«Математика в школе», 2011, вып.5, с.28-33

ЕГЭ и результаты первого семестра обучения

О.А.Иванов СПбГУ (С-Петербург)

В работе исследуется связь между баллами, полученными на ЕГЭ по математике, и результатами сдачи экзаменов по математическим дисциплинам в вузе (на примере экономического факультета СПбГУ). Проведенный статистический анализ показал, что для студентов, набравших на ЕГЭ 61 балл и более, связи между ними нет. Приведены также примеры задач, для решения которых требуются те же качества, что и для успешного обучения математике в вузе.

Ключевые слова: итоги ЕГЭ, математика в вузе, ранговые критерии, статистический анализ, интеллектуальное развитие

1. Введение

Автор этой статьи – профессиональный вузовский преподаватель, связанный также и с преподаванием математики в школе. В 1990-х годах был членом Санкт-Петербургской комиссии по проведению выпускного экзамена по математике (см. [6]), составителем вариантов так называемого профильно-элитарного экзамена и олимпиад выпускников, проводившихся математико-механическим факультетом СПбГУ (см. [4]). Кроме того, автор более 10 лет руководил программой подготовки учителей математики на математико-механическом факультете СПбГУ и преподавал в Академической Гимназии СПбГУ. В настоящее время преподает математический анализ студентам экономического факультета СПбГУ и в тоже время является экспертом-консультантом единого государственного экзамена по математике. Таким образом, автор имеет возможность посмотреть на обучение математике в школе с двух сторон. С одной стороны как, условно говоря, «потребитель», поскольку результативность обучения математике в вузе существенным образом зависит от подготовки, полученной студентом в школе. С другой стороны, автор хорошо представляет себе уровень требований, устанавливаемый заданиями единого государственного экзамена по математике. Поэтому он давно с сомнением относился к целесообразности отбора в вузы по баллам, полученным на ЕГЭ.

В строках следующей таблицы приведены баллы, полученные на ЕГЭ по математике студентами того из потоков направления «экономика» (зачисленных в 2010 году), на котором преподавал автор этой статьи. В дальнейшем будем ссылаться на него как на «поток А».

«4» или «5»	63	69	69	75	75	77	79	85	87	90	92
«3»	77	79	79	79	81	83	85	85	87	90	92
«2»	75	75	77	79	81	81	83	85	85	87	90

Табл. 1

В первой строке стоят баллы студентов, сдавших на своей первой сессии экзамен по математическому анализу на 4 или 5 (таковых было 11 человек из 81). Во второй строке стоят одиннадцать наиболее высоких баллов ЕГЭ тех студентов, которые на этом экзамене получили оценку «три», а в третьей – тех, кто сдал экзамен на «два». Что же мы видим, что «двоечники» имеют более высокие баллы, чем те, кто сдал экзамен на хорошо и отлично?!

Похожую картину мы увидим, посмотрев на аналогичную таблицу, в которой приведены баллы ЕГЭ студентов другого потока, в котором вел занятия и принимал экзамен по математическому анализу другой преподаватель. В этом потоке (потоке Б) было 13 студентов, сдавших экзамен на 4 или 5.

«4» или «5»	55	60	63	63	63	63	69	71	71	71	75	77	79
«3»	63	71	71	71	73	75	77	81	81	85	85	87	92
«2»	60	60	60	60	63	63	66	66	69	73	73	75	75

Табл.2

Подчеркнем еще раз, что баллы, полученные на ЕГЭ, важны для нас тем, что именно в соответствии с ними производится зачисление в высшие учебные заведения России. Предполагается, что чем выше набранные баллы, тем бóльшими знаниями по соответствующему предмету обладает выпускник. Однако данные, содержащиеся в приведенных таблицах, говорят об обратном. Автору могут возразить, сказав, что в этих таблицах содержится информация о менее чем половине студентов потоков А и Б. Но оставим эмоции в стороне и проведем исследование при помощи статистических методов.

