

Олимпиада Лицея ФТШ по математике. 1-й тур. 20-е января 2011 года.

<p style="text-align: center;">1 Текстовые задачи</p>	<p>Все нормальные граждане некоторой страны живут в одном из двух городов — городе X или городе Y. Все ненормальные граждане находятся в психбольницах. Соответственно, в стране три избирательных участка. На рисунке представлены результаты голосования (в процентах) по каждому из участков на выборах в государственную думу.</p> <div style="text-align: center;"> <p>ИТОГИ ГОЛОСОВАНИЯ</p> <p>■ город X ■ город Y ■ психбольницы</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Участок</th> <th>город X (%)</th> <th>город Y (%)</th> <th>психбольницы (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>37.5</td> <td>42.5</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>31.25</td> <td>40</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>22.5</td> <td>15</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>прочие партии</td> <td>8.75</td> <td>2.5</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table> </div> <p>Оказалось, что в целом по стране результаты голосования следующие: партия А — 70,8%, партия В — 16,4%, партия С — 9,6%, прочие партии — 3,2%. Какая часть населения страны голосовала в психбольницах?</p>	Участок	город X (%)	город Y (%)	психбольницы (%)	A	37.5	42.5	100	B	31.25	40	0	C	22.5	15	0	прочие партии	8.75	2.5	0	<p style="text-align: center;">8—11</p>
Участок	город X (%)	город Y (%)	психбольницы (%)																			
A	37.5	42.5	100																			
B	31.25	40	0																			
C	22.5	15	0																			
прочие партии	8.75	2.5	0																			
<p style="text-align: center;">2 Стереометрия</p>	<p>Можно ли замостить всё пространство равными тетраэдрами?</p>	<p style="text-align: center;">10—11</p>																				
<p style="text-align: center;">3 Многочлены</p>	<p>Доказать, что в стандартном виде многочлена $(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100})$ нет слагаемых с нечетной степенью переменной.</p>	<p style="text-align: center;">8—11</p>																				
<p style="text-align: center;">4 Множества</p>	<p>В стране рыцарей (которые всегда говорят правду) и лжецов (которые всегда врут) прошли выборы в Государственную думу. Жители страны голосовали за кандидатов всего двух партий – партии рыцарей и партии лжецов. По результатам exit poll'a (на выходе с избирательных участков у каждого жителя спрашивали, за кого он проголосовал) получалось, что каждая партия набирает 50% голосов. Однако после подсчета голосов оказалось, что партия лжецов победила, набрав 70% голосов избирателей. Известно, что никто не отказался ответить на вопрос exit poll'a. Докажите, что количества рыцарей и лжецов в этой стране отличаются не более чем в 4 раза.</p>	<p style="text-align: center;">8—11</p>																				
<p style="text-align: center;">5 Логика</p>	<p>В Академическом университете каждый год проводится открытый футбольный турнир. В этом году Василий Павлович за победу давал 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение 0 очков. В прошлом году Василий Павлович присуждал за победу всего лишь 2 очка, ничья и поражение оценивались так же. Могло ли так случиться, что команда, занявшая в этом году первое место, при использовании в этом году прошлогодней системы подсчёта очков оказалась бы последней?</p>	<p style="text-align: center;">8—11</p>																				
<p style="text-align: center;">6 Функция</p>	<p>Сколько корней имеет уравнение $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$, если известно, что a, b и c различны?</p>	<p style="text-align: center;">9—11</p>																				
<p style="text-align: center;">7 Система</p>	<p>Решить систему уравнений:</p> $\begin{cases} \frac{x^2+1}{2} = 2y \\ \frac{y^2+1}{2} = 2z \\ \frac{z^2+1}{2} = 2x \end{cases}$	<p style="text-align: center;">8—11</p>																				
<p style="text-align: center;">8 Теория чисел</p>	<p>Числа x^{177} и x^{221} являются рациональными. Докажите, что само число x рационально.</p>	<p style="text-align: center;">9—11</p>																				
<p style="text-align: center;">9 Планиметрия</p>	<p>В треугольнике две медианы перпендикулярны и равны 3 и 4. Найдите площадь треугольника.</p>	<p style="text-align: center;">8—11</p>																				