IV. 1. НА ОШИБКАХ УЧАТ

Учить математике, как я понимаю своё дело,— это учить, в частности, характерному для неё (и для науки вообще) максимально добросовестному и ответственному отношению к полученному результату. А это означает, что надо обучать умению его проверить.

Для меня размышления на эту тему связаны с осмыслением расхожего выражения: «На ошибках учатся». На каких ошибках? Как учатся? А почему не говорят: «На ошибках учат»? Имеет ли ученик право на ошибку? Когда? На какую? Какова профилактика ошибок? Входит ли в неё специальный показ возможных ошибок?

Я полагаю, что ответы на эти вопросы куда больше завязаны на личность учителя и его установку, нежели на методику обучения. Не надо требовать от методики того, что она не может дать.
(Например, оформление решения задачи — вопрос не методики преподавания, а вопрос системы работы учителя. По мне оформить решение задачи надо так, чтобы его было удобно проверять: легко читать, рисунки располагать рядом с текстом и т. д. Методика тут ни при чём.)

Попытаюсь частично ответить на поставленные вопросы об ошибках. Да, конечно, на ошибках учатся, на чужих и на своих. Для этого необходимо, чтобы ошибка была осмыслена, сначала опознана и так или иначе квалифицирована. Но если мы хотим, чтобы ученик умел найти ошибку, а затем её осмыслил, то тем самым выходим на некий вид деятельности, именно на критическую деятельность. Она не может возникнуть из воздуха, и выходит, что такой деятельности надо обучать. Значит, прежде чем согласиться с фразой: «На ошибках учатся», надо, видимо, сказать: «На ошибках учат». «Ошибки, - заметил В.Арнольд, - играют в математике не меньшую роль, чем доказательства: анализируя их причины т пути их преодоления, можно быстрее идти вперёд, чем тупо пытаясь продвинуться в малоизученном направлении.» Обратим внимание на слово «малоизученном», отчего эта фраза может быть дословно отнесена и к образованию. И ещё – он же. «Примеры учат не меньше, чем правила, а ошибки – больше, чем правильные, но непонятные доказательства.» Опять же – учат!

К слову сказать, ошибки встречаются и в работах профессиональных математиков, причём высочайшего ранга. Академик Л.С.Понтрягин не стесняясь говорит об этом в своём «Жизнеописании». И приводит яркий пример тому – он обнаружил ошибку в собственных лекциях, которые уже прочитал для американских математиков. « Я чувствовал себя несчастным и опозоренным» - пишет он. Исправил он её только через три месяца после того, как её обнаружил.

Идея известна - я знаю, например, учебную книгу по шахматам, которая на ней и основана (Л. Верховский. «На ошибках учатся…чтобы их не повторять») .Такие довольно очевидные рассуждения приводят к соответствующей работе учителя.

Как именно учить на ошибках? Думаю, что ошибки стоит показывать, не дожидаясь, пока ученики их сделают. Обычно мы говорим, как решать тот или иной пример. А когда я проверяю выполнение этого же примера, то в первую очередь смотрю на то место в решении, где вероятность ошибки наиболее велика. Так почему бы об этом месте не сказать при объяснении способа решения? Здесь напрашивается сравнение с дорогой в горах. Кто ходил, тот знает: самые ценные указания к маршруту о тех местах, где цена ошибки наиболее велика.

Подать ошибку можно по-разному. Я вижу три пути. Покажу их на решении неравенства $-x>-1$. Известно, что ученики часто забывают, умножив обе части неравенства на - 1, поменять знак неравенства.

Первый путь — «лобовой». Я пишу такую строчку

$$-x > -1 \Leftrightarrow x > 1$$

и объясняю, почему она неверна.

Второй путь — «вопросительный». Я пишу ту же строчку, но задаю вопрос: а верна ли она?

Третий путь — «софистический». Я записываю исходное неравенство: $-x > -1$. Затем записываю неравенство, которое может быть получено из данного без смены знака неравенства: $x > 1$. А теперь складываю оба неравенства и получаю такое: 0>0. После этого ошибка становится очевидной.

Мне больше нравится третий путь. Дело в том, что для лучшего запоминания ошибку надо не только осознать, но и «пережить», т. е. сопроводить эмоцией. Удивление ученика при «софистическом» способе и может быть такой эмоцией. Также эмоцией, но со знаком «минус», является досада или обида, когда ученик получает сниженную оценку за допущенную им ошибку. Значит, на одну и ту же ошибку можно организовать разные эмоциональные реакции. Я предпочитаю организовывать удивление. Вот примеры на «организацию удивления»:

1. Весьма часто можно встретить такую запись: $\sqrt{a^2} = \pm a$. Распишем её поподробнее: $\sqrt{a^2} = a$ и (или) $\sqrt{a^2} = -a$. Теперь из первого равенства вычтем второе и получим $0 = 2a$, откуда получаем, что $a=0$. Особенно эффектно этот номер проходит при каком-то конкретном значении a, например при $a = 2$. Мы тогда получим, что 0 = 4. Потом уже я объясняю смысл знака радикала (и явную ненужность термина «арифметический корень»).

2. Идёт рассказ о параллельном проектировании. Начнём с рисунка — квадрат с диагоналями — и спросим учеников: какая неплоская фигура нарисована? Один из ответов — правильная четырёхугольная пирамида. Аналогично рисуем правильный шестиугольник с тремя большими диагоналями и говорим, что нарисован куб.

3. Пусть надо доказать равносильность двух определений равенства многочленов одной и той же степени: два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие коэффициенты. Начнём с примера: упростить выражение

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Подставив в данное выражение вместо x последовательно a, b, c, мы каждый раз получим 1. Многочлен этот вроде бы является квадратным трёхчленом. Но квадратный трёхчлен не может принимать одно и то же значение в трёх различных точках. Значит, данное выражение на самом деле не квадратный трёхчлен, а многочлен-константа, всюду равный 1. Итак, всё это выражение равно 1.

4. Выводим формулу для площади сферического сегмента: $S = 2\pi RH$, где S - площадь сегмента, R - радиус сферы, H - высота ("стрелка") сегмента. Для начала предлагаю ученикам вопрос: " У вас есть циркуль постоянного раствора. Вы рисуете им окружности на разных сферах. И получаете при этом разные сферические сегменты (для определённости пусть все эти сегменты меньше полусферы). В каком случае вы получите большую поверхность сферического сегмента? После обмена мнениями выводим указанную формулу, но из неё ответ на вопрос не ясен, ибо различны и радиусы сфер, и высоты сегментов.

Пусть теперь величина фиксированного раствора циркуля равна r. Легко получить выражение для r из очевидного равенства $r^2 = 2RH$. Тогда полученная для площади сферического сегмента формула приводится к виду : $S = \pi r^2$. Из неё - то и следует, что все сферические сегменты, полученные предложенным образом, имеют - кто бы мог подумать - одинаковую площадь. Более того, эти сегменты можно брать и большими, чем полусферы - результат будет тем же. Наконец, если провести тем же раствором циркуля окружность не на сфере, а на плоскости, то получим ту же площадь. Ну и разумеется устремляя r к диаметру сферы, мы получаем в пределе формулу для площади сферы.

В этой задаче выражение, зависящее от двух параметров, свелось к выражению с одним параметром. Известна аналогичная задача из планиметрии: площадь кольца между двумя концентрическими окружностями, зависящая, как ясно, от радиусов этих окружностей, может быть найдена, если известен только один параметр - длина касательной к меньшей окружности, находящейся внутри большей из них.

Вот похожий, но более любопытный пример - одна из задач Архимеда. Внутри данного круга находится два круга, окружности которых касаются между собой и исходной окружности, причем центры меньших окружностей лежат на диаметре данной. Требуется найти площадь части большого круга, находящуюся вне двух малых кругов. Тут конфигурацию задают уже три параметра, но искомая площадь может быть вычислена, если известен только один - длина общей касательной двух малых окружностей, проведённой в их общей точке и находящейся внутри большого круга. Ну и, наконец, «рекордный», но не столь эффектный пример, когда параметров может быть сколько угодно, а результат зависит только от одного: на заданном отрезке выбирается n точек и на каждом полученном отрезке как на диаметре строится полуокружность Путь из одного конца отрезка в другой проходит по всем этим полуокружностям. Какова его длина? Ответ зависит только от длины исходного отрезка.

Хорошо известна также задача о цилиндрическом отверстии в шаре (ось цилиндра содержит диаметр шара). Задаётся радиус шара, радиус основания цилиндра, его высота. Требуется найти объём оставшейся части шара. Оказывается, он зависит только от высоты цилиндра!

Математические ошибки бывают разные: технические, логические, а ещё бывают заблуждения. Что такое технические ошибки, объяснять не надо, логические ошибки касаются рассуждений, а заблуждения следует отнести к тому, что выбрана неверная гипотеза или тупиковый путь решения.

Пример неверной гипотезы легко получить от учеников, если задать в классе почти любой содержательный вопрос в соответствующей форме. Например, такой: «Как вы думаете, будет ли непрерывная функция дифференцируемой?» А вот пример тупиковой идеи решения в такой задаче: «Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 3 + \sqrt{2} \\ x + y^2 = 2 + \sqrt{3} \end{cases} ?»$$

При попытке ответить на этот вопрос аналитически получается уравнение, которое не решить, а графически ситуация ясна.

При решении задач прикладного характера возможны ошибки при переходе от условия к математической модели (простейший пример — не выписаны все ограничения на неизвестные) и ошибки в интерпретации (за ответ принят невозможный результат: два землекопа и две трети!).

И наконец, где искать ошибку? В полученном результате, в решении, в гипотезе. В прикладной задаче - в соответствии модели условию задачи. О том, как это делать, речь пойдёт чуть позже.

А сейчас о самих ошибках, о том, что я видел в реальности.

Нарушение равносильности

При доказательстве равенств,

Часто записывается равносильность такого вида: $a = b \Leftrightarrow f(a)=f(b)$.

Но она всегда верна, когда функция f строго монотонна, а числа a и b входят в её область определения. Иначе можно доказать, скажем, такие равенства:

1) -1=1 возведением в квадрат;
2) $\pi = 0$, взяв синус от обеих частей равенства.

Ярко видна такая ошибка при доказательстве равенства arcsin 0,8 + arccos 0,8 = $\pi/2$ с помощью взятия синуса от обеих его частей. Сумма в левой части при таком доказательстве должна находиться на промежутке монотонности синуса, в данном случае на промежутке [0, $\pi/2$] или на промежутке [$\pi/2$, π]. Установить это - всё равно что сделать исходный пример. Переходить к промежутку [0; л] бессмысленно, ибо на нем синус не монотонен. Поэтому лучше брать от обеих частей не синус, а косинус.

При доказательстве неравенств.

Равносильность типа $a>b \Leftrightarrow f(a)> f(b)$ требует тех же оговорок, что и для равенства. Если их не сделать, то можно доказать, что -2>1 возведением в квадрат обеих частей неравенства. Возведение в квадрат можно видеть часто без должных оговорок. Так, например, ученики доказывают неравенство $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, не оговорив неотрицательность *a* и *b*.

При решении уравнений, неравенств, систем.

а) $\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -3 \end{array} \right. \\ -4 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ -4 < x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Знак системы везде выглядит вполне естественно - с точки зрения ученика. Однако последний знак системы нужно заменить на знак совокупности.

б). Любопытна ученическая ошибка при решении такой задачи: "Какую фигуру определяет в пространстве такое условие: $x + y + z = 2$, $xy + yz + zx = 1$?" Стандартное преобразование - возведение в квадрат первого уравнения с последующим вычитанием второго приводит к уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Посему ответ "сфера" получается вроде бы сам собой. Но он не является верным. Вывод о сфере делается на основании следствия из данной системы, которое, разумеется, не равносильно самой системе. Учитывая первое уравнение системы, что восстанавливает равносильность, получаем верный ответ - окружность.

В рассуждениях.

Случается, что в процессе решения некое условие заменяется на другое, не равносильное первому. Вот примеры:

а) При каких значениях *a* система $x^2 = 1 - y^2 = y - |a|$ имеет одно решение?

Рассмотрим равенство $1 - y^2 = y - |a|$. Оно сводится к уравнению $y^2 + y - (1 + |a|) = 0$. Так как система имеет одно решение, то это квадратное уравнение также должно иметь одно решение, а потому его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$1+4(1+ |a|) = 0.$$

Но это равенство невозможно. Поэтому ни это уравнение, ни сама система не могут иметь одного решения.

Однако из геометрической иллюстрации ясно, что при $|a| = 1$ система имеет как раз одно решение.

Ошибка в приведённом решении заключена во фразе: «Так как система...» На чём, собственно, она основана? Ни на чём.

б) Найти наибольшее значение площади боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, если площадь его основания равна 1, а длина диагонали равна 2,

Пусть основания параллелепипеда равны *a* и *b*, боковое ребро равно *c*. Площадь боковой поверхности *S* имеет тогда вид

$$S=2(a + b)\,c. \qquad (1)$$

Условие задачи сводится к системе двух уравнений $\begin{cases} ab = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 4 \end{cases}$.

Выражение (1) запишем как функцию одной переменной. Для этого можно пойти двумя путями.

Первый способ состоит в том, что из уравнений системы мы получаем такие равенства:

$b=1/a$, $c = \sqrt{4 - a^2 - \frac{1}{a^2}}$. И тогда $S(a) = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\sqrt{4 - a^2 - \frac{1}{a^2}}$. При дальнейшей работе с этим выражением мы получаем, что наибольшее значение площади поверхности достигается при

a =1 и равно 4 $\sqrt{2}$.

Второй способ состоит в том, что из системы следует

$$a + b = \sqrt{6 - c^2}\ . \qquad (2)$$

Но тогда $S(c) = 2c\sqrt{6 - c^2}$.

При дальнейшей работе с этим выражением мы получаем, что наибольшее значение площади поверхности достигается при $c = \sqrt{3}$ и равно 6.

Ошибка второго решения заключена в замене системы неравносильным ему уравнением (2).

в) Пусть требуется узнать, при каких значениях параметра a один из корней трёхчлена $x^2+(a - 2)x - a$ равен 1, а другой больше 1. Предположим, мы захотели воспользоваться теоремой Виета, а потому составляем систему из трёх неравенств:

$(a - 2)^2 + 4a > 0$, $x_1 x_2 = - a > 1$, $x_1 + x_2 = - (a - 2) > 2$. Решив её, получаем, что $a<0$. Увы, это не ответ, пока мы не обосновали равносильность всех переходов. А её нет, так как не совершить обратный переход: из совместного выполнения этих трёх условий не следует то, что нам требуется. Использованы допущения, которые не оговорены условием.

Именно, предполагается, что хотя бы один корень трёхчлена действительно равен 1. Но это не так, в чем убеждаемся, взяв $x = 1$. Иначе говоря, найдены необходимые условия, которые не являются достаточными.

Эта ситуация встречается почти всегда при работе с параметром. В таком задании спрашивается, при каких значениях параметра происходит нечто. Полный ответ на этот вопрос должен быть таким: "если параметр равен тому-то, то это нечто имеет место." Но как обычно решается такая задача? Мы начинаем работать с эти "нечто" и получаем отсюда множество значений искомого параметра. Полный ответ полученного результата выглядит так:" Если нечто имеет место, то параметр такой-то. " Ясно, что решена обратная задача. Отсюда и следует необходимость равносильности рассуждений. Пример тому я приводил выше.