2. Результаты статистического анализа

Поставим следующую задачу. Каким образом можно установить наличие или же отсутствие взаимосвязи между результатами, показанными студентами на экзаменах по различным дисциплинам. Можно ли сказать, что студент, который лучше другого сдал экзамен по дисциплине X, лучше сдаст и дисциплину Y? Сложность этой задачи состоит хотя бы в том, что, поскольку на разных экзаменах применяются разные систему оценивания, то мало смысла сравнивать полученные студентами баллы. Для решения этой задачи следует применять так называемые *ранговые критерии*.

Формальные определения и использованные формулы помещены автором в Приложение. Смысл ранговых критериев состоит в следующем. Предположим, что после ранжирования по баллам на первом экзамене студент занимает k-ую позицию в списке. Тогда говорят, что его ранг на этом экзамене равен k. Аналогичным образом, будем говорить, что ранг этого студента на втором экзамене равен l, если он занимает l-ое место в упорядоченном списке всех результатов второго экзамена. Число ρ, называемое *ранговым коэффициентом корреляции*, по своему смыслу напоминает косинус угла между векторами, при помощи которого можно охарактеризовать близость направлений этих векторов. Если векторы сонаправлены, то он равен 1, если же противоположно направлены – равен -1. Так и в нашем случае, если у каждого студента его ранг по результатам первого экзамена совпадает с его рангом на втором экзамене, то $\rho = 1$. Скалярное произведение равно нулю, если векторы перпендикулярны, т.е., образно говоря, если между их направлениями нет никакой связи. Аналогичным образом, близость к нулю рангового коэффициента корреляции говорит об отсутствии связи между результатами проведенных экзаменов.

Ранговый коэффициент корреляции между результатами, показанными студентами потока Б на ЕГЭ и на экзамене по математическому анализу, равен 0,47. Таким образом, есть ли связь между этими результатами, или же ее нет – неясно. Однако очевидно, что студенты, чей балл ЕГЭ лежит в диапазоне от 40 до 60, заведомо должны быть слабее тех, кто имеет более 70 баллов. Более того, у студентов, зачисленных на бюджетную форму обучения, балл ЕГЭ не может быть ниже 63. Поэтому вычислим ранговый коэффициент корреляции только для студентов, чей балл на ЕГЭ не ниже 63. По студентам потока Б мы получим, что $\rho_{2,63} = -0{,}01$. Таким образом, нет никакой связи между баллами ЕГЭ и успехами студентов в изучении математического анализа!

Ранговые коэффициенты корреляции по паре «балл ЕГЭ-балл на матанализе» для студентов потока А имеют значения:

$$\rho_1 = 0{,}54, \quad \rho_{1,63} = 0{,}27, \quad \rho_{1,75} = -0{,}001.$$

Как видно, в этом случае имеется бóльшая взаимосвязь между ЕГЭ и математическим анализом, хотя, опять-таки, ее нет для студентов, набравших на ЕГЭ 75 баллов и более. То, что в этом случае мы имеем бóльшие значения коэффициента корреляции, вполне объяснимо. Дело в том, что разбиение на потоки производилось не случайным образом. В поток А были зачислены, в основном, студенты, показавшие более высокий результат на проведенном (после их зачисления на факультет) входном тестировании по математике.

Еще более яркую картину мы увидим, сравнивая баллы ЕГЭ с результатами экзаменов по линейной алгебре. Для студентов потока А соответствующий коэффициент корреляции равен 0,5. Если же взять студентов с баллом 71 и выше, то $\rho = 0{,}1$. Для студентов, имеющих не менее 75 баллов ЕГЭ $\rho = -0{,}007$, так что мы вновь не видим никакой взаимосвязи между баллами ЕГЭ и успехами в изучении линейной алгебры. Кстати, если мы сравним результаты студентов на экзаменах по двум математическим дисциплинам, то получим, что $\rho = 0{,}56$.

