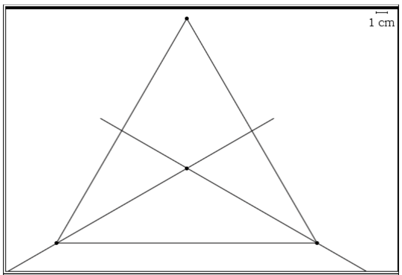
Тема урока: Центр правильного треугольника

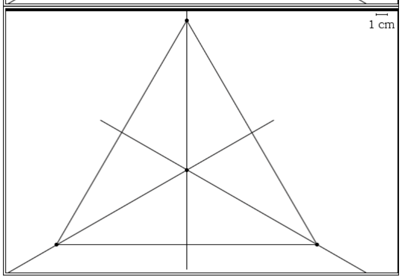
Цели урока

Ученики знакомятся:

1. с центром правильного треугольника;
2. со свойствами центра правильного треугольника;
3. с решением задач на построение, в которых используются свойства центра правильного треугольника;
4. с центром правильного треугольника как элементом симметрии;
5. с новыми командами программы.

Материалы урока и задания





В правильном треугольнике существует точка, которая имеет много интересных свойств. Точка эта называется центром правильного треугольника и получается она так. Проводятся биссектрисы двух углов правильного треугольника.

Оказывается, что точка их пересечения принадлежит и третьей биссектрисе этого треугольника.

Центр правильного треугольника имеет интересные свойства. Перечислим их.

1. Он равноудалён от вершин равностороннего треугольника.
2. Он равноудалён от сторон равностороннего треугольника.
3. В результате поворота равностороннего треугольника вокруг центра на 120° он самосовмещается. Иначе говоря, он занимает на экране то же место, которое занимал сначала. Такой поворот можно проводить по или против часовой стрелки.

Во всех перечисленных свойствах можно убедиться с помощью TI-Nspire.

Говорят, что равносторонний треугольник обладает поворотной симметрией. Вы можете, используя программу, обнаружить и другие свойства центра.

Из всех треугольников только равносторонний имеет центр поворотной симметрии. Можно даже дать определение равностороннему треугольнику как такому, который обладает поворотной симметрией.

Ученикам предлагается решить следующие задачи:

Задача 1. Убедиться, используя TI-Nspire, что биссектрисы равностороннего треугольника пересекаются в одной точке;

Задача 2. Убедиться, используя TI-Nspire, что центр равностороннего треугольника равноудален от его: а) вершин, б) сторон;

Задача 3. Убедиться, используя TI-Nspire, что центр равностороннего треугольника является центром поворотной симметрии на 120 градусов.

Замечание. Доказательство равенства фигур, в том числе отрезков и треугольников, с помощью движения имеет более общий характер, нежели проверка измерением, или опора на признаки равенства треугольников.
Замечание. Использование центра равностороннего треугольника позволяет решать задачи на построение. Те задачи, которые будут предложены, имеют такую особенность. Сначала вы построите равносторонний треугольник – любым способом. Затем вы выделите в нём центр и другие его точки, одну или две. Этими другими точками могут быть вершина, середина стороны, две точки на одной стороне, две точки на разных сторонах. Затем скроете исходный треугольник, а по оставшимся от него точкам попытаетесь его восстановить.

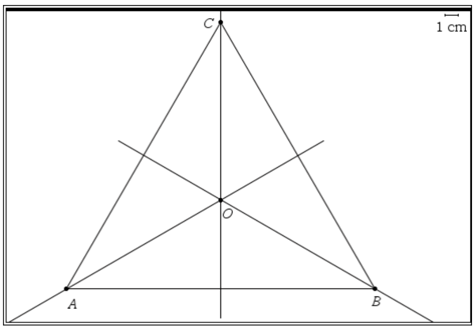
Ученикам предлагается восстановить исходный равносторонний треугольник по таким оставшимся его точкам:
Задача 4. По центру и одной вершине.
Задача 5. По центру и середине одной из сторон.
Задача 6. По центру и двум точкам одной из сторон (эти точки – не вершины и не середины сторон).
Задача 7. По центру и двум точкам на разных сторонах (эти точки – не вершины и не середины сторон).

Домашнее задание

1. Доказать, что три биссектрисы равностороннего треугольника имеют общую точку.
2. Обнаружить (если удастся) с помощью программы свойство центра равностороннего треугольника, которое не обсуждалось в классе.
3. Доказать это свойство.
4. Указать построение равностороннего треугольника по оставшимся его точкам с помощью программы. Можно выбрать одну из задач, предложенных в классе или предложить свою задачу.

Решения задач домашнего задания

Задача о существовании центра равностороннего треугольника

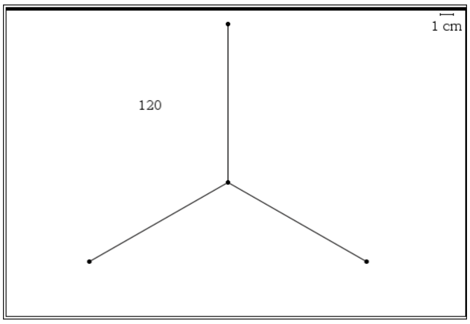


Пусть треугольник *ABC* равносторонний, *AK* и *BL* — его биссектрисы. Обозначим как *O* точку их пересечения. Проведём отрезок *OC*. Докажем, что луч *CO* является биссектрисой угла *C*.

Для этого достаточно доказать, что угол *KCO* равен 30°. Так как *AK*, являясь биссектрисой, является к тому же медианой и высотой, то треугольники *BOK* и *COK* равны по двум катетам. Угол *BOK* равен 30° так как *BL* — биссектриса. Но тогда и равный ему угол *KCO* также равен 30°. А так как угол *ACB* равен 60°, то *CO* — биссектриса.