Неверное толкование условия

.Весьма часто в геометрической задаче мало данных для однозначного установления взаимного расположения фигур, что не учитывается в решении.

Вот примеры:

а) Два круга радиусами R и r имеют общую хорду длиной a. Чему равно расстояние между их центрами?

В задаче возможны два случая расположения.

б) В тетраэдре основанием является равнобедренный треугольник со сторонами a, a, b. Грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Найти объём пирамиды.

В задаче возможны три различных случая в зависимости от того, куда проектируется вершина тетраэдра.

в) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3, а высота равна 1. Через ребро основания проводится сечение, перпендикулярное боковому ребру. Чему равна его площадь?

В предположении, что таким сечением является треугольник, его площадь можно найти, скажем, так. Вычислим объём пирамиды двумя способами: по основной формуле и как сумму объёмов двух пирамид, на которые данным сечением разбилась исходная пирамида, причём за основание этих двух пирамид можно принять как раз само сечение. Вычисления дадут ответ $\frac{9\sqrt{3}}{8}$, но он неверен. Дело в том, что сечение, перпендикулярное боковому ребру, может выходить за пределы пирамиды, и тогда сечением пирамиды будет всего лишь ребро основания, а не треугольник. При наших числовых данных как раз реализуется этот случай.

Вообще, если для доказательства используется рисунок, то необходимо выяснить его единственность относительно данных.

Заведомо предполагается существование того, о чём говорится

Тут много хорошо известных примеров, связанных с определением понятия. Мы говорим, например:

а) «Числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными».

б) «Расстоянием от точки до фигуры называется длина кратчайшего отрезка, соединяющего данную точку с точками фигуры».

в) Известно определение равных отрезков как таких, длины которых равны. При этом длины отрезков измеряются линейкой. Однако на линейке есть деления. Откуда они взялись?

Но вот хороший контрпример — треугольный пентаэдр; пятигранник, у которого все грани треугольники. Однако таковой не существует.

И ещё: первое число больше второго, если их разность больше нуля. А что такое «больше нуля»?

Ошибочные рассуждения.

а) «Докажем», что -1 = 1, используя производную. Для этого рассмотрим функцию $y = |x|$ и найдем её производную с обеих сторон от нуля. При $x>0$ получаем, что $y'=1$, а при $x<0$ получаем, что $y' = -1$. Но производная единственна, значит, и приходим к равенству -1 = 1.

Ошибка состоит в допущении существования производной при $x = 0$.

б) Решить уравнение $x^{x^{x^{\cdots}}} = 2$.

«Решение». Показатель, в который мы возводим число, также есть выражение из первой части условия, а потому он равен 2. Тогда имеем уравнение $x^2 = 2$, решение которого даёт $x = \sqrt{2}$.

Решив таким же образом уравнение $x^{x^{x^{\cdots}}} = 4$, получим опять $x = \sqrt{2}$.. Взяв оба эти уравнения вместе, увидим, что выражение $x^{x^{x^{\cdots}}}$ равно и 2, и 4, а отсюда недалеко до равенства 0 = 1.

Выражение в левой части уравнения можно понимать только как некий предел, но тогда встаёт известный вопрос о его существовании.

В общем виде исследование сходимости данной последовательности непросто. (Можно посмотреть задачу 30 из книги "Избранные задачи". М. "Мир", 1977) . При $x = \sqrt{2}$ она сходится. Но к какому числу? К 2? К 4? Несложно показать, что второе невозможно. В самом деле,

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{2} = 2$. Отсюда ясно, что выражение в левой части при $x = \sqrt{2}$, то есть $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{g}}}$, не может равняться 4. И остаётся ответом число 2. Но остаются и вопросы. Например, почему же приведённый метод в одном случае дает верный ответ, а в другом - нет? Возникает необходимость в непростых разговорах об итерационных процессах, об их сходимости. Любопытно, что в пособии, из которого я взял это уравнение (книга В. Чирского и Е. Шавгулидзе о решении уравнений), не приводится никаких комментариев к полученному результату.

Ещё пример того же рода. Решим такое уравнение

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x\ldots}}} = a$. Точки указывают на предельное соотношение. После возведения в квадрат обеих частей этого уравнения получим

$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}} = a^2$, а далее $x + a = a^2$, откуда имеем: $x = a^2 - a$.

Пусть теперь требуется решить уравнение $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x\ldots}}} = 1$.

Согласно полученной формуле $x = 0$.

То есть $\sqrt{0+\sqrt{0+0\ldots}} = 1$.

Из этой нелепости естественно вытекает вопрос об условиях сходимости последовательности
$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x\ldots}}}$.

Кстати, может возникнуть подозрение о невозможности возведения в квадрат обеих частей уравнения, когда в одно из частей нечто бесконечное. Но эту выкладку можно провести чисто, только чуть её поменяв. Сначала запишем такое рекуррентное соотношение для данной последовательности: $x_{n+1} = \sqrt{x+x_n}$. Возведение в квадрат (в случае неотрицательности обеих частей) приводит к равенству $x_{n+1}^2 = x + x_n$. Предположив, что предел последовательности x_n равен a , приходим к нужному равенству $a^2 = x + a$.

Весь этот разговор можно спровоцировать «доказательством» того, что последовательность вида x^n при $0 < x < 1$ сходится к нулю. Тут сделаем так. Из равенства $x_n = x^n$ перейдём к такому: $x_{n+1} = x \cdot x_n$. Предположив, что предел последовательности x_n равен a , приходим к равенству $a = xa$. Отсюда получаем $a = 0$. Все довольны и вопрос о сходимости не возникает.

Вот теперь и приводим предыдущие два примера.

в) В тетраэдре *PABC PA* = *PC*=*AB*=*BC*= 1. *AC*=*PB*. Вычислить наибольшее значение площади его поверхности.

Поверхность этого тетраэдра состоит из четырёх равных между собой равнобедренных треугольников. Площадь каждого из них равна $0{,}5 \cdot \sin\varphi$, где φ — угол при вершине. Тогда площадь поверхности всего тетраэдра равна $2\sin\varphi$. Наибольшее значение этой величины достигается при $\varphi = 90°$ и равно 2.

Этот ответ ошибочен, так как тетраэдр при таком значении угла не существует — вырождается в квадрат. Невозможность такого тетраэдра следует из того, что к двум скрещивающимся прямым *PA* и *BC* проведены два общих перпендикуляра *PC* и *BA.* А ошибка произошла потому, что предполагалось существование тетраэдра такого вида с наибольшей площадью поверхности.

г) Пусть уже известно, что если функция строго возрастает на открытом промежутке, то её производная на этом промежутке неотрицательна, причем критические точки не заполняют никакого промежутка. Докажем обратное утверждение: если производная от функции на открытом промежутке положительна, то сама функция строго возрастает на этом промежутке.

«Доказательство». Пусть данная функция не является строго возрастающей на данном промежутке. Тогда на каком-то промежутке внутри данного она убывает или является постоянной. Но тогда на этом же промежутке её производная либо будет отрицательной, либо равна нулю, что противоречит условию.

Здесь хотя и известная, но довольно тонкая ошибка. Существуют функции, имеющие производную, но не являющиеся монотонными на любом промежутке внутри данного. Поэтому фраза «Тогда на каком-то промежутке...» неверна.

д) Величина r радиуса шара, вписанного в пирамиду с объёмом V и площадью поверхности S, ищется по формуле $r = (3V) / S$, но пирамида может быть такой, в которую шар не вписывается.

е) Предлагается, используя теорему Виета, составить квадратное уравнение, корни которого на 1 больше, чем корни уравнения $x^2 + x + 1 = 0$.

Ученики благополучно составляют новое уравнение, но ведь исходное уравнение корней не имеет (если говорить о действительных корнях. Кстати, если говорить о комплексных, то новая неприятность — для них нельзя сказать, что один корень «больше» другого).

ж) Требуется найти все значения параметра *a,* при которых уравнение $x^2 - |x| + a = 0$ имеет один корень. Одно из решений. Запишем исходное уравнение в таком виде: $x^2 - |x| = -a$

Так как слева стоит чётная функция, то один корень – это только 0. Но тогда $a = 0$.

Ответ неверен. Взяв $a = 0$, мы видим, что корней уравнения больше одного. Ошибка произошла потому, что мы считали возможным случай одного корня. Но этого на самом деле нет, в чём можно убедиться хотя бы из геометрической иллюстрации.

з) Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}$ (соответствующей теории пока нет). Посмотрим на такую выкладку:

$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1} x}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}}$. Пусть $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} = a$. Тогда получаем, что $a^2=1$, откуда $a = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} = 1$.

Здесь заведомо предполагается существование предела.

Выход за границы применимости

1. *Теорема* используется *за границами своей применимости.*

Вот примеры:

а) Запишем такую цепочку равенств: $x=x^1=x^{2\cdot 0,5}=(x^2)^{0,5}=\sqrt{x^2}=|x|$.

Получилось, что $x=|x|$, а это возможно только при $x\geq 0$. Итак, мы «доказали», что все числа неотрицательны.

Ошибка заключена в переходе $x^{2\cdot 0,5}=(x^2)^{0,5}$,который обоснован как раз для $x\geq 0$.

б) «Докажем», что -1 = 1.

Запишем такую цепочку равенств:

$$-1=-\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{-1}=(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1.$$

Ошибка заключена в переходе $(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}$ и в переходе $(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}$ так как они обоснованы только для неотрицательных чисел.

в) «Можно составить квадратное уравнение с тремя разными корнями». Действовать будем так. Запишем равенство $(x-i)(x-1)=0$. Раскрыв скобки, получим квадратное уравнение. Так как оно имеет корнем i, то оно имеет и корень $-i$, а потому у него три корня.

Ошибка в том, что сопряжённый комплексный корень существует только для уравнения с действительными коэффициентами, а наше уравнение имеет комплексные коэффициенты.

2. *Метод* используется *за границами своей применимости.*

а) Очень яркий и хорошо известный пример использования метода математической индукции для «доказательства» того, что все люди — блондины.

Другой пример — «доказательство» того, что все люди — бедные. Оно следует из того, что имеющий всего 1 рубль — бедный, а прибавление рубля к имеющейся сумме состояние «бедности» не меняет.

В этом коротком примере любопытно вот что. Когда я рассказывал его своим коллегам, редко кто с ходу говорил, в чём дело. Мы слишком привыкли к формализованным рассуждениям и легко обнаруживаем ошибки в таковых. А вот обнаружить ошибку на этапе формализации, до начала формального рассуждения, оказывается сложно. В самом деле, а что такое «бедный»? Где определение?

б) Формальное доказательство теоремы о производной сложной функции может использовать такое равенство: $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=\dfrac{\Delta z}{\Delta y}\cdot\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Но оно годится только при знаменателях, отличных от нуля.

в) Попытаемся найти наименьшее значение выражения $T(x, y) = x^2 + xy + y^2$ при условии, что $1\leq x\leq 2$, $2\leq y\leq 3$.

Будем считать сначала, что данное выражение — трёхчлен от переменной x, а y — параметр. Тогда его наименьшее значение равно $3y^2 / 4$. Взяв теперь $y = 2$, мы получим наименьшее значение $T(x,y)$, равное 3.

Но мы можем считать, что данное выражение — трёхчлен от переменной y, а x — параметр. Тогда его наименьшее значение есть $3x^2/4$. Взяв теперь $x = 1$, мы получим наименьшее значение $T(x,y)$, равное 3/4.

Может быть, наученные прошлым опытом, мы предположим, что минимума вообще нет? И потому мы получаем разные ответы? Очень поучительный пример для беседы с учениками.

г) Рассмотрим функцию $y = x^2 + x$ при $2 \le x \le 3$ и найдём границы для y. Запишем так:

$$2 \le x \le 3 \Rightarrow 4 \le x^2 \le 9 \Rightarrow 6 \le x^2 + x \le 12.$$

Теперь возьмём функцию $y = x^2 - x$ на том же промежутке и запишем

$$2 \le x \le 3 \Rightarrow 4 \le x^2 \le 9 \qquad (1)$$

$$2 \le x \le 3 \Rightarrow -3 \le -x \le -2\ . \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $1 \le x^2 - x \le 7$. Всё, казалось бы, ясно. Но также ясно, что на промежутке [2; 3] вторая функция монотонна, а потому $2 \le y \le 6$.

Почему же получились разные результаты для второй функции, в то время как для первой они одинаковы? (Первая функция приведена только для того, чтобы оттенить, что происходит со второй, и «запутать» аудиторию.)

д) Известно, что прямая теорема равносильна теореме, противоположной обратной. Мне доводилось видеть доказательство этого утверждения методом от противного. Выглядело оно примерно так.

Пусть прямая теорема имеет вид $A \Rightarrow B$, тогда обратная имеет вид $B \Rightarrow A$, а_ей противоположная имеет вид $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. Предположим, что эта последняя теорема неверна. Тогда верно утверждение $\bar{B} \Rightarrow A$. Вместе с верным прямым утверждением получаем, что верно утверждение $\bar{B} \Rightarrow B$. А этого не может быть. Значит, наше предположение неверно, и на самом деле теорема $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ верна.

Я много раз рассказывал это ученикам, и все всё понимали и с удовольствием записывали.

Но пойдём дальше. Докажем теперь, что верна и обратная теорема: $B \Rightarrow A$. Доказывать будем точно так же.

Пусть теорема $B \Rightarrow A$ неверна. Тогда верно утверждение $B \Rightarrow \bar{A}$. Вместе с верной прямой теоремой $A \Rightarrow B$ получаем, что верно утверждение $A \Rightarrow \bar{A}$, Но этого не может быть. Значит, наше предположение неверно, и на самом деле теорема $B \Rightarrow A$ верна.

Дело в том, что отрицанием утверждения $A \Rightarrow B$ не является утверждение $A \Rightarrow \bar{B}$, что выясняется с помощью таблиц истинности. Если же так в классе не сделать, то остаётся иллюстрация на конкретных примерах или на кругах Эйлера.

е) Теорему Лагранжа о конечных приращениях очень хочется доказать, повернув известную картинку так, чтобы ось абсцисс пошла по лучу AB. Тогда с ходу получаем теорему Ферма, которая (при каноническом изложении основ анализа) уже доказана. Увы, от такого поворота может пропасть функциональность, ибо легко себе представить график функции, который пересекает прямую AB под прямым углом (рис. 102).

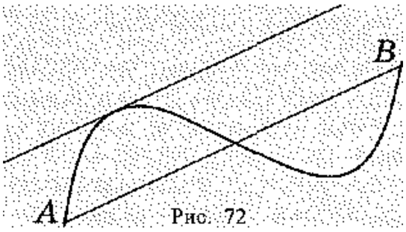


Рис. 102

ж) Я как-то «доказывал», что на полуокружности точек «больше»,чем на самой окружности. Взял окружность с центром *O* и провёл диаметр *AB*. Через точку *A* провёл прямую *c*, касательную к данной окружности. Спроектировал окружность на прямую *c*, проведя всевозможные лучи из точки *B,* пересекающие прямую *c*. При таком проектировании получается, что на окружности точек «на одну больше» (точку *B),* чем на прямой *c*. Далее я провожу диаметр *KP,* перпендикулярный *AB,* и проектирую на ту же прямую полуокружность *KAP* из центра *O* лучами, пересекающими прямую *c* . При таком проектировании получается, что на полуокружности точек «на две больше» (точки *K* и *P*), чем на прямой *c*. Но тогда на полуокружности точек «на одну больше», чем на самой окружности!

