и простое решение следующей задачи.

Задача 1. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три прямые, каждая из которых проходит через точки пересечения пары данных окружностей, проходят через одну точку.



Действительно, если положить $f_i(x, y) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2$, $i = 1, 2, 3$, где $O_i(x_i, y_i)$ есть центр i-ой окружности, а r_i — ее радиус, то, к примеру, уравнение $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ задает прямую, проходящую через точки пересечения двух первых окружностей. Система

$$\begin{cases} f_1(x, y) = f_2(x, y), \\ f_1(x, y) = f_3(x, y) \end{cases}$$

задает точку пересечения соответствующих прямых, которая очевидным образом лежит на прямой $f_2(x, y) = f_3(x, y)$.

Далее, рассуждение можно обобщить. К примеру, в условиях данной задачи, что за множество задается уравнением $f_2(x_0, y_0)f_1(x, y) = f_1(x_0, y_0)f_2(x, y)$?

Что мы видим: понятие множества, заданного уравнением; системы, их следствия. Решение, с одной стороны, неожиданно для учащихся, а, с другой стороны, естественно для профессиональных математиков. Чего не хватает в учебниках, так это рассуждений подобного типа. Кстати, в уже упомянутом учебнике параграф «Множества на плоскости, задаваемые уравнениями и неравенствами» — это **§81**, когда всего их 89.

Мне кажется, что углубленное изучение математики не должно отличаться от базового, в основном, только объемом изучаемого материала, как это чаще всего происходит. Основное отличие — в установлении большего числа разнообразных взаимосвязей между математическими понятиями и методами. Не думаю, что кто-то станет оспаривать это утверждение. Но реализуется ли оно на практике?

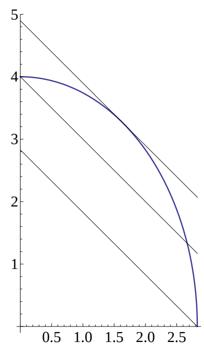
Приходится слышать мнение об архаичности значительной части материала, изучаемого в школе. К примеру, зачем решать столько уравнений и неравенств? Частично с этим я согласен. Когда смотришь в учебник для обычной школы, то вообще не видишь в нем ничего, кроме тривиальностей. С другой стороны, одним из самых естественных способов учить ребят рассуждать (и интерпретировать) — это предлагать им уравнения и неравенства с параметрами.

Задача 2. Определите (в зависимости от значения параметра a) число решений уравнения $\sqrt{x+4}+\sqrt{8-2x}=a$.

Да, 11-классник должен уметь строить график $y=\sqrt{x+4}+\sqrt{8-2x}$, продифференцировав данную функцию. Но давайте дадим эту задачу годом ранее. С моей точки зрения, следующее ее решение является самым естественным. Положим $u=\sqrt{x+4}$ и $v=\sqrt{8-2x}$. Число решений данного уравнения совпадает с числом решений системы

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0, \\ 2u^2+v^2=16, \\ u+v=a. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения речь идет о числе точек пересечения «четвертинки» эллипса и прямой $v=a-u$. Ответ почти следует из следующей картинки.



Единственное, что надо посчитать, так это расположение касательной. Разве это — не математика? А в каком учебнике вы найдете этот подход? Каждый год показываю его одиннадцатиклассникам наших математических школ. И всякий раз вижу на их лицах искреннее удивление и восторг. Сами они обычно пытаются решать эту задачу путем последовательных возведений в квадрат.

Теперь хочу привести цитату из предисловия к классическому американскому учебнику "Calculus", написанному для младшекурсников университетов:

«При написании этого учебника я придерживался следующего «тройного правила»: Материал следует представлять и геометрически, и численно, и алгебраически, что должно привести к пониманию сути предмета.» J. Stewart.

Двумя руками поддерживаю это правило. Как было бы хорошо, если бы его придерживались авторы учебников для нашей школы.

Вернемся к задаче. Давайте напишем следующую строчку:

$$a=\sqrt{x+4}+\sqrt{8-2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x+8}+\sqrt{8-2x}\leq\sqrt{\tfrac{1}{2}+1}\cdot\sqrt{16}=2\sqrt{6}.$$

Какое неравенство было здесь использовано? Конечно, неравенство Коши–Буняковского. Что мы получили? То, что при $a > 2\sqrt{6}$ уравнение решений не имеет. Когда это неравенство обращается в равенство? В случае пропорциональности наборов переменных (параллельности соответствующих векторов). В данном случае, если

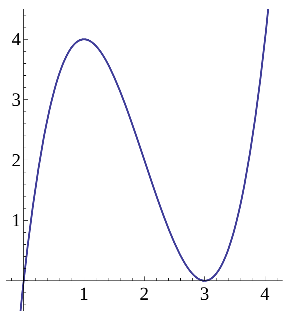
$$\frac{\sqrt{2x+8}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{8-2x}}{1}\ ,\ \text{откуда } x = -\frac{4}{3}.$$

На примере этой задачи я хотел показать необходимость **обсуждений** решений, в процессе которых и проявляются математические **взаимосвязи**.

