В кн.: «Российское экономическое образование глазами преподавателя»
СПб: Русский остров, 2011, с.36-44.

Математическое образование студентов экономических специальностей вузов: цели, проблемы, перспективы

О.А.Иванов (СПбГУ)

Как не покажется странным, но по мнению автора курс математики для студентов экономических специальностей играет более важную роль, чем для студентов технических специальностей. Если для последних математика важна более как аппарат, используемый во многих других технических дисциплинах, то для будущих экономистов курс математики является, пожалуй, одной из немногих изучаемых студентами дисциплин, которая приучает *точно выражать свои мысли*. Немного забегая вперед, замечу, что первая проблема при обучении студентов заключается в том, чтобы приучить их отличать осмысленное утверждение (пусть даже и ошибочное) от бессмысленного.

Что важно для успешного обучения математике в вузе? Автор выделяет четыре следующих момента: владение техникой алгебраических преобразований (в частности, устойчивый навык в сложении алгебраических дробей); понимание связи между уравнениями и множествами (в частности, умение «читать графики»); владение элементарной логикой (к примеру, понимание разницы между прямой и обратной теоремами, понимание того, что если из утверждения A следуют утверждения B и C, то нельзя утверждать, что они равносильны); развитое «чувство числа» (проявляющееся, например, в понимании того, что частное от деления 3002 на 251 примерно равно 12). К сожалению, большинство выпускников школ необходимыми знаниями и умениями не обладают, поэтому курс математики в вузе необходимо строить с учетом данного фактора. Попытки ввести специальный курс компенсирующего характера для тех студентов, знания которых не являются достаточными для того, чтобы изучать вузовский курс математики, большим успехом не увенчались. В связи с этим можно указать на интересную работу [11], в которой обосновываются два следующих утверждения:

- упражнение формирует, как правило, не одно, а целую группу умений (*многофункциональность упражнения*);
- умение формируется, как правило, под воздействием многих разнохарактерных упражнений (*многофакторность умения*).

Поэтому тренировать навыки в тождественных преобразованиях вполне возможно при вычислении пределов последовательностей и функций или построении графиков.

Что же мы видим в практике преподавания математики будущим экономистам? Часто рекомендуемыми учебными пособиями является учебник [8] и задачник [9]. По мнению автора, они представляют собой ухудшенные варианты пособий для студентов технических специальностей. Их методическая идея сводится к тому, чтобы учить только тому, что можно будет проверить, даже несмотря на то, что учить только этому вполне бессмысленно. К примеру, кому нужны все эти разнообразные подстановки для вычисления первообразных? А разве обучение дифференцированию сводится к изучению таблицы производных и правил дифференцирования? Та же самая методическая ошибка характерна для обучения разделу «Производная» в школьном курсе математики. Что делает обычный школьник, «взяв» производную? Конечно, приравнивает ее нулю, не понимая – зачем! Исчезает основная идея, демонстрирующая силу дифференциального исчисления, поскольку именно свойства возрастания и убывания функции во многом характеризуют ее поведение. А для того, чтобы найти промежутки монотонности некоторой функции, надо просто определить знаки ее производной, таким образом, решать надо *неравенства*.