И что особенно любопытно: между полуокружностью без двух концов и окружностью с выколотой точкой легко установить взаимно-однозначное соответствие.

Здесь (как отступление) вернусь к первой ситуации. Эта конфигурация неплохо иллюстрирует предел функции при $x \to\infty$. На окружности с центром *O* проведён диаметр *AB*. Через точку *A* проведена прямая *c*, касательную к данной окружности. Окружность спроектирована на прямую *c,* всевозможными лучами из точки *B,* пересекающими прямую *c*. При таком проектировании наглядным образом бесконечно удалённой точки прямой является точка *B*.

Далее можно пофантазировать так. Первая фантазия такова. Пусть длина данной окружности равна 2. «Распрямим» эту окружность так, чтобы на прямой *c* образовался отрезок длиной 2, симметричный относительно точки *A*. Точка *B* «раздвоится» и на прямой *c* появятся две точки B_1 и B_2 , иллюстрирующие $+\infty$ и $-\infty$.

Вторая фантазия состоит в том, что на первой окружности строится бесконечная прямая цилиндрическая поверхность и её образующая, проведённая из точки *B*. Если эту образующую толковать как некую ось, на которой откладываются значения функции (аналог оси *y* на плоскости) , то на этом рисунке можно иллюстрировать $\lim f(x)$ при $x \to\infty$, если предел конечен. Переменная *x* находится на отрезке AB_1 или AB_2 , а сам предел – на образующей, проходящей через точку *B*.График функции будет выглядеть кривой на цилиндрической поверхности. «Развернув» цилиндрическую поверхность на плоскость рисунка, получаем иллюстрацию данного предела на конечном участке плоскости.

Третья фантазия состоит в том, что к первой окружности пристраивается равная вторая так, что они имеют одну общую точку *B* , а их плоскости перпендикулярны. На второй окружности точке *B* поставим в соответствие 0, а точке, диаметрально противоположной точке *B*, поставим в соответствие ∞. Теперь можно иллюстрировать и бесконечные пределы функций при $x \to\infty$. Если построенные две окружности считать частями сферы, то график функции будет выглядеть кривой на сфере. А если первая окружность уже развёрнута (согласно первой «фантазии») то можно на конечном куске плоскости иллюстрировать предел, в котором участвуют две бесконечности.

з) При вычислении пределов, когда переменная стремится к бесконечности, кажется, что имеет смысл работать с самыми высокими её степенями, откидывая или добавляя остальные. Такая процедура вроде бы убыстряет вычисление.

Например (здесь и дальше $n\to\infty$), вычисляя предел $\lim(\sqrt{n^2+1}-n)$ можно, вроде бы, проделать такие манипуляции:

$$\lim(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim(\sqrt{n^2}-n)=0.$$

(Здесь мы под корнем «откинули» 1, стоявшую под радикалом.)

Затем $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)$ «вычислим» аналогично, «откинув» *n,* стоявшее под радикалом, и сразу получаем 0.

Но вот такой пример: $\lim(\sqrt{n^2+2n}-n)$ и сделаем так:

$\lim(\sqrt{n^2+2n}-n) = \lim(\sqrt{n^2+2n+1}-n) = \lim(n+1)-n) = 1$, а затем так:

$\lim(\sqrt{n^2+2n}-n) = \lim(\sqrt{n^2}-n) = 0$.

Увы, что-то не так в нашем «методе».

и) При вычислении интеграла $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$ с помощью тангенса половинного угла мы получаем, что он равен нулю. Причина такого странного результата в том, что тангенс половинного угла разрывен в точке $x = \pi$.

3. *Определение* используется *за границами своей применимости.* Хорошо известно «доказательство» того, что $a^{\circ}=1$, выписыванием таких равенств:

$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$.

4. *Формула* используется за границами своей применимости.

В формуле объема шарового сегмента $V = \pi H^2(R - \frac{H}{3})$ возьмём $R = 2$, $H=5$. Ответ получается, но в невозможной ситуации, ибо необходимо $H \le 2R$.

Потеря смысла

(Разумеется, это название, как и предыдущие, условно. К тому же отдельные примеры можно включить не в одну рубрику.)

Из того, что пишет или говорит ученик, следует, что он плохо понимает, чем он занимается. Вот примеры:

а) Решается неравенство tg$x$ <1, а ответ такой: $x < \frac{\pi}{4} + \pi n$. Но такое невозможно просто в силу периодичности тангенса!

б) Формула площади треугольника $S = 0{,}5ah_a$ доказывается для треугольников трёх видов: остроугольного, тупоугольного и прямоугольного. Казалось бы, зачем нужно разбирать все три случая? Когда треугольник тупоугольный или прямоугольный, будем проводить высоту на наибольшую сторону. Она лежит внутри треугольника, и доказательство получается точно такое же, как для остроугольного треугольника.

При доказательстве этой формулы надо понимать, что мы её выводим не для какой-то стороны треугольника, а для любой его стороны. Во фразе «Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту к этому основанию» опущено слово: «любого» основания. Опущено совершенно резонно, как принято опускать квантор всеобщности во многих ситуациях, но надо понимать, почему мы его опускаем и в этой фразе.

в) Ищется первообразная для функции $\sin x \cdot \cos x$. Возможны такие результаты: $0{,}5\sin^2 x + C$ и $-0{,}5\cos^2 x + C$. Но так как первообразная «одна и та же», то приходим к равенству $0{,}5\sin^2 x + C = -0{,}5\cos^2 x + C$. Приводя подобные, получаем, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$.

Я думаю, здесь комментарии излишни. Впрочем, возможны варианты. Если первая первообразная будет записана так: $0{,}5\sin^2 x + C_1$ а вторая так: $-0{,}5\cos^2 x + C_2$, то ведь никто потом не «запрещает» взять $C_1 = C_2$, а тогда приходим к той же нелепости. Запись первообразной в виде $F(x) + C$ требует ясного понимания, что это не какая-то конкретная функция. Либо это множество всех первообразных, либо произвольная функция из этого множества.

Сюда же можно отнести и такой пример:

$$\int xdx = \int (x+0)dx = \int xdx + \int 0dx = \int xdx + C \Rightarrow C=0.$$

Неверное использование математической символики

Вот несколько примеров:

а) $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \\ y = \pi n \end{cases} n \in Z$. Отсюда сразу получаем $x = y$, что нелепо.

В тригонометрических системах при записи ответов имеет смысл употреблять разные буквы, обозначающие целые числа.

б) $i = \sqrt{-1}$, $-i = \sqrt{-1}$,

Отсюда вроде бы следует, что $i = -i$, т.е. $i = 0$.

Ошибка в неверных исходных записях. Слева стоят комплексные числа, а справа $\sqrt{-1}$. Этот символ на множестве комплексных чисел вовсе не обозначение конкретного числа, а либо множество всех корней из -1, либо произвольное число из этого множества. Любопытно, что то же можно сказать о символе $\sqrt{1}$ на множестве комплексных чисел.

Логические ошибки

Набор логических ошибок учеников хорошо известен.

1) Самая известная - "порочный круг". Приведу один пример тому, не совсем тривиальный. Известно, что для решения некоторых геометрических задач используются механические соображения, то есть такие, которые основаны на законах механики. А если эти самые законы механики требуют для своего обоснования геометрию? И ведь требуют, ибо механика использует понятие "абсолютно твердого тела", которое определяется через понятие расстояния между точками.

В одной из своих книг Г.Н. Саранцев пишет: « Рассмотрим, например, два наиболее распространённых в школьных учебниках доказательства теоремы Пифагора. Первое доказательство основывается на выражении катетов прямоугольного треугольника через гипотенузу и синус или косинус одного из его острых углов. Возведя в квадрат оба равенства и сложив их, мы получим формулу, выражающую зависимость между квадратом гипотенузы и суммой квадратов катетов.»

И далее, в продолжение, некий комментарий, : «… доказательство лишено наглядности, поэтому трудно охватить его целиком, предугадать не только результат, но и последующий шаг.»

Лично я не знаю учебников с таким доказательством теоремы Пифагора. Таковых и быть не должно. Оно опирается на основное тригонометрическое тождество, но оно – то в школьном курсе математики выводится именно из теоремы Пифагора!

А однажды на уроке было такое. Разбиралась задача, в которой возможно получить ответ не только из математических, но также из физических (механических) соображений. И я спрашиваю учеников, как вы к этому отнеслись – к использованию физики для получения ответа в геометрической задаче? Ответ был таков: если можно использовать математику для физики, то почему нельзя делать наоборот? Другой ответ – механика ведь тоже основана математике, поэтому никакой проблемы нет. И тут же последовало возражение. «Вот, смотрите, - начала его ученица Лера Т. , в академическом смысле ученица не блестящая.

– Вот, смотрите, - начала она. И математика, и физика работают с абстрактными понятиями. Абстрактные понятия математики дальше от реальности, а потому более простые, нежели в физике. В этом смысле математика наука более простая, нежели физика. И естественно, что более сложные вещи объясняются с помощью простых, то есть физика с помощью математики, а не наоборот.» И воцарилась в классе тишина.

Я бы выделил группу ошибок, связанных с логической структурой утверждения.

2. *Ошибки при работе с логическими операциями и кванторами.*

Здесь можно привести примеры, связанные с формулировкой отрицания.

Среди стереометрических аксиом есть такая: «Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку». (Такова стандартная формулировка. Не вполне удачная, ибо термин «пересекаются» требует уточнения.)

Попробуем «вывести» это утверждение из прочих. Возьмем любую плоскость α и две точки на ней: *A и B*. Возьмем теперь любую точку *C*, не лежащую в плоскости α . Через точки *A, B, C* проходит плоскость, назовем ее β. Точки *A* и *B* принадлежат как плоскости α, так и плоскости β. Поэтому прямая *AB* лежит в каждой из этих плоскостей, т. е. является прямой их пересечения.

Доказать-то мы доказали, но какое утверждение? Равносильно ли оно приведённой аксиоме? Увы, нет. Накладка получается потому, что в формулировке аксиомы опущено (по умолчанию!) слово «любые». Более чёткая формулировка выглядит так: «Любые две плоскости, имеющие общую точку, имеют общую прямую, проходящую через эту точку».

3. *Ошибки «структурные».*

Сюда относятся разнообразные примеры неверно сформулированных учениками обратных и противоположных утверждений; когда они «плавают» в необходимости и достаточности.

Из года в год я слышу такое: «Через прямую, перпендикулярную данной плоскости, проходит плоскость, перпендикулярная данной плоскости. Значит, если прямая не перпендикулярна данной плоскости, то через неё не проходит плоскость, перпендикулярная данной».

3. *Ошибки при записи ответа,*

а) При записи ответа в уравнении (x - 1) (x —2) = 0 часто встречается такая запись: $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

или (x=1 и x = 2),

б) При записи ответа в системе $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$

порой видишь $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l} y=2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

4. *Ошибки в аналогиях.*

Аналогия чрезвычайно сильное средство для получения новых результатов. В обучении можно найти тьму примеров этому. Я напомню только два: аналогия в свойствах круга и шара, а также аналогия в свойствах треугольников и трёхгранных углов. Вместе с тем аналогией надо пользоваться очень аккуратно, ибо она может подвести. Вот некоторые примеры:

а) Наименьшее значение произведения a и b можно найти, перемножив наименьшее значение a и наименьшее значение b (при условии, что оба они положительны). Но этот способ не годится, когда между величинами a и b есть некая связь, например, $a=x$, b = 1-x.

б) Умножение действительных чисел ассоциативно, а скалярное умножение векторов таким свойством не обладает (и векторное тоже).

в) С функцией x^x можно работать как с показательной, но не всегда. При решении уравнений необходимо учитывать случай, когда x = 1, а что касается взятия производной, то аналогия не допустима вовсе. Недопустима тут и аналогия со степенной функцией.

г) Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит в середине гипотенузы. Ничего аналогичного нет для прямоугольного тетраэдра — тетраэдра, в вершине которого сходятся три прямых угла.

д) Если в треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей, то он равносторонний. Аналогичное утверждение для тетраэдра и сферы неверно.

е) Если функция f - нечётная, то функция $1/f$ также нечётная. Скажу иначе: если график функции f центрально симметричен относительно начала координат, то график функции $1/f$ также центрально симметричен относительно начала координат. Но так не получается, если график функции f центрально симметричен относительно точки, не имеющей нулевой координаты - график функции $1/f$ не является таковым.

ж) Известно, что квадрат можно разбить на конечное число квадратов, среди которых нет двух равных. Аналогичное утверждение для кубов неверно. Теперь приведу любопытный "пример наоборот" , когда в пространстве возможно то, что представляет проблему на плоскости. Оказывается, в пространстве не существует "проблемы четырёх красок": каково бы ни было число n, всегда можно n тел расположить так, чтобы каждое из них имело общую часть поверхности с каждым. Из неё и следует, что верхней границы на число красок быть не может. Что это за тела? Представьте себе осьминогов (лучше "многоногов", а ещё лучше "n - ногов"), соприкасающихся щупальцами.

з)Теперь - суперпример того, что в пространстве можно то, чего нельзя на плоскости. Это знаменитый парадокс Банаха - Тарского. Из него следует (в свободной формулировке), что шар можно перекроить в шар другого радиуса (для плоскости соответствующее утверждение не является верным). Из него - в шутливой редакции - следует, что арбуз можно превратить в больший арбуз. Ученики тут же спрашивают - а как? И вот тут есть ещё один повод поговорить о существовании в математике и двух видах его доказательства. О доказательстве конструктивном, за которым стоит некий алгоритм для появления нужного объекта, и доказательстве "экзистенциальном", когда существование заключается в непротиворечивости того, что утверждается, принятой системе аксиом. Парадокс Банаха - Тарского как раз парадокс "экзистенциального" существования, а потому реально воплотить его результат невозможно. Восхищает в нём даже не только сам факт, но то, что он пришёл кому-то в голову. Тут же вспоминаются слова Д. Гильберта об одном из своих учеников, который бросил математику и стал поэтом - " Для занятий математикой у него не хватило воображения."

и) Пропорция $a / b = c / d$ равносильна равенству $ad = bc$ (при отсутствии нулей). Однако для векторов и их скалярного произведения этой равносильности нет, есть только следование:
$\frac{\vec a}{\vec b} = \frac{\vec c}{\vec d} \Rightarrow \vec a \cdot \vec d = \vec b \cdot \vec c$.

к) Около невыпуклого многоугольника нельзя описать окружность. Но существует невыпуклый многогранник, около которого можно описать сферу. Таким, к примеру, является многогранник, являющийся объединением двух тетраэдров с общей гранью, причем их общая грань вписана в одно из сечений сферы

5. *Ошибки при обобщениях*

а) $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (- 1) = -1$, $i^6 = (i^4)^{1,5} = 1^{1,5} = 1$. Из этих двух равенств выходит, что – 1 = 1.

На комплексные числа перенесены свойства степеней, известные для действительных чисел.

б) Докажем, что комплексную дробь можно сокращать, т. е.

$$\frac{z_1 z}{z_2 z} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z}{z} = \frac{z_1}{z_2} \cdot 1 = \frac{z_1}{z_2}.$$

Первый знак равенства требует обоснования, так как он «взят» из действий над действительными числами.

в) «Докажем», что $i < 0$. Пусть $i > 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$, что неверно.