Задача о восстановлении равностороннего треугольника по центру и вершине.
Проводим отрезок от центра *O* до оставшейся вершины *A* и поворачиваем его вокруг

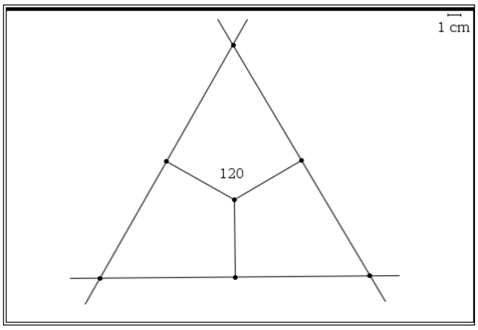
центра на 120^0 по и против часовой стрелки. Его концы *B, C* дадут нам оставшиеся две вершины исходного равностороннего треугольника.



Замечание. При такой трактовке задачи не требуется ни доказательства, ни исследования. Поэтому такая редакция задач на построение более простая, нежели традиционная, в которой требуется и доказательство, и исследование.

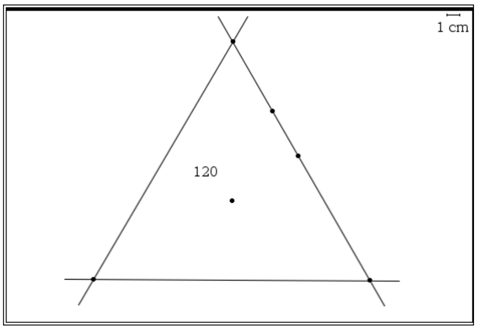
Задача о восстановлении равностороннего треугольника по центру и середине стороны

Проводим отрезок от центра *O* до оставшейся середины *K* и поворачиваем его вокруг центра на 120° по и против часовой стрелки. Его концы *L, M* дадут нам оставшиеся две середины исходного равностороннего треугольника. Проведём отрезки от центра до полученных середин. К полученным трём отрезкам через имеющиеся середины проведём три прямые, соответственно перпендикулярные этим отрезкам. Они дадут нам три точки попарного пересечения, которые и являются вершинами исходного равностороннего треугольника.



Задача о восстановлении равностороннего треугольника по центру и двум точкам на одной из сторон

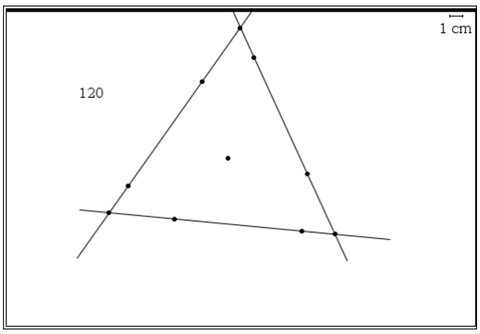
Через данные две точки *P* и *Q* проводим прямую. Из центра *O* проводим перпендикуляр на эту прямую. Поворачиваем этот перпендикуляр вокруг центра на 120^0 по и против часовой стрелки. Его концы дадут нам точки, которые лежат на двух других сторонах исходного треугольника.



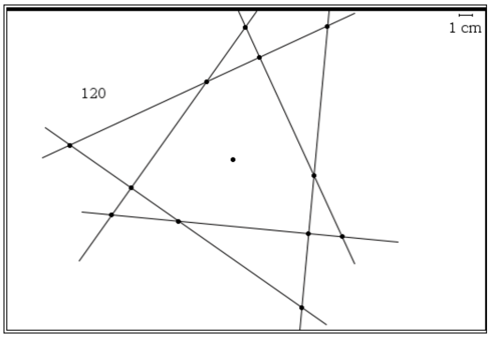
Далее как в задаче 2.

Задача о восстановлении равностороннего треугольника по центру и двум точкам на разных сторонах.

Проводим отрезок от центра *O* до одной оставшейся точки *P*. Поворачиваем его вокруг центра на 120°. Таких поворотов два. В результате одного из них мы получаем точку P_1 на той же стороне, где находится вторая заданная точка *Q*. Тем самым задача сводится к предыдущей.



Если же мы получаем в результате поворота точки *P* точку P_2, которая находится не на той стороне, где находится точка *Q*, то аналогичное построение не приведёт нас к исходному равностороннему треугольнику.



Замечание. Способы восстановления могут быть отличными от приведённых выше.
Оформление решения задачи на построение целесообразно в виде указания алгоритма восстановления. Вот пример тому (в задаче 1).

Построение.
1.Строим равносторонний треугольник *ABC*.
2. Строим его центр *O*.
3. Выделяем вершину *A*.
4. Выделяем центр *O*.
5. Скрываем исходный треугольник *ABC*.
6. Проводим отрезок *OA* от центра *O* до оставшейся вершины *A*.
7. Поворачиваем отрезок *OA* вокруг центра на 120° по часовой стрелке.
8. Выделяем второй конец построенного отрезка.
9. Обозначаем его как *B*.
10. Поворачиваем отрезок *OA* вокруг центра на 120° против часовой стрелки.
11. Выделяем второй конец построенного отрезка.
12. Обозначаем его как *C*.
13. Проводим отрезок *AB*.
14. Проводим отрезок *BC*.
15. Проводим отрезок *CA*.
16. Восстанавливаем исходный треугольник *ABC*.

Замечание. В условии задачи 4 на восстановление можно специально рассмотреть случай, когда оставшиеся две точки являются таковы, что одна из них получается поворотом исходного треугольника на 120° вокруг центра. В самом деле, она сводится к случаю, когда осталась точка только на одной стороне. С помощью программы можно показать, что в этом случае задача имеет больше одного решения. Более того, таких треугольников будет бесконечное множество.