Поставим риторический вопрос: многие ли студенты-экономисты в результате изучения различных математических курсов будут в состоянии изучить материал, изложенный, к примеру, в книге [7]? Каким образом должно быть построено преподавание математики, чтобы в его результате студенты, например, стали способны к (самостоятельному) изучению различных математических приложений в финансовых областях? В последние годы стали популярными термины: *модульное обучение*, *компетенственно-ориентированное обучение*, составляются *КОУПы*. Вся это псевдометодическая деятельность не вызывает ничего, кроме раздражения. Построение любой системы обучения должно начинаться с исследования структуры *предметной области*, в данном случае – исследования как внутренней логической структуры дисциплины «математика», так и тех ее особенностей, благодаря которым она имеет настолько широкую область применения. Стандартным следствием непонимания логической структуры математики является включение в курс линейной алгебры такого раздела, как «аналитическая геометрия». Все давно уже привыкли к названию дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Однако при таком искусственном соединении двух разделов математики пропадает важная составляющая аналитической геометрии – построение связи между множествами и их уравнениями. То, что график четной функции симметричен относительно оси ординат – это простой факт аналитической геометрии, так что можно сказать, что она ближе к анализу, чем к линейной алгебре. С точки зрения широты приложений математики важнейшей ее характеристикой является развитость математической символики и языка математики. Если мы говорим об обучении будущих экономистов, то давайте уже в первом семестре их обучения поставим перед ними следующий вопрос: предположим, что в каждом квартале года цены выросли, соответственно, на a, b, c и d процентов. На сколько процентов в среднем росли они за квартал? Ответ очень прост – искомое число является корнем уравнения

$$(1+x/100)^4 = (1+a/100)\cdot(1+b/100)\cdot(1+c/100)\cdot(1+d/100)\,.$$

При этом сразу очевидно обобщение задачи. Очевидно, что в этой задаче появляется не среднее арифметическое, а среднее геометрическое некоторого набора чисел. Интересно предложить студентам провести численные расчеты, из которых будет следовать, что ответ все-таки близок к среднему арифметическому. С математической точки зрения будет интересно исследовать – почему же так оно и есть. А ответ на этот вопрос следует из формулы Тейлора для функции $y=\sqrt[4]{1+x}$. Из приведенного примера видно, что при правильной постановке курс финансовых вычислений будет давать достаточный набор (хотя бы и элементарных) примеров применения математики в финансовой области.

В одном из самых популярных «за океаном» учебнике [14] (оцените его объем!) – учебнике по стандартному курсу «Calculus» – написано, что его автор стремился использовать при изложении материала, как он говорит, «Правило Трех», заключающееся в том, что материал должен быть представлен «геометрически, численно, а также и алгебраически», что в результате должно будет привести к пониманию сути предмета (см. также [13]). Будучи полностью согласным с этим правилом, автор хотел бы его дополнить: необходима разработанная система теоретических упражнений и вычислительных задач, целью которой является формирование элементов самостоятельного мышления. Применительно к обучению математике точнее всего об этом было сказано в книге [6], в которой к характеристикам математического мышления отнесены:

- способность к оперированию структурами отношений и связей;
- способность обобщать математический материал, видя общее во внешне различном;
- способности к последовательному логическому рассуждению, связанному с потребностью в обоснованиях;
- способности к оперированию знаковой и числовой символикой.

Первая предлагаемая автором методическая идея состоит в использовании задач (назовем их базисными) для того, чтобы очертить материал, который далее предстоит изучить студентам (их разбору может быть посвящена первая лекция). Рассмотрим следующий пример. Предположим, что у нас имеются два инвестиционных проекта, в каждом из которых первоначальные инвестиции составляют 2 млн. рублей. Пусть при реализации первого из них мы получим 0,5 млн. рублей по прошествии 1 года после инвестирования, еще 0,9 млн. рублей после второго года и 1,1. млн. рублей – после третьего. Пусть для второго проекта размеры поступлений составят, соответственно, 0,7, 0,6 и 1,2 млн. рублей. Какой из данных двух проектов является более выгодным?

Первое, что надо понять и сформулировать – это *в каком смысле* проект является более выгодным? С математической точки зрения вопрос сводится к введению некоторой величины, по значению которой мы и будем сравнивать два инвестиционных проекта. Другими словами, первое, что надо сделать – это *ввести математическую модель* данной экономической задачи, после чего исследование будет вестись стандартными математическими методами. Посредством этой модели мы придем к уравнению баланса платежей и понятию внутренней нормы доходности инвестиционного проекта. Стандартная замена приведет к задаче поиска корня многочлена степени 3, решить которую можно только приближенно (разумеется, вычисления следует производить на компьютере). Кстати, полученный ответ совсем не очевиден: оказывается, что более выгодным является второй проект, поскольку его доходность равна 10,9%, тогда как доходность первого проекта равна 10,6%.