Пусть $i = 0 ==> i^2 = 0 \Rightarrow -1 = 0$, что неверно. Остается: $i < 0$.

На комплексные числа перенесены свойства вещественных числовых неравенств.

г) «Докажем», что 0,999... = 1. Пусть 0,999... = a. Тогда 9,99... = $10a$. Вычитая, получим $9a = 9$, откуда $a = 1$.

С бесконечными десятичными дробями мы действуем как с конечными.

(А один мой знакомый рассуждал здесь так:

0,9 отличается от 1 на 0,1.

0,99 отличается от 1 на 0,01.

0,999 отличается от 1 на 0,001

0,999... отличается от 1 на $\frac{1}{\infty}$, т.е. на 0. Поэтому 0,999... = 1.

Этому знакомому было 10 лет.)

д) Теорема об углах с взаимно перпендикулярными сторонами в пространстве неверна.

6. *Ошибки, допущенные интуицией.*

Есть очень много примеров, когда результат либо идея решения интуитивно ясны. Один очень красивый пример связан с формулой для объёма тора. Пусть круг радиуса a вращается вокруг прямой и центр этого круга удален от этой прямой на расстояние b ($b>a$). Умножим площадь круга πa^2 на путь, пройденный центром за один оборот $2\pi b$, и получим объём, И что я должен был сказать, получив от ученика такое решение?

Увы, не всегда интуиция работает так блестяще. В книгах М. Клайна, Б. Гелбаума и Дж. Олмстеда (анализ), Л. Млодинова (теория вероятностей), Г. Штейнгауза, В. Босса, и М. Гарднера приведено много примеров, когда интуиция подводит.

Вот пример, который я бы назвал классическим.

а) Мне ещё не довелось встретить школьника, который не был бы уверен поначалу в том, что наибольшее по площади треугольное сечение конуса (прямого кругового) осевое. И не только школьники, но даже и специалисты-геометры попадались на этом. На самом же деле такой результат верен не всегда, а только в том случае, когда осевым сечением конуса является остроугольный или прямоугольный треугольник. Если же оно является тупоугольным треугольником, то искомым сечением является такое, которое представляет собой прямоугольный треугольник. Верный ответ моментально следует из формулы $S = 0{,}5\,L^2\sin\varphi$, где S—площадь треугольного сечения, L — длина образующей поверхности конуса, φ — угол между двумя такими образующими.

б) Ещё пример. Предположим, мы хотим найти наибольший круг, вписанный в равнобедренный треугольник с фиксированной боковой стороной. Вполне может показаться, что такой круг мы получим тогда, когда площадь равнобедренного треугольника будет наибольшей (т. е. в прямоугольном равнобедренном треугольнике) — в нём «будет больше места». Однако, как показывают выкладки, это не так.

в) Аналогичный пример — когда мы ищем цилиндр с наибольшим объёмом, вписанный в конус, образующая поверхности которого фиксирована.

Мне удалось заметить, что интуиция неплохо чувствует, если так можно выразиться, непрерывность и линейность. В случае нелинейных зависимостей интуиция учеников, как правило, не срабатывает.

К тому же интуиция может и подвести. Это особенно заметно в задачах, связанных с работой пространственного воображения, задачах на подсчёт вероятностей и в задачах о бесконечных множествах. Приведу известные и очень выразительные тому примеры.

г)Распадётся ли лист Мёбиуса, если разрезать его по средней линии? Кто "увидит", что он не распадётся? Как пишут Р. Курант и Г. Роббинс в упомянутой книге:" Тому, кто не упражнялся с лентой Мёбиуса, трудно предсказать это обстоятельство, столь противоречащее нашим интуитивным представлениям о том, что "должно" случиться" .

(Далее они добавляют:"Поверхность Мёбиуса, без сомнения, заслуживает упоминания и в школьном курсе.")

д) Пример из вероятностных задач. Что вероятнее при игре в шахматы с равносильным партнером: выиграть 3 партии из 4 или выиграть 5 партий из 8 (ничьи - не в счет)? Напрашивается второй ответ, но он не является верным. Чтобы убедиться в этом достаточно построить дерево возможных исходов и сравнить результаты подсчёта.

е) Пример тоже про вероятность. Предположим, вы готовы держать пари, что в классе найдутся два ученика, родившиеся в один день. Будет ли это пари честным? Истинный ответ для более или менее реального класса в 30 человек - нет. Вероятность совпадения дней рождения в этом случае примерно 0,7. Честное пари, соответствующее вероятности 1/2, будет если в классе 23 ученика.

ж) Пример опять про вероятность. Кажется естественным, что отношение " вероятнее " (событие *A* вероятнее, чем событие *B* ") является транзитивным. Однако известен контрпример тому, именно: *A* вероятнее *B*, *B* вероятнее *C*, *C* вероятнее *D*, а *D* вероятнее *A* - этот пример приводит В. Босс. Этот удивительный пример такой. Имеется четыре игральных кубика. На гранях кубика А шестёрка чисел такова: 6,6,2,2,2,2. На гранях кубика В шестёрка чисел такова: 5,5,5,1,1,1. На гранях кубика С шестёрка чисел такова: 4,4,4,4,0,0. На гранях кубика D шестёрка чисел такова: 3,3,3,3,3,3. При бросании костей выигрывает тот кубик, у которого выпала большая цифра. При подсчете оказывается, что каждый кубик выиграет у следующего с вероятностью 2/3 : *A* у *B*, *B* у *C*, *C* у *D*. Но не *A* у *D*, а *D* у *A*! В чём же дело? А в том, что эти "люди-буквы" играют в разные игры!

з) фантастическая ситуация из "жизни" бесконечных множеств. Рассматриваются все рациональные числа в интервале (0,1) . Покроем каждое рациональное число a/b , где a и b взаимно просты, интервалом длиной 1/ ($2b^2$), в центре которого выбранное число. Казалось бы, все бесконечное семейство построенных интервалов (к тому же с бесконечной суммой длин) должно покрыть весь интервал. То есть любое в нём число. Ан нет! Несложно (доступно для старшеклассника) показать, что число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ останется не покрытым.

и) Если есть возможность рассказать о фракталах, в частности, «салфетке Серпинского», то это стоит сделать. В этом примере показана фигура, имеющая конечную площадь и бесконечную длину границы.

Неверный выбор модели.

Мне очень нравится пример о дате «конца света», и я стараюсь рассказать его ученикам при завершении обучения.

Итак, «конец света» наступит 13 .XI.2026 года. «Доказательство». Пусть $x(t)$ — число людей в момент t, x_1 — число мужчин, x_2 — число женщин. Сделаем предположение о том, что $x'(t) = k\, x_1 x_2$.

Так как $x_1 \approx x_2 \approx 0{,}5x$, то $x'(t) = k\,\frac{x^2}{4}$.

Отсюда получаем

$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{4}x^2$ или $\frac{dx}{x^2} = \frac{k}{4}dt$. Проинтегрируем это равенство на промежутке $[t_0, t]$, где t_0 — исходный момент времени. Получим

$$\int_{x_0}^{x_t}\frac{dx}{x^2} = \frac{k}{4}\int_{t_0}^{t}dt \Rightarrow -\frac{1}{x}\Bigg|_{x_0}^{x_t} = \frac{k}{4}(t-t_0) \Rightarrow -\left(\frac{1}{x_t}-\frac{1}{x_0}\right) = \frac{k}{4}(t-t_0) \Rightarrow x_t = \frac{1}{\frac{1}{x_0}-\frac{k}{4}(t-t_0)}.$$

Приравняем знаменатель полученного выражения к нулю и найдем отсюда $t = \frac{4}{kx_0}+t_0$.

А это означает, что в полученный момент t само выражение, т. е. число людей на Земле, обратится в бесконечность. Яблоку упасть будет некуда, а наступит такой момент, как говорят, в указанный выше срок.

Обычно ученики полностью обескуражены и только глазами хлопают. Но потом начинают задавать вопросы и потихоньку докапываются до разумных объяснений полученному результату.

Как я уже говорил, не всё из этого списка стоит считать ошибками, скорее заблуждениями по причине аналогий, обобщений, интуитивных предположений. Но для меня гораздо важнее, чтобы дети не уставали ими пользоваться и не тушевались от своих неудач в их применении. Казалось бы, какая разница: ошибки ли, заблуждения ли, всё одно — неверно. Но не так всё просто в практическом плане. За ошибку можно и снизить отметку, а при заблуждении вроде бы и не за что.

Несколько слов в заключение. Ко всему прочему, все эти «ошибки», софизмы, парадоксы придают урокам очевидную эмоциональную окраску. С той же целью могут быть использованы числовые фокусы — они хорошо известны. Как-то я целый год, по крайней мере раз в неделю, показывал (в курсе алгебры) очередной числовой фокус, после чего шло его обсуждение — почему и как получаются задуманные числа и дни рождения. А если ещё предложить детям проделать такой же фокус с домашними — эффект грандиозный. Хороши с этой же целью всякого рода розыгрыши. Вот **примеры** последних:

1. Можно ли «сократить» дробь $\frac{19}{95}$ просто зачеркнув цифру 9 в числителе и знаменателе?
2. Что произойдет, когда будет 0°? (Таяние льда.)
3. Найдите $\int \frac{dx}{dx}$ при $x>0$. (Ответ: $(1/d)\ln x + C$.
4. Решите уравнение ($\sin 2x$) / ($\sin x$) = 5.

(Сокращаем все буквы в числителе и знаменателе. Получим равенство 2 = 5. Оказывается, что уравнение не имеет решения, что верно.)

5. В какой день недели $2^2 = 10$? (В любой — в четверичной системе счисления.)

6. «Докажем» характерное свойство арифметической прогрессии (a_n): $a_n = 0,5(a_{n-1} + a_{n+1})$ — сокращением в обеих частях равенства на a.

7. Ребус на ассоциативное мышление. (Я придумал его много лет назад, но до сих пор его разгадал всего один человек – петербургский математик В. Залгаллер.)

Можно ли выпить дробь вида $\frac{+\,-}{\mathrm{O}}$? (В знаменателе дроби окружность с центром.)

8. Давным-давно известны числовые диковинки. Вот две из них:

а) Изобразите самое большое число тремя цифрами и знаками математических операций:

$$9^{9^9}$$

б) Изобразите тремя двойками и математическими символами любое натуральное число:

(Ответ: $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}$, где число радикалов – n)

А вот ещё одна

в) Используя 0 и математическую символику, изобразите сколь угодно большое число. Как?

((0! + 0! + 0!)!)!...! Число восклицательных знаков можно сделать любым.

9. Можно ли циркулем постоянного раствора провести:

а) окружности разных радиусов;

б) замкнутую линию, но не окружность?

10. «Докажем», что 0 = 1. Первый способ – шутливый. 0! = 1 и 1! = 1. Отсюда следует, что 0! = 1! «Сократив» на знак факториала, получим равенство 0 = 1.

Второй способ замысловатее. Занимаясь комплексными числами как парами вещественных, чисел, приходим к равенству 1 = (1,0).

С другой стороны, множество рациональных чисел также можно строить как множество пар целых чисел, а потому запись 1 = (1,1) также корректна. К этой же записи можно подойти как другой записи числовой дроби $\frac{1}{1}$, ибо не важно, как дробь записана, а важно, как производить обычные действия с такими числами.. И так как оба выражения (1,0) и (1,1) равны 1, то в силу транзитивности равенства, приходим к их равенству: (1,0) = (1,1). Определение равенства пар чисел равносильно равенству их соответствующих компонент, откуда и следует, что 0 = 1.

Третий способ использует производную. Имеем равенство $(x^2)' = 2x$. Подставим в него 1 вместо x. Получим $(1^2)' = 2$, откуда 0 = 2, а затем и 1 = 0.

И вспомним древних мудрецов. Конфуций: "Когда, совершив ошибку, не исправил её, это и называется совершить ошибку."

1У.2. ЧЕЛОВЕК КРИТИЧЕСКИЙ

Из опыта ясно, что критическая деятельность ученика (КД) со временем становится в каком-то смысле неотъемлемой частью его деятельности. Увидев на доске неверное решение, он тянет руку, чтобы поправить запись. Заметив разницу в рассказе учителя и в тексте книги, он задаёт вопрос: «А почему?» Заглянув в ответ, приведённый в учебнике, и увидев у себя нечто другое, он, возможно, начинает искать у себя ошибку. Итак, как-то КД идёт. Но как? Как её поощрять? Как её развивать? К чему здесь надо стремиться? Всё это, увы, не так уж и понятно.

То, что КД необычайно важна в познавательном процессе, можно прочитать в сочинениях учёных, в многочисленных работах дидактов, психологов, методистов. Вспомним знаменитое: «Подвергай все сомнению!» А. Пуанкаре заметил «...нужно знать, почему возникает сомнение». Отмечается благотворное влияние КД на личность: растёт ответственность, изменяется самооценка. Но в теоретических рассуждениях о КД мне не всё ясно. Обычно деятельность ученика делится на две части: репродуктивную и продуктивную. КД в общем случае относят к продуктивной деятельности. Я не вполне с этим согласен, ибо специфика КД — «разрушение», в то время как продуктивная деятельность созидательна. Не вполне ясно очерчено и содержание КД — обычно его сводят к контролю. А сопоставление разных точек зрения, а оценка чего-либо? По-моему, они тоже входят в КД. Если доказательство трактовать как своего рода проверку возникших предположений, то поиски доказательства можно отнести к критической деятельности. Мне более понятно выделение КД в некую самостоятельную деятельность ученика, не сводимую к прочим видам его деятельности.

Обучая школьника КД, я исхожу из следующего:

1) КД ученика имеет такое же право на внимание со стороны учителя, как другие виды его деятельности. В оценку деятельности школьника должна входить оценка его КД.

2) Конечный практический результат работы учителя в этом направлении— некий уровень умения ученика критически подойти к собственной работе.

3) Первоначально КД направлена на контроль и оценку работы другого человека: ученика, учителя, автора текста.

4) Система работы учителя в этом направлении включает в себя не только естественно возникающие ситуации, но и создание специальных условий, провоцирующих ученика на КД.

Я уже говорил о том, что КД в первую очередь направлена на то, чтобы избежать ошибок. Но поводом (основанием, «толчком» — не знаю, как сказать точнее) для КД может быть и многое другое: неясное объяснение учителя или в учебнике, сопоставление полученного результата с исходным условием, оценка качества решения, последовательности изложения, сравнение разных точек зрения. Можно сказать, что КД необходима для более глубокого понимания, например, доказательства. Почему оно такое? Почему, к примеру, теория площадей в планиметрии обошлась без интеграла, а теория объёмов в стереометрии - нет? Другой пример – почему такое странное определение умножения комплексных чисел (если комплексное число определяется как упорядоченная пара вещественных чисел) ? Некоторые формулы непонятно откуда взялись — нельзя ли было их предугадать (ту же теорему Пифагора)? Даже глобальный вопрос типа «А зачем нам нужен этот синус?» может свидетельствовать о критической деятельности ученика.

КД можно организовать в разных учебных ситуациях.