Одной из центральных тем школьного курса «Алгебра и начала математического анализа» 11 класса является, на мой взгляд, использование дифференциального исчисления для исследования функций. Еще одна задача, заслуживающая обсуждения.

Задача 3. Известно,что $a + b + c = 6$ и $ab + bc + ac = 9$, где a, b и c — различные действительные числа. Докажите, что одно из них лежит в промежутке $(0; 1)$, второе — в промежутке $(1; 3)$, а третье — в $(3; 4)$.

Для профессионального математика ее решение абсолютно естественно, для школьника — совершенно неожиданно. Рассмотрим многочлен $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, корнями которого являются данные числа. В силу формул Виета $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - abc$. Таким образом, числа a, b и c — корни уравнения $x(x - 3)^2 = d$. Все, что осталось сделать — так это взглянуть на график $y = x(x - 3)^2$, абсциссы трех точек пересечений которого с (горизонтальной) прямой $y = d$ — числа a. b и c — очевидным образом находятся в интервалах $(0; 1)$, $(1; 3)$ и в $(3; 4)$.



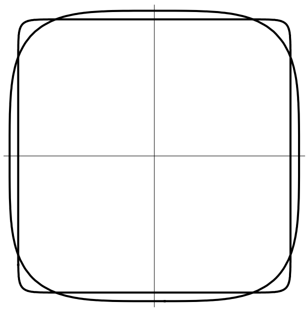
Мне кажется, что уровень математического образования во многом определяется тем, как естественно возникает у человека нужная для решения задачи **ассоциация**, в данном случае — ассоциация с теоремой Виета. Развитие *ассоциативного мышления* — трудная и важная задача, которую надо ставить перед собой, занимаясь преподаванием математики в математических школах.

Как бы я хотел, чтобы подавляющее большинство учащихся наших физматшкол могли «с ходу» дать правильный ответ на вопрос следующей задачи.

Задача 4. Определите наибольшее возможное количество решений у системы вида

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 10, \\ x^{20} + y^{20} = a. \end{cases}$$

Ответ очевиден, если только понимать, что множество, заданное уравнением $x^{20}+y^{20}=a$, — это уже «почти квадрат», тогда как множество, заданное уравнением $x^4+y^4=10$, «похоже на» окружность.



Еще одна цитата из работы Белякова: *Разрыв графика и функции — типичный для школьных учебников разрыв «аналитического» и «синтетического» аспекта математики.*

Первая реакция учащихся на вопрос задачи обычно состоит в том, что они считают, что данная система может иметь 20 решений. Потом они обычно переходят к уравнению $x^{20}+(10-x^4)^5=a$, иногда деляют замену $t=x^4$, после чего пытаются выписать коэффициенты многочлена пятой степени, стоящего в правой части уравнения $t^5+(10-t)^5=a$. Не так часто после того учащиеся понимают, что все, что надо сделать — это исследовать функцию $f(t)=t^5+(10-t)^5$, $t\in[0;10]$. Вычислив ее производную, получаем, что эта функция убывает на промежутке $[0;5]$ и возрастает на промежутке $[5;10]$, таким образом, уравнение $f(t)=a$ не может иметь более двух решений. Осталось заметить, что каждому решению этого уравнения соответствуют 4 решения данной в условии системы. Следовательно, наибольшее число ее решений равно восьми.

Увы, боюсь, что практически никто из учащихся не увидит связи между этой задачей и тем, что, к примеру, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$. А ведь она есть. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=\max\{|x|,|y|\},$$

то при «достаточно больших» значениях n уравнение $|x|^n+|y|^n=a^n$ «похоже» на уравнение $\max\{|x|,|y|\}=a$, задающее квадрат. А ведь об этом учащимся было бы интересно и поучительно прочитать. Но где?

Последний раз процитирую Белякова: «Как хотелось бы, чтобы учебники тоже можно было бы читать.» Добавлю от себя — «и это было бы интересно». Я уже говорил об изданиях, в которых есть очень интересная математика, в принципе, доступная школьникам, но уж очень малому их числу. Докладчик тоже грешен в этом смысле, последнюю из написанных мной книг трудно будет читать тем школьникам, которые, так сказать, не собираются в будущем связывать свою судьбу с математикой.

В связи с этим есть конкретное предложение. Сейчас на государственном уровне вдруг заговорили о важности преподавания математики. Будет полезно ввести грантовую поддержку разработок в области преподавания математеки на всех уровнях: в школе, вузах, а также за их пределами. Есть РФФИ, который по своему статусу не занимается этими проблемами. Нужен аналогичный фонд, которые бы ими занимался. При всех недостатках, которые легко себе представить, пользу он может принести. К примеру, давать гранты на подготовку и издание книг «о математике», предназначенных для достаточно широкого круга читателей.