В результате проведенных вычислений естественно возникает гипотеза о независимости результатов ЕГЭ и успехов студентов на экзаменах по математическим дисциплинам. В математической статистике имеются методы проверки подобных гипотез. В нашем случае следует вести число $r = \sqrt{n-1} \cdot \rho$ (здесь n – это общее число студентов). Если $|r| > 1{,}65$, то эту гипотезу следует отвергнуть, в противном случае полученные данные не противоречат выдвинутой гипотезе.

Следует подчеркнуть, что данный критерий применим в случае, когда в анализируемой группе имеется по меньшей мере 30 студентов. Таким образом, при помощи этого критерия достаточно иметь результаты по двум студенческим группам, конечно, при том условии, что экзамен по предмету проводился одним и тем же преподавателем по одинаковым билетам. В частности, нельзя производить расчеты, соединив вместе студентов из различных лекционных потоков.

В следующей таблице приведены значения коэффициента r для студентов потока А, рассчитанных по парам испытаний: ЕГЭ и математический анализ, ЕГЭ и линейная алгебра, математический анализ и линейная алгебра. Подсчеты производились отдельно по двум группам студентов: тех, кто получил по меньшей мере 70 баллов на едином государственном экзамене по математике, и тех, кто получил на нем не менее 75 баллов.

Балл ЕГЭ	ЕГЭ и МА	ЕГЭ и ЛА	МА и ЛА
≥ 70	1,69	0,67	3,78
≥ 75	–0,008	–0,04	3,03

Табл. 3

Как видно из этой таблицы, имеется зависимость между результатами по двум математическим дисциплинам, тогда как можно принять гипотезу о независимости результатов ЕГЭ и успешности обучения линейной алгебре. Связи между баллами ЕГЭ и успехами по математическому анализу нет для студентов, имеющих высокий балл ЕГЭ.

Не будем поддаваться эмоциям, а попробуем поискать выход. Автор применил разработанную методику для анализа связи между результатами ЕГЭ по математике и успешностью обучения математическому анализу в 1 семестре у студентов, поступивших на экономический факультет годом раньше – в 2009 году. Оказалось, что в этом случае $r = 5{,}96$. В следующей таблице приведены значения этого коэффициента по выборкам студентов с определенными баллами ЕГЭ.

Балл ЕГЭ	≥ 60	≥ 70	≥ 75
Значение r	5,05	3,59	3

Табл. 4

Как видно, картина совсем иная, чем для студентов, поступивших в 2010 году.

Различие между результатами студентов 2009 и 2010 годов поступления вполне объяснимо. В 2009 году проводился дополнительный вступительный экзамен по математике, на котором и отсеялись те абитуриенты, знания которых не соответствовали полученным ими высоким баллам на ЕГЭ по математике. Например, отсеялись те, кто целенаправленно готовился к решению задач заранее известных им типов – и только к ним.

Вывод, который проистекает из результатов проведенного исследования, состоит в том, что существующая система проведения единого государственного экзамена (по математике), не позволяет ранжировать выпускников школ в соответствии с их способностями к продолжению обучения в высших учебных заведениях. Подчеркнем, что выборку, состоящую из студентов экономического факультета, можно считать случайной в отличие от выборок, состоящих, к примеру, из студентов мехмата МГУ или матмеха СПбГУ (или же любого технического вуза).

3. Методический комментарий

Процессы обучения математике в школе и в вузе существенно отличаются друг от друга. Огромно различие в темпе изучения нового материала, в структуре учебных занятий. Однако есть различия, которые имеют более глубокий характер.

В школе учащиеся имеют дело с выражениями и формулами, позволяющими преобразовывать эти выражения, в вузе – с определениями новых понятий, объектами, удовлетворяющими этим определениям, свойствами этих объектов, а также взаимосвязям между ними. Важно и то, что за исключением курса геометрии, в школьном курсе математики практически отсутствуют *теоремы*.