Начнём с КД по отношению к работе другого ученика. Естественно, она происходит, когда только что закончен чей-то ответ у доски. Причём лучше, если это был' ответ, средний по качеству. Обычно я даю отвечающему выговориться полностью, не перебивая его ни вопросом, ни подсказкой, даже если ответ путаный. Всем известна фраза, которой иногда отвечают на наши комментарии вызванные к доске: «А я так и хотел сказать, да только мне помешали!» «Ты всё сказал?» — задаю я вопрос выступавшему. И только после его «да» начинаю работать с классом, спрашиваю: «Какие у вас есть вопросы к выступавшему у доски?» Обычно в ответе или в решении есть места, которые требуют некоторого разъяснения. Когда таких мест не осталось, я задаю следующий вопрос классу: «У кого есть замечания по тому, что сказано (написано)?» Здесь можно говорить об ошибках, которые удалось заметить. И последний мой вопрос: «Кто хочет высказаться по поводу ответа в целом?» Здесь уже даётся некая оценка тому, что было сказано или написано, может быть оценена как идея решения, так и его качество, можно предлагать свои идеи. Возможны дискуссии и мой комментарий к ним. Обязательно надо отмечать удачные выступления учеников, даже просто толковые вопросы. На приведённой триаде моих вопросов к ученикам приходится задерживать внимание, фиксировать её в их сознании, так как дети вначале плохо понимают, что же они хотят сказать по выслушанному ответу. Чаще всего от них слышишь: «А я не понял!» И всё. Свой вопрос они не могут верно сформулировать, а отвечавший, вряд ли поняв, о чём его спрашивают, тут же начинает говорить неизвестно что. «Ты понял вопрос?» — спрашиваю я у него. «Нет»,— частенько слышу в ответ. «А тогда зачем отвечаешь?» Долго приходится ждать, пока школьник начинает говорить: «Я не понял вопроса».

Думаю, что ученик во время ответа имеет право на ошибку, тем более на заблуждение. Если класс своими вопросами помог ему поправить свой ответ, то не снижаю его отметку. Возможен даже такой вариант. Говорю ученикам : «Если вы зададите ему такие вопросы, ответив на которые он поправит свою работу, то отметка ему снижена не будет. А если не зададите таких вопросов, то я начну их задавать, а потом могу и снизить отметку. Так помогите человеку у доски своими вопросами». И ведь помогают!

Гораздо строже, чем к отвечающему, отношусь ко всему классу. Во время чьего – либо ответа ученики обязаны настроиться на КД, готовить свои вопросы, замечания, выступления.

Общий итог всему сказанному в классе подводит учитель. Отметка за ответ выставляется с учётом реакции ученика на вопросы и участие в дальнейшем обсуждении. Очень важно, что все вопросы и. замечания с места не приводят к снижению отметки, а скорее, наоборот, дают некий дополнительный шанс выступавшему. Вместе с тем отмечается успешная КД с места.

Иногда ученики делают ошибки «гениальные», я даже благодарю их. Это те ошибки, которые класс не может заметить в принципе из-за нехватки знаний. О таких ошибках рассказываю сам, и ясно, что не снижаю за них отметки.

Приведу пример тому. На уроке геометрии обсуждается понятие расстояния, точнее, расстояния от точки до фигуры. С расстоянием от точки до прямой или до плоскости проблем нет - там работает перпендикуляр. Но как быть, если перпендикуляр не работает, например, если нужно найти расстояние от точки до круга? Начинаются разговоры о поиске точки круга, ближайшей к данной точке. Найти её несложно. Однако можно рассмотреть и такие фигуры, которые не имеют точки, ближайшей к данной точке . Например, возьмём тот же круг без его окружности, то есть внутренность данного круга. Сразу замечу, что ученики не всегда сразу же понимают, что такая фигура (открытый круг, "оскальпированный" круг) не имеет ближайшей точки; могут понадобиться дополнительные разъяснения тому. После чего спросим у них - ну, хорошо, ближайшей точки нет, а расстояние есть? (Реальный пример - расстояние до облака .) Практически все убеждены, что есть. Как же так - ближайшей точки нет, а расстояние есть?

Привожу совсем простой пример. На числовой оси выделим промежуток [0,1) и спросим : чему равно расстояние от точки оси с абсциссой 2 до этого промежутка? Ответ последует незамедлительно - расстояние равно 1. Этот ответ - и ошибка, и нет. Ошибка потому, что в определении расстояния до фигуры фигурирует ближайшая точка, а в данном случае ее нет. Нет ближайшей точки - нет и расстояния. Не ошибка потому, что в самой математике расстояние определяется и в этом случае, а кроме того доказывается его существование - но тут потребуется разговор, аналогичный теореме Вейерштрасса о достижении наименьшего значения.

Далее возможен и другой приём работы в том же направлении. После ответа ученика кому-либо предлагается выступить об услышанном полностью: задать вопросы, сделать замечания и оценить работу в целом. Если такое выступление было достаточно содержательным, то за него ставится отметка. Когда ученики привыкают к такого рода «оппонированию», то за него может выставляться и низкая отметка - в том случае, если оппонент не смог ничего сказать толком (а сказать было что). Зная, что каждый может быть вызван на «оппонирование», ученик за партой становится куда более внимательным к услышанному ответу . Бывает, что выступление оппонента само нуждается в замечании или открывает некую совсем не запланированную дискуссию. Дело учителя — привести всё это «к общему знаменателю».

Формы «оппонирования» можно варьировать. Можно, например, предложить «оппонирование» одного ответа нескольким ученикам или «оппонирование» нескольких ответов одному ученику. Ещё раз подчеркну - оценивается учителем не только сам ответ, но и его «оппонирование».

До сих пор я вёл речь об организации КД в процессе устной работы в классе. Не менее важна организация КД в связи с письменной работой, текстом.

Преследуя разнообразные учебные цели, я в первые же годы своей работы стал предлагать учащимся так называемые недельные задания, т. е. задания с недельным сроком исполнения. (Сперва задания были месячными, – по задачнику П. Моденова – некоторые из решений, полученных тогда учениками, храню до сих пор.) Вначале я проверял их сам, потом эту работу начинали выполнять ученики. Они разбиваются на фиксированные пары, и каждый ученик проверяет только работу напарника. Проверяющий должен так или иначе прокомментировать все замеченные им ошибки и выставить «отметку». Обычно в недельном задании пять задач, и эта «отметка» — просто число задач, которые засчитаны проверяющим как решённые. (Эти «отметки» фиксируются в специальной тетради и учитываются при выставлении четвертных или полугодовых отметок.) Желательно в каждом недельном задании выборочно проверить работу хотя бы одной пары, как решения, так и комментарий к ошибкам, а затем оценить работу этой пары публично. Ученик имеет право обжаловать полученную «отметку», и тогда решающее слово принадлежит учителю.

Приведённые формы работы с учениками направлены в первую очередь на «борьбу» с ошибками. Поиск ошибки отнюдь не простая работа. Надо знать, что искать, где искать и как искать. Позволю себе повториться, но для обучения такому виду КД, необходим показ ошибок и их осмысление. И «оппонирование», и комментирование ошибок важны в КД ученика, но частенько зависят от случая. Более целенаправленно можно управлять КД ученика в процессе преподавания. Я могу в своём рассказе «допустить» именно те ошибки, на которые хочу обратить внимание детей, могу расставить именно такие «ловушки», в которые, вероятнее всего, они угодят. Некоторые примеры такой работы я приводил ранее. Приведу ещё. Добавлю при этом, что ученики наши бывают чересчур доверчивы к тому, что им говорят с «амвона», т. е. за учительским столом. От такой доверчивости рождается невнимательность, порой безразличие. А мы всё рассказываем, всё диктуем что-то. И они пишут, пишут, и подумать им совсем некогда. Кто-то однажды рассказал, как студенты, одержимые мыслью не упустить из лекции ничего, строчили в своих тетрадях под диктовку: «Электроны бывают зелёные, жёлтые и синие...» (Лектор ставил некий мини-эксперимент.) И сколько таких «жёлтых электронов» записано в детских тетрадях? Мне во время своего рассказа нужно не показное их внимание, а подлинная работа мысли. Установка на КД многому в этом способствует. Итак, что же я могу сделать?

1. «Доказать» неверное утверждение.

а) Найдём интеграл на таком промежутке, где подынтегральная функция имеет разрыв:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -2.$$

б) Плоские углы α,β,γ трёхгранного угла связаны между собой зависимостью $\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma$.

На рёбрах этого трёхгранного угла отложим от вершины три единичных вектора: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — при том, что $\angle \vec{a}\,\vec{b} = \gamma$, $\angle \vec{b}\,\vec{c} = \alpha$, $\angle \vec{a}\,\vec{c} = \beta$. Запишем скалярные произведения этих векторов:

$\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos\gamma$ (1)

$\vec{b}\,\vec{c} = bc\cos\alpha$ (2)

$\vec{c}\,\vec{a} = ca\cos\beta$ (3).

Перемножим теперь равенства (1) и (2) и получим $(\vec{a}\,\vec{b})(\vec{b}\,\vec{c}) = ab^2c\cos\gamma\cos\alpha$..

«Отсюда» $\vec{b}^{\,2}\,(\vec{a}\,\vec{c}) = ab^2c\cos\gamma\cos\alpha$. И так как все векторы единичные, то $\cos\beta = \cos\alpha\cos\gamma$, что и требовалось доказать.

Если об отсутствии ассоциативности скалярного умножения раньше речи не было, то ученики и глазом не моргнут. А полученное равенство обведут в рамочку. После чего предлагаешь им перемножить равенства (2) и (3), а затем равенства (1) и (3). Прекрасно, они опять же записывают и обводят. Вот они, «жёлтые электроны». Тогда я предлагаю им перемножить все три полученных выражения для косинусов. И получается вот что: $(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)^2 = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

И только тут они начинают задумываться над происходящим.

Здесь уместно будет сказать несколько слов об ассоциативности. Именно в ней, в её выполнении, проявляется возможность такой записи: $a \cdot b \cdot c$ или просто abc, когда речь идёт о перемножении трёх сомножителей. На самом деле умножение — операция бинарная, а потому надо бы записывать это произведение так: $(a \cdot b) \cdot c$ или так: $a \cdot (b \cdot c)$. Ассоциативность операции умножения позволяет нам вообще не ставить скобок — как ни расставляй, результат будет один и тот же.

Тут же контрпример — не все операции такие «хорошие», как умножение. Например, деление или возведение в сверхстепень ассоциативностью не обладает. Поэтому запись 8 : 4: 2 или 9^{9^9} не является, вообще говоря, корректной. И впрямь $(8 : 4) : 2 \neq 8 : (4 : 2)$, также и второе из приведённых выражений существенно зависит от порядка расстановки скобок. В записях с неассоциативными операциями скобки необходимы!

Однако на практике мы можем встретить и запись типа 8 : 4 : 2, и выражение 9^{9^9} без всяких скобок. Как же так? («Если нельзя, но очень хочется, то можно!») Просто для таких записей есть специальные (и противоположные!) договорённости о том, как их трактовать. Первую из них условились понимать последовательно от начала к концу, т. е. как (8 : 4) : 2, а вторую — от конца к началу, т. е. как $9^{(9^9)}$. Кроме того, запись типа 8 : 4 : 2 трактуется иногда как обозначение пропорционального деления — в теореме синусов, в задачах на сплавы или растворы.

Здесь же замечу нечто странное. Именно Если переписать выражение 8 : 4 : 2 как $8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5$, то пожалуйста – ассоциативность выполняется. Всё дело в знаке?/

Различие выражений 8 : 4 : 2 $8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5$ можно прояснить и до того, как будет проведена проверка на ассоциативность. В общем виде выражение $a : (b : c)$ приводится к виду $ab^{-1}c$, а выражение $(a : b) : c$ приводится к виду $ab^{-1}c^{-1}$. Разница – в последнем сомножителе.

в) Производит впечатление известное «рассуждение», подчёркивающее важность существования объекта, о котором идет речь.

Для каждого натурального n верно неравенство $n^2 \geq n$. Найдём теперь наибольшее натуральное число. Обозначим его N. Для числа N не может выполняться условие $N^2>N$—ведь согласно предположению N — самое большое. Значит, с необходимостью выполняется равенство $N^2=N$. Единственным натуральным числом, для которого выполняется такое равенство, является число 1. То есть наибольшим натуральным числом является 1.

г) «Докажем», что любые два не коллинеарных вектора равны.

Пусть векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны. Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{c}$, Тогда $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$. Сократим на $\vec{a}$ и получим, что $\vec{b} = \vec{c}$.

2. Получить верный результат, однако с ошибкой.

а) Можно «вывести» формул объёма прямого кругового цилиндра с помощью интеграла. (Но при построении теории использование интеграла для вычисления объёмов основывается на формуле объёма такого цилиндра.)

б) При решении неравенства

$$|x-1| > x \Leftrightarrow (x-1)^2 > x^2 \Leftrightarrow -2x+1 > 0 \Leftrightarrow x < 0{,}5$$

ответ верен, а равносильности нарушены.

3. Рассуждение может содержать некоторые пробелы, которые надо восполнить.

а) Решаем неравенство с параметром $ax^2 + x+1>0$ и упускаем случай, когда $a = 0$.

б) Находим объём конуса, вписанного в шар, и работаем в молчаливом предположении, что центр шара лежит внутри конуса.

4. Хорошим «толчком» для развития КД является появление разных ответов: чем больше ответов, тем интереснее, что будет дальше. Разумеется, попытки голосовать или ссылки на авторитет лучших «математиков» бессмысленны. Бывает, что ответы только внешне различны.

а) Например, мы решаем уравнение $\sin x - \cos x = 0$. Один способ — решать его как однородное, а другой — через тангенс половинного угла. Нужна некая работа, чтобы убедиться в идентичности полученных результатов.

б) Вот ещё пример.

Пусть в треугольнике ABC $11 \leq a \leq 13$, $14 \leq b \leq 17$. В каких границах лежит периметр P треугольника? Естественно оценить третью сторону c. Одна оценка такова: $1 \leq c \leq 30$. Тогда $26 \leq P \leq 60$. Возможна и такая оценка c: $6 \leq c \leq 25$. Тогда $31 \leq P \leq 55$. Где же истина?

5. Работа с определением. Иногда имеет смысл давать его не сразу же в окончательном виде. Очень полезно для КД, когда в результате беседы с учителем класс как бы подбирается к нужному определению, отвергая неприемлемые варианты. Такую работу можно вести, давая определения, скажем, периодической функции, касательной к кривой, многогранника, геометрического тела. Любопытен пример с определением прямого параллелепипеда. Стандартное определение: «Прямой параллелепипед — это такой параллелепипед, у которого боковое ребро перпендикулярно основанию» — вроде бы не внушает опасений. Тогда я беру спичечный коробок, (без содержимого), ставлю его самой маленькой гранью на стол, затем смещаю заднюю грань относительно передней — параллелепипед из прямоугольного становится прямым. Далее я поворачиваю коробок и ставлю его на стол «рабочей» гранью. Основание находится на столе, и боковое ребро ему уже не перпендикулярно. Так какой параллелепипед перед нами? И нужно ли в связи с этой историей менять определение прямого параллелепипеда?

Работа по созданию определения может быть достаточно содержательной. Известно понятие «кучности» стрельбы. Так вот, как можно определить «кучность»? И ведь в книжку за ответом не полезешь.

Вот пример поближе к математике: что такое " форма фигуры"? Ответ не слишком прост и аналогичен, как я полагаю, такому понятию, как " направление луча" . Форма фигуры - это то общее, что есть у всех подобных между собой фигур. Подробнее: определяем, что значит фраза "две фигуры имеют одинаковую форму", проверяем отношение "одинаковости формы" на эквивалентность, далее создаём классы эквивалентности, тогда "форма фигуры" - это множество фигур одного и того же класса эквивалентности. Разумеется, ученикам можно сказать попроще: две фигуры имеют одинаковую форму, если они подобны; само же понятие формы не определять вовсе.