Заметим, что в исследовании этой задачи появляются: понятие монотонной последовательности, уравнение касательной, используются: теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности, свойство касательной к графику выпуклой функции, геометрическая интерпретация задачи поиска корня функции. Таким образом, тот студент, который в состоянии понять задачу и ее решение – тот и освоил материал первого семестра курса математического анализа. Важно также, что разбор этой задачи дает студентам представление о роли математики в их будущей профессиональной деятельности. В работе [2] были сформулированы принципы построения подобных вводных лекций. К ним относятся:

- максимальный охват материала;
- наглядность и очевидность возникновения новых понятий;
- естественность и обоснованность возникновения понятий;
- доступность изложения;
- раскрытие структуры самой изучаемой дисциплины.

В этой же работе был приведен пример построения вводной лекции курса «Линейная алгебра». Если говорить о материале второго семестра курса математического анализа, то можно выделить две подобные базисные задачи [1]. В первой из них на основе модели

Марковица производится построение оптимального портфеля ценных бумаг. Исследование этой задачи связано с основной темой этого семестра – дифференциальным исчислением функций нескольких переменных и основывается на материале, пожалуй, самого сложного его раздела – нахождения условных экстремумов. С другой стороны, речь идет о поиске экстремумов квадратичных форм при линейных ограничениях, а эта задача имеет прозрачную геометрическую интерпретацию. Вторая предлагаемая автором задача – задача о вычислении суммы долга при непрерывном начислении процентов при условии непрерывного потока платежей – дает ясную экономическую интерпретацию обычно пугающей студентов формулы для решений линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка $y' = p(t)y - q(t)$ (здесь $p(t)$ – это сила роста процентов по долгу, а $q(t)$ – плотность производимого потока платежей).

Математика является как дедуктивной, так и индуктивной наукой. Обучение математике немыслимо без доказательств. Однако, стремление «все доказывать» не должно быть самоцелью. Например, бессмысленно (и даже вредно) с педагогической точки зрения пытаться дать точное определение степени с произвольным показателем. Не стоит также гнаться за «полной общностью». К примеру, вполне достаточно ограничиться введением понятия выпуклости для дифференцируемых функций (поскольку с точки зрения приложений функции бывают или дифференцируемые, или кусочно-линейные – а в последнем случае работает другое – геометрическое – определение выпуклости). Да, при изложении материала доказательства необходимы. Однако, в какой степени и каким образом нужно и можно проверять их *понимание*? Традиционный способ, когда студенты учат ответы на заранее сформулированные теоретические вопросы, неприменим при проведении экзаменов в письменной форме, поскольку при этом невозможно проверить, насколько студент понимает то, что он написал (или списал). Тем не менее, есть методика, предоставляющая возможность проверить понимание теоретического материала и в том случае, когда экзамен проводится письменно. Ограничусь одним примером формулировки экзаменационного задания.

Пусть известно, что последовательность $x_n \to 0$. *Для каких из следующих последовательностей* y_n *верно, что произведение* $x_n y_n$ *также является бесконечно малой последовательностью*: а) $y_n = (-1)^n$; б) $y_n = \frac{n^2}{n+1}$; в) $y_n = \frac{n+1}{n^2}$?

Для правильного ответа на поставленный вопрос надо знать, что произведение ограниченной последовательности и бесконечно малой последовательности также является бесконечно малой последовательностью. Кроме того, понимать, что условие ограниченности первой последовательности является достаточным, но не необходимым. И, наконец, увидеть, что формулы из пунктов а) и в) задают ограниченные последовательности, тогда как формула пункта б) задает последовательность, не являющуюся ограниченной. Таким образом, вместо изложения формального доказательства одного из свойств бесконечно малых последовательностей студенты должны проявить свое понимание этого понятия.