Как сенатор Катон Старший, который каждое свое выступление заканчивал словами «Но Карфаген должен быть разрушен», не могу не высказаться о системе единых государственных экзаменов. Могу даже поверить, что инициаторы введения этой системы «хотели как лучше», Могу согласиться с М. Я. Пратусевичем, который говорил, что система ЕГЭ положит конец «разнузданности» вузовских предметных комиссий. Но что же мы в итоге получили?

Конечно, не могу не похвалить ту команду, которая сейчас занимается разработкой вариантов ЕГЭ по математике хотя бы за то, что теперь в них присутствует какая-никакая, но геометрия. Но сути дела это меняет. На эту тему мною были написаны две статьи (с которыми вы могли ознакомиться на сайте семинара). Кратко повторю сделанные в них выводы.

В первой из этих статей приведены описание и результаты одного статистического исследования. Поскольку зачисление в вуз производится именно по сумме баллов, полученных на единых государственных экзаменах, то предполагается, что, чем выше сумма баллов ЕГЭ, тем более способен выпускник школы к обучению в вузе. Для студентов двух лекционных потоков (экономического факультета СПбГУ) исследовалась связь между баллами, полученными ими на: 1) ЕГЭ по математике; 2) письменном экзамене по математическому анализу; 3) письменном экзамене по линейной алгебре (на обоих — по итогам 1-го семестра обучения). Кроме того, рассматривались результаты студентов предыдущего года зачисления. Результаты исследования показывают, что:

- если взять результаты студентов, условно говоря, бюджетной формы обучения, то имеется явная связь между их успехами по двум математическим дисциплинам, но нет никакой связи между баллами ЕГЭ и результатами, показанными на вузовских экзаменах;

- в случае, когда при зачислении учитывался также результат проведенного вузом дополнительного испытания, то прослеживается явная связь между баллами ЕГЭ и результатами вузовских экзаменов по «высшей математике».

Смею утверждать, что статистический метод был применен корректно (его подробное описание дано в статье).

Вторая из статей была посвящена анализу существующей методики проведения ЕГЭ по математике. Напомню два из тезисов, высказанных и обоснованных в этой статье.

1. Существующая методика оценки выполнеия заданий группы C может не дать преимущества учащимся, обладающими бо́льшими знаниями математики;

2. Существующая методика построения экзаменационных заданий не дает толковым выпускникам показать все, на что они способны.

Конечно, высказанные положения могут быть оспорены, но, в конце концов, давайте начнем обсуждать, хотя бы в своем — «математическом» кругу. А то создается впечатление, что «наверху» нас не слышат.

Почему я заговорил о ЕГЭ в своем выступлении. Потому, что характер итогового экзамена по математике за курс средней школы, конечно, оказывает влияние на процесс обучения математике, в том числе, и в математических школах. Если в, так сказать, «обычных» школах, подготовка к экзамену сводится к натаскиванию на задачи группы B, то в «математических» школах, волей–неволей, уделяется много внимания решению заданий группы C.

Когда я говорю об экзаменах, то всегда с ностальгией вспоминаю о 90-х годах у нас в Петербурге. В те годы была выстроена система разноуровневых выпускных экзаменов по математике. Да, все учителя и ученики знали, что в вариантах будут присутствовать и тригонометрия, и логарифмы. Но «натренироваться» на решение этих задач было нереально. Эти варианты, на мой взгляд, действительно оценивали уровень математического образования. Каждый год я приходил в «тридцатку» и видел, с каким интересом решали эти задачи такие выдающиеся, но уже, увы, ушедшие из жизни учителя, как Таисия Ивановна Курсиш, Арон Рувимович Майзелис и Владимир Леонидович Ильин. Осмелюсь утверждать, что эти задачи влияли в самом лучшем смысле не только на них, но и на большинство учителей, работавших в то время в физико-математических школах нашего города.

Литература

1. Е. А. Беляков. Жизнь у нас такая: считать надо уметь. *Математика в школе*, 2012, 3, С. 27–29.

2. О. А. Иванов. Углубленное математическое образование в школе сегодня. *Математика в школе*, 2001, 2, С. 40–44.

3. О. А. Иванов. ЕГЭ и результаты первого семестра обучения. *Математика в школе*, 2011, 5, С. 34–39.

4. О. А. Иванов. Итоги ЕГЭ–2011 по математике: кто виноват и что делать. *Математика в школе*, 2012, 1, С. 44–49.

5. О. А. Иванов. Задачи по алгебре и началам математического анализа. СПб: БХВ–Петербург, 2005.

6. О. А. Иванов. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2010.

7. А. Ю. Калинин, Д. А. Терешин. Геометрия. 10–11 классы. М.: МЦНМО, 2011

8. М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. Алгебра и начала математического анализа. 11. М.: Просвещение, 2010.