И ещё. Работая с определением, можно фантазировать: например, вспомнили с учениками по случаю определение равнобедренного треугольника. А какой треугольник называется «неравнобедренным»? А какой треугольник будет «самым неравнобедренным»?

6. Оценивая доказательство теоремы или решение задачи, важно приучать школьника думать о каждом её условии, устанавливать его необходимость не только для доказательства, но и для справедливости самого утверждения. Вот примеры:

а) В некоторых теоремах анализа функции дифференцируемы внутри промежутка — области определения и непрерывны на концах этого промежутка. Почему не задать сразу же дифференцируемость на всем исходном промежутке?

б) В известной теореме о сумме плоских углов при вершине многогранного угла обычно в условии говорится о его выпуклости. Зачем она понадобилась, если в доказательстве о ней не упоминается?

Такая работа может проводиться достаточно последовательно, если регулярно предлагать задачи с недостающими или избыточными условиями. Например: «Числа $a + b$, $a - b$ и $a \cdot b$ являются рациональными. Будет ли рациональным числом разность квадратов чисел a и b? А разность кубов?»

Или ещё пример: «О числе a известно следующее:
1) $a^2>4$; 2) $2a = 6$; 3) $(1/a) < a$. Из каких двух утверждений следует третье?» Добавлю, что избыточные условия в математической задаче встречаются куда чаще, чем мы думаем. Многие задачи о фигурах можно сформулировать как задачи об их частях.

7. Некоторую роль в формировании КД играют формулировки задач. Императивные задания типа «доказать», «вычислить», «найти» выглядят хуже, чем вопрос: «Верно ли, что...?» При ответе на него предполагается некая гипотеза, которая необязательно должна быть верной.

8. Проверяя письменную работу ученика, я часто выставляю только пометки, указывающие, верно решен пример или нет. Если ученик может сам найти ошибки в своей работе, то одно из двух: либо можно повысить ему первоначальную отметку, либо наряду с первоначальной выставить ему отметку за хорошую работу над ошибками.

9. Возьмём часто встречающуюся на практике ситуацию. В классе решается достаточно содержательная задача. Предположим, у нескольких учеников возникли идеи её решения. Как мне быть, если я понимаю, что некоторые из этих идей тупиковые или попросту неверные? Отвергать собственным «волевым» решением? Но тогда может нарушиться едва возникшая атмосфера поиска. Да и опровержения могут быть непростыми, а как это все объяснить детям, не расстраивая их? Я делаю вот что. Говорю, что у нас есть несколько идей, поди знай, какая из них верна. Мы попробуем их опровергнуть. Если удастся, то список идей уменьшается, а если нет — ничего не поделаешь, надо «испить» его до конца. И жаль времени, но что поделаешь.

10. Ученики работают самостоятельно. Расхаживая по классу, можно интересоваться не только тем, кто что сделал, но и тем, какие ошибки допущены детьми. Самые поучительные из них выпишем на доску — в конце урока будет о чём поговорить.

Я уже не говорю о неповторимости того, что можно услышать от детей, когда они находятся в процессе сотворчества. Вот несколько примеров:
а) Что остается в правой части уравнения $2x + 5 = x$ после переноса x налево?

— Ничего.

б)Что будет, если из 2*a* вычесть *a*?

- 2.

в) Что будет, если нуль разделить на 2?

- Половина нуля.

г) Можно ли сказать, что усечённый конус — это конус?

— Нет, но он был конусом.

д)«Выносительный закон» — это о дистрибутивности.

е) «Выпуклый многоугольник тот, у которого углы торчат наружу».

ж) «Квадрат — это прямоугольный ромб».

з) «Ломаная — это когда отрезки идут под градусом».

и) Рассказываю семиклассникам, что древние греки не знали числа «нуль». И вопрошаю: «Как же они обходились без нуля?» Ответ: «А у них всё было».

к) Однажды мне заявили (дело было в вечерней школе, и ученица 8 класса выглядела как взрослая дама), что при делении 25 на 4 получается 51, и продемонстрировала такую запись:

	2	5		4
-	2	0	5	1
		5		
	-	4		
		1		

л) Встречалось и такое рассуждение: $\frac{10}{13} > \frac{1}{2}$, так как 10 > 1 и 13 > 2.

Школьники должны в итоге понимать, что ошибки в работе — «дело житейское», а КД важна и серьёзна. И в реализации её не должно быть предвзятости и личных обид. Ученик, отвечавший у доски, получил сниженную оценку не потому, что кто-то заметил его ошибки, а потому, что это ошибки. В формировании такого отношения учеников очень важен личный пример. Поэтому если кто-то заметил неточность, недоговорённость или неполноту в моём рассказе, тем более ошибку, то естественно поблагодарить, похвалить за это, а в нетривиальных случаях выставить и отличную оценку. Я всегда акцентирую такой момент. «Дети,— говорю я им.— Обязательно запоминайте, где я ошибся и почему. Все ошибаются, и учителя тоже, но дело в том, что я понимаю, где ошибка наиболее вероятна, и умею её находить». Обязательно комментирую им свои ошибки. Две из них наиболее памятны мне. Однажды я «доказал» в классе теорему косинуса со знаком «плюс» вместо «минус» в соответствующем месте— было такое минутное затмение с углом между векторами. (Потом я стал делать это регулярно и предлагал классу найти ошибку.) Другой пример похитрее. Как-то не хотелось доказывать существование перпендикуляра из точки на плоскость традиционным способом. И я придумал вот что. Пусть есть точка *A* и плоскость α, на которую надо провести из *A* перпендикуляр. Проводим любую прямую *a* на плоскости α , затем из *A* проводим перпендикуляр на эту прямую. Через конец построенного перпендикуляра проведём в плоскости α к прямой *a* прямую *b*, ей перпендикулярную. Затем из *A* проводим перпендикуляр на *b*. Он-то и будет искомым перпендикуляром на плоскость α . Действительно будет, это несложно доказать, причём даже без признака перпендикулярности прямой и плоскости. Но радовался я рано. Дело в том, что перпендикуляр из *A* на прямую *a* может совпасть с перпендикуляром из *A* на прямую *b*. Если это учесть, то доказательство становится куда более громоздким. Но дело не в этом, а в том, что я поначалу не увидел такой возможности совпадения – такая была эйфория от найденного построения.

Я уже не говорю о собственных импровизациях на уроке при попытке решать задачи, которые предлагают дети. Тут заносит иногда так далеко и в сторону... И они видят, что идеи, пришедшие в голову, вовсе не обязаны быть безупречными и даже верными.

КД может проявлять себя и в работе с учебной книгой. Перечислю то, что в книге является основанием для КД.

1) Понятия без определения.
2) Немотивированные определения.
3) Определения, данные в контексте и не выделенные.
4) Отсутствие мотивировок в рассуждениях — почему доказательство именно такое?
5) Неясно, что доказывается и зачем.
6) Неясно, почему одно утверждение доказано, а другое нет.
7) Неясные рассуждения.
8) Пропуски в доказательствах.
9) Неверные ссылки.
10) Ошибки.
11) Опечатки.
12) Утверждения без доказательства и без указания об этом.
13) Неточная терминология.
14) Неудачный способ изложения.
15) Чрезмерная общность в первоначальной подаче учебного материала.

Наверняка этот список можно продолжить. Каждый из его пунктов я мог бы сопроводить не одним примером, причём многие из них были найдены учениками. Некоторые из этих пунктов не должны вызывать резкой реакции, опечатки, например. Известно: «Британская энциклопудия». Недавно мне попались на глаза «обратные тригонометрические уравнения». В других случаях требуется осмысление. Скажите себе: ладно, написана чушь, но что хотел сказать автор? Маловероятной кажется ошибка в математическом тексте книги. Однако бывают и они —вот несколько примеров.

1) Можно вспомнить неверное определение призмы в учебнике А.Киселёва. Согласно ему, призмой оказывается, например, объединение двух наклонных параллелепипедов с общим основанием (нижним у одного и верхним у другого) , но «смотрящих в разные стороны». Любопытно, что эта ошибка повторяется и в более поздних учебниках.

2) В книге В. Шаталова приведена для заучивания формула $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$. Но без условия $x \geq 0$ она попросту неверна, о чём автор умалчивает .

3) Н. Васютинский, говоря в своей книге о египетских пирамидах, пишет следующее «Методической ошибкой многих исследователей является то, что они использовали размеры пирамид, выраженные в метрической системе мер. Но ведь египтяне пользовались другой системой мер! Из этой системы и следует исходить при анализе размерных отношений в пирамидах».

Обратим внимание на то, что автор говорит именно о размерных отношениях, как то отношение апофемы к высоте и т. п. Но ведь с ранних лет ученичества известно, что отношение величин не зависит от выбора единицы измерения!

4) В пособии для учителей (авторы В. Гусев, Ю. Колягин, Л. Луканкин) мне встретилось доказательство (!) теоремы:

«Пусть A_1, A_2, A_3 — неколлинеарные точки, M— четвёртая точка, а Q — произвольная точка плоскости. Если

$$\vec{QM} = \alpha_1 \vec{QA_1} + \beta_1 \vec{QA_2} + \gamma_1 \vec{QA_3} \text{ и}$$

$$\vec{QM} = \alpha_2 \vec{QA_1} + \beta_2 \vec{QA_2} + \gamma_2 \vec{QA_3}, \text{ то } \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_{12}, \gamma_1 = \gamma_2».$$

Ясно, что это утверждение неверно — единственность разложения вектора по другим векторам выполняется, когда мы раскладываем данный вектор по векторам базиса, в случае плоскости — по двум неколлинеарным векторам, а в приведённой «теореме» разложение идет по трём векторам.

«Ищите ошибки там, где автор пишет «очевидно»,— говорю я. И вот ещё примеры.

5) В статье «Необходимые условия и задачи с параметрами» (Квант.— 1991.— № 11 .— С. 48) авторы сообщают: «Поскольку каждое достаточное условие является необходимым, но не каждое необходимое условие является достаточным, ясно, что...»

6) В превосходной популярной статье В. Арнольда, опубликованной в журнале «Квант» (1993.— № 1—2), читаем: «Но математики знают, что постоянно отрицательная производная (даже высокого порядка) в конце концов приведёт к отрицательности первой производной...»

Академик имел в виду что-то другое, ибо эта фраза опровергается хотя бы функцией $y = -1/x$ при $x>0$.

7) В одной из реально проведённых работ из серии «Готовимся к ЕГЭ» энергия, указанная электросчётчиком, записывалась составителями в квт/ ч – напрочь не соответствуя размерности этой величины.

8) «Рекорд» по этой части можно увидеть в учебнике математики для 6 класса Г. Дорофеева, И. Шарыгина (5-е издание вышло в 2000 году) — в этом учебнике пять изданий подряд повторяется, что Солнце находится в центре эллиптической орбиты Земли. Это достойно книги Гиннесса.

Не раз было - работая с учебником , я даже соревнование объявлял, кто найдёт больше опечаток и неточностей. В каком-то смысле такая работа необыкновенно полезна. В частности, «победитель» стал профессиональным математиком.

«Подвергай все сомнению» — очень точный принцип в системе КД. Не «сомневайся во всём», а именно подвергай и именно всё. Из истории человеческой мысли мы знаем, что самые революционные достижения в науке связаны с пересмотром её основных принципов, если угодно, аксиом. Иначе говоря, того, что казалось незыблемым.

Но можно ли в школе посягнуть на аксиомы? Я пробовал. Разумеется, не для того, чтобы их опровергнуть. Цель была совсем другая — показать ученикам, что ничего особенного в такой процедуре нет. В классе обсуждались аксиомы расстояния. Напомню их в подробной редакции.

1) Для любых точек A и B $|AB| \geq 0$ ($|AB|$ - обозначение расстояния между A и B).
2) Для любой точки A $|AA| = 0$.
3) Если $|AB| = 0$, то точки A и B совпадают.
4) Для любых точек A и B $|AB| = |BA|$.
5) Для любых точек A, B, C $|AB| + |BC| \geq |AC|$.

Перед учениками был поставлен вопрос: можно ли сократить список аксиом?

Кое-что получилось. Например, удалось вывести аксиому 1 из аксиомы 5. Возьмём в аксиоме 5 $C=A$. Получим $|AB| + |BA| \geq |AA|$. Но $|AB| = |BA|$ и $|AA| = 0$. Значит, $2|AA| \geq 0$, откуда и получаем, что $|AB| \geq 0$.

Возможно другое доказательство того же. Пусть есть такая пара точек A и B, что $|AB| <0$. Но тогда и $|BA| <0$. Опять в аксиоме 5 положим $C = A$. Слева получится сумма $|AB| + |BA|$, которая для взятых точек меньше нуля, а - справа будет стоять $|AA|$, равное нулю. Из получившегося противоречия выходит, что такой пары точек нет. Значит, для любой пары точек получаем, что расстояние между ними неотрицательно.

Поток дальнейших усовершенствований списка аксиом расстояния продолжался, всё выводилось чуть ли не из одной аксиомы, и класс быстро оказался перед другой проблемой: как опровергнуть усовершенствователей? А доказательства были любопытные. Вот, например, как было «доказано», что $|AB| \geq 0$. Возьмем точку X, такую, что $|XA| = |XB|$. Из аксиомы 5 запишем:
$|XA| + |AB| \geq |XB|$.Но $|XA| = |XB|$. Значит, $|XA| + |AB| \geq |XA|$, откуда и следует, что $|AB| \geq 0$.

Или вот такое замысловатое доказательство аксиомы 5. Пусть она верна не для всех точек, и точки A, B, C как раз такие, что $|AB| + |BC| < |AC|$. Ну а для остальных точек неравенство треугольника верно, и, в частности, для любой другой точки X имеем $|AX| + |XC| \geq |AC|$. Пусть теперь точка X такова, что выполняется равенство $|AX| + |XB| = |AB|$. Согласно аксиоме 5 для любой другой тройки точек можем записать такое неравенство: $|XB| + |BC| \geq |XC|$. Сложив его с предыдущим неравенством для точки *X,* получим после упрощения такое: $|AX| + |XB| + |BC| \geq |AC|$. Отсюда, учитывая выбор точки *X,* получаем, что $|AB| + |BC| \geq |AC|$. Но это неравенство противоречит выбору точек *A, B, C.* Значит, наше предположение о существовании такой тройки точек неверно, и на самом деле аксиома 5 выполняется всегда.

После разбора этих доказательств стало ясно, что хотя посягать на основы и можно, но трудно.

Заканчивая обсуждение свойств расстояния, приведу один удивительный и даже несколько загадочный для меня отрывок из «Автобиографии» Б. Рассела:

«В то время общая теория относительности была ещё в новинку. И мы с Литтлвудом бесконечно её обсуждали. Мы, к примеру, спорили о том, является ли расстояние от нашего дома до почты таким же, как от почты до нашего дома, или же нет, и никогда не приходили к единому мнению» (Иностранная литература.— 2000 г. № 12).)

А вот ещё пример. В списке аксиом векторного пространства, есть такая "странная": $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. Разве это не "очевидно"? Но вывести её из остальных аксиом векторного пространства не получается, а необходимость её диктуется хотя бы равенством $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$. Как оно получается? Имеем: $\vec{a} + \vec{a} = 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{a} = (1 + 1)\,\vec{a} = 2\,\vec{a}$.