Автором (совместно с доцентом матмеха СПбГУ Б.М.Беккером) были подготовлены учебные пособия [1], содержащие лекционный материал, набор теоретических упражнений, а также материалы для проведения практических занятий. Заметим, что интересная идея лежит в основе книги [12], написанной по результатам исследований, проведенных ее автором в университетах Новой Зеландии. Оказалось, что лучшего понимания математики можно добиться, целенаправленно предлагая студентам утверждения, которые похожи на верные, но к которым требуется построить контрпримеры.

Нельзя не сказать о том, что до сих пор в России (да и в мире тоже) не разработаны успешные методики использования компьютерных технологий в обучении математике, хотя за последние годы этой теме посвящено достаточно много (педагогических) диссертаций. Дело в том, что их авторы уделяют слишком много внимания общей педагогике в ущерб предметной области – математике или же уделяют слишком много внимания изучению самих технологий. Интересна книга [10], но в ней на первом месте стоит программирование в пакете *Mathematica*. Хорошим примером применения математических методов и компьютерных технологий на вполне элементарном уровне могли бы стать курсы по дисциплине «Финансовые вычисления». Однако в существующих пособиях по этой дисциплине, к сожалению, игнорируется математическая сторона предмета, а также наличие современных вычислительных средств. Свое видение данного курса представлено автором в (совместной с Г.А.Лушниковой) работе [5]. Что касается использования компьютеров собственно в процессе обучения математике, то этой теме была посвящена статья автора [4]. Хотя в ней идет речь об обучении в школе, однако общие принципы применимы и к процессу обучения в вузе. Хочется только подчеркнуть, что учить «нажимать правильные кнопки для того, чтобы получать верный ответ» – с точки зрения автора чрезвычайно вредно. Компьютер может играть:

- *стимулирующую роль*, давая возможность за реальное время справиться с достаточно сложной задачей;
- *развивающую роль*, поскольку свобода исследования, которую дает компьютер, будет способствовать развитию мышления;

- *психологическую роль*, придавая уверенность в своих силах и позволяя убедиться, что задача не так страшна, как кажется на первый взгляд;
- *компенсирующую роль*, так как компьютер не только даст возможность пользоваться «электронными мозгами», но и использовать их для контроля проводимых вычислений.

В работе [4] (написанной по материалам серии статей, опубликованных автором в журнале «Компьютерные инструменты в школе») были даны примеры подобных задач, которые можно использовать при обучении математике в школе. Школьное математическое образование является более широким по изучаемым идеям, чем вузовское, поэтому далеко не все «школьные» задачи подходят для обучения студентов. Приведу один подходящий пример. Одним из основных навыков, который должны получить студенты в первом семестре, является построение графиков функций. Многолетний опыт преподавания показывает, что многие студенты не в состоянии отобразить графически поведение функции после проведенного ее исследования средствами дифференциального исчисления. Поэтому на первых порах задание можно ставить следующим образом: глядя на экран компьютера, на котором посредством пакета компьютерной алгебры изображен график (заданной формулой) функции, объясните его поведение, проведя исследование «на бумаге».

Резюмируя сказанное выше, можно сказать, что в идеале в учебный план 1 курса для студентов экономических направлений вузов должны входить курсы:

- «Математический анализ»
- «Аналитическая геометрия»
- «Линейная алгебра»
- «Финансовые вычисления»
- «Математика, экономика и компьютер»

Как пример приближения к такому идеалу можно указать учебный план направления «Бизнес-информатика» на экономическом факультете СПбГУ. При этом методика чтения лекций и проведения практических занятий должна

- способствовать развитию форм математического мышления студентов, таких, как: аналитически-формульное, логико-дедуктивное, образно-геометрическое, индуктивно-эмпирическое.