К сожалению, используемые в школе частные методики обучения приводят к тому, что те рассуждения, которые следует провести при решении некоторой задачи, жестко формализованы в виде *метода решения* задач определенного типа, в результате чего учащиеся запоминают *схему* решения, а не *логику* рассуждения. В противоположность этому, при изучения курса математики в вузе умение понимать и проводить логические рассуждения играет существенную, можно сказать, определяющую роль.

Именно указанными причинами объясняется существенно более слабая корреляция между баллами ЕГЭ и результатами по линейной алгебре, чем между баллами ЕГЭ и результатами по математическому анализу. В курсе линейной алгебры вводится больше новых определений – а где в школе в курсе математики учат понимать определение нового понятия или проводить проверку условий теоремы перед тем, как ею воспользоваться?

Еще 20 лет назад Г.В.Дорофеев писал [3], что «… задача сообщения человеку на уровне среднего и даже высшего образования объема информации, достаточной для его будущей деятельности, оказывается нереальной. На первый план выходит задача интеллектуального развития, включающего, в частности, способность человека к усвоению новых знаний, к самостоятельному поиску и усвоению новой информации». Эта идея была развита автором в (совместной) статье [1], в которой приводились примеры задач, «направленных на развитие навыков в использовании таких общих форм математической деятельности, как: использование известных алгоритмов, формул и процедур; кодирование, преобразование, интерпретация; классификация и систематизация; правдоподобные рассуждения; выдвижение и проверка гипотез, доказательство и опровержение; разработка алгоритмов».

Какие из перечисленных форм, кроме разве использования простейших алгоритмов, требуются для решения заданий ЕГЭ по математике (задачу С6 трогать не будем)? Умение, к примеру, решать уравнение вида $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}=\frac{1}{16}$ ничего не говорит о понимании учащимся свойств показательной *функции*. Вообще, задания группы В говорят только об одном: тот, кто даже их не решил, не сможет одолеть «высшую математику». Поэтому автор с ужасом ознакомился с приведенными в статье [2] результатами проверки знаний студентов-первокурсников одного ростовского вуза.

По мнению автора, основным недостатком существующей формы ЕГЭ по математике (да и по другим предметам) является то, что она ведет *к деформированию целей обучения математике в школе*. Поэтому он целиком поддерживает пункт резолюции Всероссийского съезда учителей, в котором предлагается «отделить в ЕГЭ итоговую аттестацию от вступительных испытаний».

В этой связи стоит напомнить читателю, что с начала 90-х годов в течение 10 лет в Санкт-Петербурге существовала система разноуровневых выпускных экзаменов по математике, задания в которых были построены по так называемому *сюжетному принципу* ([6,7], см. также [4]). За эти годы был накоплен большой опыт и разработаны методики, позволяющие составлять задания, покрывающие большинство разделов школьной программы. Подчеркну, что разноуровневость этой системы вполне соответствует другому предложению Съезда учителей, а именно применению «дифференцированного подхода при проведении ЕГЭ по математике». Полезно заметить, что результаты этих экзаменов засчитывали в качестве вступительных и большинство технических вузов С-Петербурга, и естественные факультеты университета.

4. Вместо заключения

А, быть может, стоит включать в экзаменационные варианты задачи совсем другого типа, решения которых будут более показательны с точки зрения оценки *понимания* математики? Задачи, при решении которых необходимо будет проводить *логические рассуждения*. Задачи, решения которых еще надо будет *суметь записать*. Задачи, *обсуждение решений* которых будет иметь серьезный обучающий эффект. Приведу несколько примеров.

Задача 1. Сформулируйте причины, по которым из того, что $2^x = 1$ при $x = 0$ следует, что решением неравенства $2^x \geq 1$ является промежуток $[0;+\infty)$, однако из того, что $\sin x = 0$ при $x = 0$ не следует, что решением неравенства $\sin x \geq 0$ является промежуток $[0;+\infty)$.

Задача 2. Объясните, что произойдет с величиной дроби $\frac{k}{n}$ (k и n – натуральные числа), если ее числитель увеличить на 1, а знаменатель – на 2.