И каковы же результаты по обучению детей КД? Трудно говорить что-либо на доказательном уровне, как почти всегда, когда делишься всего только собственным опытом. Но кое-что всё же заметно.

Улучшается качество вопросов со стороны учеников. Бывали случаи, когда за вопрос я ставил в журнал отличную отметку. Я приведу только один пример. Ученица Вера Д. как-то спросила: «Тетраэдр и треугольная пирамида — одно и то же, так? А почему же тогда правильный тетраэдр и правильная треугольная пирамида — не одно и то же?» Я даже опешил вначале, мне и в голову не приходило задумываться о «такой ерунде». Кстати, ответ я придумал не сразу. Потом было очень приятно увидеть обсуждение этого вопроса в книге Х. Фрейденталя.

Дело в том, что тетраэдр и треугольная пирамида не совсем одно и то же. В тетраэдре все вершины равноправны, а в треугольной пирамиде одна из них как бы выделена (аналогично: треугольник и равнобедренный треугольник) . И, оказывается, эта тонкость проходила мимо моего внимания.

Другой случай. Работа с бесконечными пределами по сравнению с конечными основана на чуть иных определениях, а потому приходится заново доказывать теоремы о пределах. Вопрос был таков: не лучше ли – поинтересовались ученики - вместо бесконечно большой функции f рассматривать функцию $1/f$? Последняя является бесконечно малой, а вся техника работы с бесконечно малыми уже известна.

Точно так же переосмысливается после этого вопроса работа с пределами при $x \to \infty$. Замена переменной $t = 1/x$ сводит предел при $x \to \infty$ к пределу при $t \to 0$.

Некогда я прибегал к групповой форме решения задач. Приходилось быть свидетелем достаточно разумных дискуссий, разворачивающихся между учениками.

Но главное не это. Главное, по-моему, то, что у детей с течением времени проявляется потребность в самоконтроле.

«Подвергай все сомнению» означает, между прочим, что и к собственной деятельности надо подходить критически. Мало ли какие идеи приходят в голову! Их тоже надо уметь опровергать, оценивать.

Очень похоже на то, что без специальной работы учителя дети так и не будут иметь понятия о том, что любая своя работа требует проверки, о том, как её можно делать.

Всем учителям математики, разумеется, известна такая картина: смышлёный паренек на контрольной работе заканчивает трудиться минут за 10 до конца урока, и хорошо если смотрит в окошко, а не начинает крутиться. «Да ты проверь!» — говоришь ему. «А я уже проверил!» —

отвечает тот. Чего он там проверял, да и как проверял — никто не знает, а в работе не обошлось без ошибок. «Сделать работу и дурак может, - говаривал я таким ребятишкам.- А вот проверить её – ум нужен.»

Никуда, видимо, не денешься — надо учить проверять и собственную работу. Что же здесь можно посоветовать?

Прежде всего обратить на себя все приёмы КД, которые ученик наблюдает в классе.

Как проверить полученный результат?

1) Проверка по частным случаям.

В тождественных преобразованиях удобны подстановки 0 и 1 как значений переменных; уравнения и неравенства с параметрами проверяются так же; часто удобно брать равные между собой значения переменных (при получении формулы для произвольного треугольника стоит посмотреть, что получится, если треугольник будет равносторонним); построенный график функции проверяется по контрольным точкам.

Но ученик обязан понимать, что для такой проверки важен только отрицательный результат, факт несовпадения.

2) Проверка «в обратную сторону».

Разложение на множители контролируется умножением; нахождение первообразных — дифференцированием; корни квадратного уравнения — теоремой Виета; изображение фигуры по трём её ортогональным проекциям — видами полученной фигуры на тех же трёх направлениях.

3) Проверка именованного ответа по размерности.

Впрочем, надо понимать, что совпадение размерности ещё не гарантирует правильности. В проверке по размерности есть «подводные камни» - в тех задачах, когда среди данных есть как численные значения, так и параметры. Предположим, что у нас получилось из подобия неких треугольников, из пропорции для четырёх его сторон $b\ /\ (a+1)\ =\ 1\ /\ a$ такое соотношение между длинами отрезков a и b: $b = (a+1)\ /a$. Проверка этого равенства по размерности показывает, однако, его невозможность. Но дело в том, что в окончательном результате пропал сомножитель 1. Если выражение для b записать из пропорции аккуратно, то получаем равенство $b =((a+1)\cdot 1)\ /a$, которое уже выдерживает проверку по размерности. Но я что-то не встречал такого рода аккуратности.

4) Проверка по симметричности.

Симметричность условия задачи должна приводить к симметричности ответа, и наоборот. Стандартный пример — симметричные системы уравнений; симметричное выражение должно получаться при выводе формулы Герона, при вычислении объёма усечённого конуса, в некоторых комбинаторных задачах («Сколькими способами можно составить регламент для пяти ораторов так, чтобы оратор A выступал раньше оратора B?).

Ещё задача: " Чему равна сумма всех векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины? " Решение (фактически устное и особо впечатляющее для многоугольника с нечётным числом сторон) таково. Пусть в результате получается некий вектор, отличный от нулевого. Куда-то он направлен. Но куда? Какому направлению отдать предпочтение - ведь никакое направление любого из данных векторов не имеет предпочтения?! И раз суммарному вектору невозможно придать определённое направление, то он является нулевым.

5) Проверка в предельных случаях.

Одну из данных величин устремить к нулю, или к бесконечности, или ещё куда-нибудь и посмотреть, соответствует ли полученный результат условию.

Я уже рассказывал, что теорему косинуса можно «доказать» со знаком «+». Именно, в треугольнике ABC получим $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$.

Как найти ошибку? Устремим угол C к нулю. Тогда $\cos C \to 1$, $c \to a + b$, в то время как «очам видно» , что при этом стремлении угла C к нулю $c \to 0$.

6) Параллельное решение.

Кроме аналитического решения, проводить и графическое. Уравнение $\sqrt{x+a} = x$ иллюстрируется и в системе координат (x, y), и в системе координат (x, a).

Ещё пример. Пусть для положительных чисел x, y, z дана система $x = y^2 + z^2$, $y = z^2 + x^2$, $z = x^2 + y^2$. Требуется выяснить, равны ли в полученном ответе найденные значения неизвестных? Вроде бы из симметрии «видно», что должны быть равны. Но в этой системе можно проделать следующее: сложить все уравнения, перенести всё в одну часть; после этого получается уравнение второй степени с тремя переменными, которое задаёт невырожденную сферу. Осталось подобрать три различных числа, удовлетворяющие полученному уравнению сферы, а затем проверить, что они удовлетворяют заданной системе.

Чтобы поощрить такую деятельность, я для повышения отметки иногда считал, что сделано два примера. Причина проста — приходится преодолевать «сопротивление» учеников, полагающих, что нет лучшего способа проверки, чем спросить у соседа и тем самым сэкономить время.

7) Проверка прикидкой.

Здесь в первую очередь вычисления, но не только. Всегда возможно задать себе вопрос: «А что должно получиться?»

8) Проверка по здравому смыслу.

В задачах на поиски экстремума уже из условия бывает ясно, какой именно экстремум должен иметь место; если в текстовой задаче некий мотоциклист проехал без остановки 1000 км, то появляются основания для беспокойства.

Как проверить ход решения?

Тут надо смотреть за равносильностью переходов; откуда берутся ссылки; работает ли использованная идея в других случаях (известное «доказательство» шарообразности Земли — если пойти в одном направлении, то придёшь, откуда вышел,— годится и для «кубообразной» формы); все ли условия использованы при решении.

Недовольство решением может быть вызвано и тем, что оно «не смотрится»: длинное, громоздкое. А. Пуанкаре высветил ту роль, которую играет эстетическое начало в математических исследованиях. Об этом же писали Г.Харди, С.Улам. Появились и работы методического характера – Г.Саранцев. Поселить бы это начало в головах своих учеников...

Красивых решений, полученных учениками, каждый учитель может привести немало, и я выберу только пару примеров.

1) Сначала мы в классе установили, что $\sqrt{2}$ — число иррациональное. Потом ученики сами это проверили для числа $\sqrt{3}$. Затем я предложил доказать, что будет иррациональным число $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Стандартное решение ясно: после возведения в квадрат останется сослаться на то, что $\sqrt{6}$ иррационален, а это уже известно. И вдруг... предлагается такое рассуждение: рассмотрим вместе с данным числом такое: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.. Его сумма с данным равна $2\sqrt{3}$, а произведение 1. А это возможно только тогда, когда каждое из них иррационально.

2) Число $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ надо было представить в виде разности двух радикалов. Если формула сложного радикала неизвестна, то придумать, как это сделать, весьма непросто. И вот что я увидел:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2(2-\sqrt{3})}{2}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3/2}-\sqrt{1/2}.$$

Совсем недавно мне повезло увидеть решение хорошо известной задачи: "треугольник с двумя равными биссектрисами - равнобедренный ". Вот оно.

Пусть дан треугольник ABC, в котором равны биссектрисы AK и BL углов A и B

соответственно: $AK = BL = a$. Обозначим $\angle KAB = \alpha$, $\angle LBA = \beta$ и пусть $\beta > \alpha$. Проведём хорды KK_1 и LL_1 треугольника ABC, параллельные AB. Пусть расстояние от точки K до прямой AB равно h_1, а расстояние от точки L до прямой AB равно h_2. Так как $h_1 = a \sin\alpha$, $h_2 = a \sin\beta$ и $\beta > \alpha$, то $h_2 > h_1$.

Заметим, что $\angle K_1KA = \alpha$, а потому треугольник K_1KA - равнобедренный. Из него получаем, что $KK_1 = a / 2\cos\alpha$. Аналогично, $LL_1 = a / 2\cos\beta$. Так как $\beta > \alpha$, то $LL_1 > KK_1$.

Так как оба неравенства: $h_2 > h_1$ и $LL_1 > KK_1$ не выполнимы, то неравенство $\beta > \alpha$ (и, аналогично, $\beta < \alpha$) невозможно. Тогда $\beta = \alpha$, то есть треугольник ABC имеет два равных угла A и B, а посему - равнобедренный.

Вся атмосфера в классе может способствовать КД. Сопоставление разных точек зрения по одному и тому же вопросу, культивирование поиска разных решений одной и той же задачи, доброжелательность к ученику, сделавшему ошибку («Дети, вы только посмотрите, какая интересная ошибка у вас перед глазами! Спасибо тебе, Вася, за такую ошибку!»), возможность вступить в дискуссию с учителем по любому вопросу и даже обжаловать полученную отметку, возможность повысить полученную отметку за счёт толково сделанной работы над ошибками — вот некоторые особенности такой атмосферы. Подведём итоги.

1) КД реально существует в структуре деятельности школьника.
2) КД ученика может находиться в поле зрения учителя, направляться, учитываться и, возможно, оцениваться.
3) В систему работы учителя по обучению КД входят разные приёмы, связанные как с содержанием обучения, так и с его формами.
4) Общая атмосфера в классе может благоприятствовать становлению, проявлению и развитию КД.
5) Важнейшая задача при формировании КД — обучение самоконтролю. Её решение начинается с обучения контролю.

Мне далеко не всё ясно с КД - когда начинать, как начинать, в какой последовательности её развёртывать, как её оценивать и многое другое. Но значимость КД для меня несомненна. Дети становятся всё более защищёнными от неверных результатов, поверхностных утверждений, сомнительных обоснований, рискованных предположений. КД способствует формированию убеждённости. Ученик убеждён не потому, что ему нечто внушили, или написали в книге, или «так сказал учитель». Ученик убеждён потому, что он сам подвергнул сомнению и в конце концов пришёл к выводу, который готов отстаивать в любой ситуации. А то ведь вот какая реальность: однажды я разговаривал со своей ученицей Таней А., толковой девушкой, только что сдавшей выпускной экзамен по обществоведению. И отвечала она о материи и сознании. И материя, разумеется, первична. «Ну и какие же ты привела этому доказательства?» — спрашиваю я. «В учебнике и так много написано, а если бы ещё и доказательства надо было учить...» — ответила она.

Замечу в конце разговора, что в КД входит не только поиск и анализ ошибок. Представим себе, что ученики выслушали два разных решения одной и той же задачи от своих сокашников. Естественно сравнить эти решения — не только, какое из них верное, какое нет, но и какое более короткое, более красивое, более интересное.

Вот ясный пример двух принципиально разных решений простенькой задачки: «Пусть каждому вектору $\vec{a}$ отображение f сопоставляет вектор $k\vec{a}$ ($к>0$). Изменится ли при этом угол между векторами?»

При аналитическом решении записываем косинусы углов между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $k\vec{a}$, $k\vec{b}$, используя скалярное умножение. Из равенства этих косинусов заключаем равенство углов.

При «геометрическом» решении замечаем, что умножение на положительное число меняет только длину вектора, но не его направление. А раз направления векторов сохранились, то и угол между ними сохраняется.

И какое же из этих решений предпочтительнее? Размышляя над этим, мы переходим к оценке сделанного. Оценка такого рода необходимо предполагает анализ и сравнение. Важны также и критерии оценок: а почему, к примеру, одно решение предпочтительнее другого? Может быть, дело только в разных вкусах?

Здесь уместно сказать, что разные вкусы в какой-то степени соответствуют двум разным стилям математической деятельности. Одни предпочитают оперировать формулами, другие - наглядными образами. Это различие иллюстрируют как раз два приведённых решения. (Замечу, что для ответа на вопрос можно бы и сразу сослаться на гомотетию и её свойства.)

В реалии наряду с такой "избирательностью стиля" встречается и "универсальный стиль", когда для решения задачи используются оба стиля. Вот простенький пример - найти первообразную для функции $y = |x|$. И как тут уследить за "чистотой стиля"?

Выявив эти и другие составляющие КД, мы делаем ее всё более разнообразной.

Обучение КД, как я думаю, один из путей не только реализации принципа научности, но и воздействия на нравственные свойства развивающейся личности.

Позволю себе также чуть теоретизировать. Критическую деятельность можно понимать достаточно широко, если включать в неё проверку возникающей гипотезы. Когда попытки её опровергнуть не проходят, возникает ощущение её истинности. Поиск доказательства истинности оказывается неотъемлемой частью проверки, значит частью именно критической деятельности. Более того, в определённом контексте доказательство и есть проверка. Тем самым поиск доказательства – элемент критической деятельности. Само доказательство может быть сугубо дедуктивным, сугубо рациональным, то есть основанным только на рациональном рассуждении, наконец, компьютерным, а также быть комбинацией этих видов. Но это уже не столь важно.

1У.3. О ПОНИМАНИИ

КД, будучи направлена на «разрушение», на самом деле разрушает только тогда, когда это возможно. А если разрушать было нечего, если всё было верно? Есть ли в таком случае какой-либо реальный толк от КД?

Думаю, что есть. Результатом КД в любом случае является более глубокое понимание. Подвергать сомнению — не только для опровержения, но и для другого уровня понимания. Вот и пришла пора поговорить о том, что меня интересует,— о понимании.

В самом деле, каким же это образом, передавая детям знания, я воздействую на их личность? Знания одни и те же, а дети вон какие разные. Знания влияют персонально только тогда, когда они усвоены ребёнком, когда они начинают перерастать в убеждения. Установка учителя на понимание и способствует этому процессу.