При этом необходимо подчеркнуть, что система упражнений не должна сводиться к натаскиванию в использовании известных формул и методов. Всякое обучение происходит в процессе *деятельности*, поэтому, если мы хотим, чтобы у студентов развивались указанные выше формы мышления, то они должны использовать и другие виды деятельности. Существует классификация видов деятельности, и, к примеру, в процессе решения приведенного выше экзаменационного задания, используется такой ее вид, как *доказательство и опровержение*. При решении задачи об определении наилучшего инвестиционного проекта используются несколько видов деятельности, одним из которых является *кодирование* (это более общая формулировка, чем – *построение модели*) *и интерпретация* (полученных математических результатов).

В заключение приходится с тревогой констатировать, что ситуация в российском образовании, как в школьном, так и в высшем, становится (если уже не стала) воистину катастрофической. По мнению автора, введение системы ЕГЭ только ускорило его деградацию (см. [3]). Как показывает анализ вариантов единого государственного экзамена по математике и существующей системы оценки выпускных работ, ни о какой объективности не может быть и речи. А существующая система набора в высшие учебные заведения только создает неразбериху и по сути закрывает доступ в вузы действительно мотивированным выпускникам школ. При этом создается впечатление, что все проводимые государством реформы имеют своей целью не исправление этой ситуации, а пресловутую «модернизацию». Все действия так называемых «эффективных управленцев» направлены на экономию средств тех денежных потоков, которые контролировать невозможно (фонд заплаты, расходы на содержание учебных заведений и т.п.), с одновременным увеличением расходов централизованного характера. Представьте себе, какие огромные средства расходуются на проведение Единых государственных экзаменов! Видимо, в глазах подобных «менеджеров» идеальной была бы школа или вуз, в которых у одного преподавателя было бы 20000 учеников (см. [15]).

Литература

1. Б.М.Беккер, О.А.Иванов. Курс математического анализа. Семестр 1: Учебно-методическое пособие. 2-е изд., испр. и доп. – СПб: ЭФ СПбГУ, 2010. – 226 с.; Семестр 2. – СПб: ЭФ СПбГУ, 2010. – 236 с.

2. М.А.Булычева, О.А.Иванов. О методологии и методике построения курса высшей математики для студентов экономических специальностей вузов. «Образовательные технологии. Вып. 2», Воронеж: Научная книга, 2005. – С.47-50.

3. О.А.Иванов. ЕГЭ и результаты первого семестра обучения // Математика в школе, 2011, вып.5. – С. 28-33.

4. О.А.Иванов. Системы компьютерной алгебры на уроках математики в школе (в печати в журнале «Математика в школе»).

5. О.А.Иванов, Г.А.Лушникова. Экономика и математики, моделирование и программирование, или: интегративный курс финансовых вычислений. «Образовательные технологии. Вып. 2», Воронеж: Научная книга, 2005. – С.50-55.

6. В.А.Крутецкий. Психология математических способностей школьников / М.: Просвещение, 1968. – 432 с.

7. Ю-Д.Люу. Методы и алгоритмы финансовой математики / Ю-Д. Люу; Пер. с англ. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 751 с.

8. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И.Ермакова. М: Инфра-М, 2001. – 656 с.

9. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И.Ермакова. М: Инфра-М, 2002. – 575 с.

10. Г.М.Фридман, С.Н.Леора. Математика & Mathematica: Избранные задачи для избранных студентов. – СПб: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2010. – 299 с.

11. А.В.Ястребов. Многофункциональность упражнения и многофакторность умения // http://test.yspu.yar/vestnik/uchenue_praktikam/11_8/

12. S.Klymchuk. Counterexamples in Calculus. Mathematical Association of America, 2010. – 112 pp.

13. S.Krantz. How to teach mathematics. A personal perspective. 2nd Edition, Providence, RI, American Mathematical Society, 1999. – 307 pp.

14. J.Stewart. Calculus. 5th Edition, Brooks/Cole, Thomson Learning, Inc., 2003. – 1367 pp.

15. Л.Биггл-младший. «Какая прелестная школа!» В кн: Библиотека современной фантастики. Т.10. – М.: Молодая гвардия. – 1967. – С.295-333.