Задача 3. Дан многочлен $p(x)$ степени 8. Из какого числа попарно непересекающихся промежутков может состоять множество решений неравенства $p(x) \leq 1$? Ответ обоснуйте.

Задача 4. Верно ли, что $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{26} > 80$? Ответ обоснуйте.

Проверочные работы, состоявшие из задач этого типа, проводились в 2010-11 учебном году в нескольких школах С-Петербурга. Автор собирается проанализировать результаты этих работ в следующей статье.

Приложение

Формализуем поставленную статистическую задачу. Имеется список

$$\{(x_1, y_1),(x_2, y_2),\ldots,(x_n, y_n)\},$$

где x_i – это результат i-го студента (набранная им сумма баллов) на экзамене по дисциплине *X*, а y_i – результат того же самого студента на экзамене по дисциплине *Y*. Расположив числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в порядке возрастания, мы получим упорядоченный набор $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$. Поскольку мы просто переставляли данные числа, то $x_1 = t_{k_1}, x_2 = t_{k_2}, \ldots, x_n = t_{k_n}$. Натуральное число k_i

называется *рангом* элемента x_i в данном списке. К примеру, для списка $\{2,4,3\}$ списком рангов его элементов является $\{1,3,2\}$, т.е. $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ и $k_3 = 2$. Для заданного списка пар (x_i, y_i) рассмотрим список рангов $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ первых элементов (значений x_i) и список рангов $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ его вторых элементов (значений y_i). Число

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} (k_i - l_i)^2}{n^3 - n}$$

называется *ранговым коэффициентом корреляции Спирмена* [5]. Как известно, $-1 \le \rho \le 1$. Коэффициент ρ равен 1, если $x_k \le x_l \Leftrightarrow y_k \le y_l$ при всех $k, l = 1,2,\ldots,n$. В предположении о независимости результатов экзаменов X и Y коэффициент $r = \sqrt{n-1} \cdot \rho$ имеет нормальное распределение. Из свойств нормально распределенных случайных величин следует, что в таком случае при уровне доверия 90% наблюдаемые значения коэффициента r должны удовлетворять неравенству $|r| \le 1{,}65$. Отсюда и следует, что мы должны отвергнуть гипотезу о независимости результатов рассматриваемых экзаменов, если в результате вычислений оказалось, что $|r| > 1{,}65$.

Заметим, что некоторые сложности в использовании критерия Спирмена возникают тогда, когда хотя бы в одном из списков (x_i или y_i) имеются достаточно большие группы совпадающих чисел. Однако, поскольку в настоящее время в результате проведения экзамена студенты получают баллы от 0 до 25, то таких совпадений не будет настолько много, чтобы они оказали существенное влияние на значения коэффициентов ρ и r.

В заключение автор хочет выразить свою признательность доценту кафедры теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета СПбГУ С.М.Ананьевскому за полезные советы.

Литература

1. Ведерникова Т.Н., Иванов О.А. Интеллектуальное развитие школьников на уроках математики // Математика в школе. – 2002. – №3. – С. 41-45.

2. Дёминский В.А. ЕГЭ-2010 и уровень математической подготовки студентов-первокурсников // Математика в школе. – 2011. – №1. – С. 14-17.
3. Дорофеев Г.В. О принципах отбора содержания математического образования // Математика в школе. – 1990. – №6. – С. 2-5.
4. Иванов О.А. Практикум по элементарной математике. Алгеброаналитические методы / О.А.Иванов. – М.: МЦНМО, 2001. – 320 с.
5. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика / Г.И.Ивченко, Ю.И.Медведев. – М.: Высшая школа, 1984. – 248 с.
6. Карп А.П. О работе Санкт-Петербургской городской экзаменационной комиссии по математике // Математика в школе. – 1994. – №1. – С. 39-41.
7. Карп А.П., Некрасов В.Б. Задания по алгебре и началам анализа для организации итогового повторения и проведения аттестации в 11 классе / А.П.Карп, В.Б.Некрасов. – М.: Просвещение, 2003. – 108 с.