Понимание, конечно, не тождественно знанию. Несколько примеров должны подтвердить эту мысль.

1) Правила шахматной игры знают и любитель, и гроссмейстер. Оба они, глядя на одну и ту же позицию, понимают её, однако совершенно по-разному. Более того, многие комментаторы матча Карпов — Каспаров признавались, что в иных партиях они не понимали замыслов соперников.

2) Знать формулу и понимать её — далеко не одно и то же. Пример: формула второго закона Ньютона или формула Ньютона — Лейбница для школьника и для профессионала.

3) Знание текста и понимание его разделены ещё больше. Проводя иногда досуг с учениками, я предлагал им растолковать смысл сказки «Курочка Ряба». Никогда не думал, что эти толкования могут быть столь различными. С тем же можно столкнуться, если предложить школьнику рассказать, как он понимает какое-либо общеизвестное выражение, например «Язык до Киева доведет». Как-то я предложил девятиклассникам маленький тест на понимание «Евгения Онегина» - они как раз «проходили» его. Спрашиваю: «Вы помните сцену встречи Татьяны Лариной и Евгения Онегина в Москве?» Помнят. «А помните строчку, где Татьяна смотрит на Евгения ?» Помнят. «А какой знак стоит в ее конце?» Отвечают, что, конечно, точка. «А теперь посмотрите, что у Пушкина». А у Пушкина, естественно, многоточие.

Есть такая байка про Конфуция. Два его ученика заспорили, когда в течение дня Солнце ближе к Земле. Один говорил, что в зените, потому как теплее всего именно в это время. Другой считал, что на горизонте, ибо тогда оно самое большое.

Они пришли к Конфуцию, с тем, чтобы он рассудил их. Тот подумал, вздохнул и ответил, что не может этого сделать.

— Какой же ты после этого мудрец? — удивились ученики.

4) Знать, что нужно делать, и понимать, что нужно делать,— разные вещи. Как спасали ростовщика Джафара, тонувшего в пруду, его многочисленные должники, стоявшие на берегу? Они тянули ему руку и кричали: «Давай!» Следуя своей натуре, ростовщик руки не давал. Но случайно на

берегу оказался Ходжа Насреддин. Он тоже протянул руку, закричал: «На!» Ростовщик уцепился за неё и был вытащен на берег. Комментируя эту сцену из повести В. Соловьева «Возмутитель спокойствия», я спрашиваю: «Кто из «спасателей» лучше понимал ситуацию?»

5) Знания двух людей в одном и том же деле могут быть совершенно одинаковы, а понимание дальнейших действий — совершенно различным, как у адвоката и прокурора на судебном процессе.

Один бытовой пример. Некая работница магазина объяснила мне, что интересующие меня сведения находятся в выданной мне в магазине книжице, «которая похожа на квадрат». У меня была на руках книжица в форме прямоугольника, длина которого была почти в два раза больше ширины, и по моему разумению она вовсе не была похожа на квадрат, а других книжиц у меня не было. Я пошёл в магазин разбираться в ситуации. И тут эта самая работница воззрилась на меня с удивлением. – Да вот же она, - воскликнула она, указав на книжицу в моих руках. - Позвольте , говорю я, но она вовсе не похожа на квадрат, смотрите какие у неё разные стороны! И вот тут-то меня осенило – для неё все прямоугольники похожи на квадрат!

Можно привести много и других примеров.

Но закончу таким. Ж. Клемансо, политический деятель Франции начала прошлого века, о двух своих коллегах сказал: «Один всё знает, но ничего не понимает, а другой всё понимает, но ничего не знает».

Связи понимания с умением мне не вполне ясны. Если ученик умеет решать квадратные уравнения (то есть действовать по алгоритму или по формуле), то о понимании говорить как – то неуместно. Понимание проявится, думаю, тогда, когда ученик будет разумно действовать в нестандартной ситуации.

Когда начинаешь разбираться в том, что такое понимание, то, прежде всего, необходимо учесть давление житейского смысла этого понятия. В самом деле, объясняя ученикам нечто им неизвестное, мы то и дело вопрошаем: «Кто не понял?», «Что непонятно?». Для детей, что там ни говори, тот учитель лучше, который объясняет «понятнее». Есть книга Е. Богата «Понимание» на моральные темы, и есть прекрасная мысль в фильме «Доживем до понедельника»: «Счастье — это когда тебя понимают». Есть и другая «точка зрения (О.Уайльд, но не дословно) : «На самом деле есть только две трагедии в жизни. Первая, когда тебя не понимают. Вторая, когда тебя уже поняли» . О понимании написано много. Им занимаются философы, психологи, специалисты по искусственному интеллекту. О нём писали выдающиеся умы: А. Пуанкаре, Г. Вейль, В. Гейзенберг, Р. Фейнман, Р. Том, Р. Пенроуз.

Для меня все размышления на эту тему начались, когда я прочитал у А. Пуанкаре о причинах непонимания математики,— как же можно не понимать логику? (Замечу, что с профессиональной точки зрения самое интересное, когда ученик чего-то не понимает. Почему не понимает и как преодолеть это непонимание?)

Какое-то собственное разумение необходимо, чтобы хоть чуточку двинуться дальше. Итак, пусть имеется нечто, несущее информацию: явление, сооружение, человек, общество... Информация как-то распределена в этом «нечто», в присущих ему объектах, их связях. Существенна иерархия связей, есть более или менее важные из них, я бы говорил о «связях с весом». Далее, есть преобразование информации об этом «нечто» посредством текста, образов, жестов, речи, мимики и т. д. И есть «пониматель» — человек, который воспринимает преобразованную информацию или само «нечто» и хочет восстановить исходную: объекты, их связи, систему этих связей и их «веса».

Вот примерно так, видимо узко и прагматично, я толкую для себя процесс понимания.

Если держаться поближе к собственной деятельности, то видишь, что в методике преподавания и даже в дидактике о понимании разве что в последнее время появились некие исследования. В программе по математике обычно ведут речь о знаниях и умениях, да ещё почему-то о навыках (каковых в математической деятельности ученика вообще не бывает), просматриваются тенденции к всё большей формализации: нормы, критерии, уровни, оптимизация, интенсификация, стандарты , в последнее время появилась «компетентность» и т. п.

Но мы-то его говорим! И хотим, чтобы нас понимали! Вот я читаю книгу С. Лилли о теории относительности. Автор обучал этой премудрости всех желающих, включая домохозяек, и отразил в ней свой опыт. В тексте очень много заданий и вопросов для самоконтроля, вот характерные: «Что вы понимаете под словами...», «Продумайте смысл этого утверждения...», «Удостоверьтесь, что вы поняли все рассуждения...», «Убедитесь, что вы понимаете формулу...».

В замечательном предисловии академика Н.Лузина к учебнику И.Жегалкина, М.Слудской «Введение в анализ» есть такие слова: «…ориентировка курса на понимание имеет в виду неизмеримо более важное соображение, чем простое облегчение учащемуся трудностей изучения: - это *инициативу учащихся*. Эта драгоценная инициатива, то есть *умение ориентироваться в новой обстановке, выходящей из привычного шаблона*, может притти и всегда приходит лишь от совершенного понимания материала, а вовсе не от твёрдости его усвоения, т.е. вбирания памятью. …Следует иметь в виду, что выпадение из памяти какой-нибудь важной части материала приводит в расстройство и весь остальной, вообще говоря казавшийся хорошо усвоенным материал только *в том случае, если он раньше не был ориентирован на понимание*.» (Выделение курсивом и орфография Н.Лузина – В.Р.)

В последних программах появился, наконец, и этот термин. С одной стороны – замечательно, но с другой… Кто бы знал толком, что это за феномен, как добиваться понимания от учеников – учат ли этому будущих учителей?

Итак, в методике этот термин «не работает», толкование его исключительно неоднозначно, а реально без него не обойтись. Что же делать? Попробуем держаться того, что поближе к нам,— психологии. Что же я почерпнул из этой науки?

1) Понимание всегда личностно, оно существует только в головах людей.

2) Понимание невозможно, если вас не хотят понять. Фразы типа «разговор глухих», «как об стенку горох», по-моему, как раз об этом. Значит, работая на понимание, мы выходим на мотивацию.

3) В понимании есть невербализуемая часть. (При монотонном чтении без отрыва от конспекта слушатели теряют до 30% информации.) Систему образов иногда трудно выразить словами. Фраза «Понимаю, но сказать не могу» не так уж бессмысленна и ставит перед учителем задачу: помочь ребёнку образы перевести на слова.

4) Понимание реализуется скорее в деятельности, чем в формулировках. Хорошая медсестра на операции работает без слов. Однажды я был на уроке математики в Новосибирском интернате при НГУ . Выпускники повторяли тригонометрию и лихо решали «жуткие» задачки. После урока я спросил у них: «А что такое синус?» — и не услышал чёткого определения. Давно это было, и по молодости я чрезвычайно «порадовался», что, как говорится, «посадил их в лужу». Только недавно стал понимать, что правы-то были они.

5) Необходимо различать понимание как процесс и понимание как результат этого процесса. Результат появляется как итог процесса, который может быть достаточно долгим. Значит, в практической работе над пониманием надо не торопиться и по многу раз возвращаться обратно.

6) Понимание, как правило, результат диалога. Разумеется, чтение книги можно трактовать как некий диалог. Но куда в большей степени может быть диалогом живое общение с учеником. Почему-то много внимания уделяется обучению работе школьника с учебной книгой и почти не говорится о том, как научить его слушать, а также и объяснять математику, иначе говоря, говорить и писать на математическом языке. (Я говорю своим ученикам при первом знакомстве: вам надо научиться решать не только задачи, но и "сверхзадачи": видеть, слышать, читать, писать, говорить и думать. Всё это требует серьёзной расшифровки.)

7) Понимание — это совпадение смыслов. Как же сделать так, чтобы передать смысл из своей головы в чужую? Словами и рисунками смысл только кодируется, как сказал поэт: «Мысль изречённая есть ложь!» И впрямь, сколько же раз мы слышим от учеников чудовищные по бессмысленности утверждения с сопроводительным текстом: «А вы сами такое говорили!»

Есть занятный анекдот.

— Вася, сколько булочек ты можешь съесть натощак?
- 10!
— Ха-ха-ха!
— А что такое?
— Уже вторую булочку ты будешь есть не натощак! Понял?
— Понял! Здорово! —сказал Вася и, спустя немного, встретил Федю.
— Федя,— говорит он,— а сколько булочек ты можешь съесть натощак?
— 20!
— Эх, жаль.
— А почему?
— Если бы ты сказал 10, я бы тебе такое рассказал...

Немного подробнее о совпадении смыслов и вообще о том, немного каламбуря, в "каком смысле имеет смысл толковать слово "смысл"? Сузим нашу задачу и сведём разговор к смыслу одного предложения, пусть определения. Впрочем, это тоже немало, ибо из учительского опыта хорошо известно, сколь трудным бывает его понимание - взять к примеру определение многогранника и даже его грани..

А что о "смысле" есть в математике? Есть неравенства "одного смысла" и "противоположного смысла". Пожалуй, всё, но попробуем оттолкнуться от этого. Неравенства "одного смысла" - это равносильные неравенства. Обобщаю: определения "одного смысла" - это равносильные (эквивалентные) определения.

Вернёмся теперь к пониманию. Ученик, который повторяет за учебником определение квадрата, не демонстрирует хотя бы в какой-либо степени понимание этого определения. Но если он придумывает своё определение, равносильное исходному, (имеющее тот же смысл) , то тем самым проявляет некое понимание. И думаю, мы согласимся, что чем больше ученик придумает равносильных определений, тем лучше он понимает исходное.

Двинемся дальше. Такое толкование "одного смысла" и "разных смыслов" для определений напоминает толкование "направления" для лучей (векторов) : два луча (вектора) могут иметь одно направление и разные направления. Поскольку отношение сонаправленности является отношением эквивалентности, то можно разбить все лучи (векторы) на классы эквивалентности, а затем каждый класс назвать направлением. (Для векторов часто встречается и такое: под вектором понимают множество равных между собой направленных отрезков, тем самым - класс эквивалентности.)

Аналогичный пример - толкование "однопорядковости" величин. Мы не даём определение понятию "порядок величины" (числа, бесконечно малой). Мы действуем иначе - говорим о величинах одного порядка и разных порядков. И этого вполне достаточно для практики, но если угодно, то можно дать определение " порядку величины" как классу эквивалентности.

Попробуем поступить аналогично и с понятием "одного смысла" для определений. Тогда смыслом определения естественно называть множество определений, равносильных данному. Тем самым "смысл" определения перестает быть чем-то неуловимым.

Конкретизируя: смысл определения квадрата - это совокупность всевозможных его определений. И понимание учеником определения квадрата тем полнее, чем больше его определений ему известно.

Возможно, аналогичное толкование смысла можно применить не только к определению, но и к формуле, вообще - к утверждению. Разумеется, я не претендую на универсальность этого толкования. Я вижу в нём другие достоинства - ясность, операциональность и чёткие аналогии в математике.

Эту позицию мне удалось частично реализовать в батарее тестов (в совместном российско-канадском проекте) - тестов на проверку "понимания" , в основном по курсу геометрии. Берётся некий объект (скажем, скрещивающиеся прямые, угол между прямой и плоскостью…) и предлагается в разной форме несколько фрагментов, ему соответствующих, не обязательно эквивалентных, иначе говоря, среди этих фрагментов могут быть и не адекватные. Форма задания объекта - словесная, символическая, графическая. Задача ученика - найти среди этих фрагментов адекватные. Вот пример такого теста на окружность. Предлагается пять описаний некоторого объекта, среди которых надо найти эквивалентные:

1. Множество точек плоскости, удаленных от данной точки на данное ненулевое расстояние.
2. Множество точек плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом.
3. Рисунок. На рисунке показана линия пересечения двух сфер.
4. $\{(a,b)\in\Re^2 : a^2+b^2-ax-by=0\}$, $a^2+b^2\neq 0$.
5. $x^2+y^2=1$.

Уйдём от математики. Эти нехитрые домыслы подвинули меня к личному ответу на вековой вопрос: " В чём смысл жизни (индивида) ?" Ответ, выдержанный в этом духе таков: "Смысл жизни - это совокупность дел, которые имярек считает важными для себя, и множество людей, которых он считает близкими, вместе с отношениями к ним. " В первом приближении такой ответ, по - моему разумению, вполне приемлем. Отсюда сходу получается, что у каждого человека смысл жизни индивидуализирован, а потому уникален. Каждый ищет свой смысл жизни. И не только ищет, но и создаёт.

8) Понимание связано с эмоциональным переживанием. Состояние понимания весьма комфортно, миг понимания — «момент истины» —редок и прекрасен. Архимед выскочил из ванны в ту самую секунду.

И ещё много всякого можно прочитать о понимании у психологов.

И у математиков тоже. Вот что пишет А. Александров в статье «Тупость и гений» (Квант.— 1982.— № 11, 12):

«История неевклидовой геометрии показывает, с каким трудом люди доходят до вещей, которые, когда они, наконец, ухвачены и поняты, оказываются простыми, и как люди зачастую не понимают, что делают и что лежит у них под руками. Ни Гаусс, ни Лобачевский не поняли то, что было у них почти в руках. Даже Гаусс и Лобачевский!»

В. Арнольд приводит хорошо известную задачу: «Дан график функции. Нарисовать график производной.» и далее пишет: «Если человек не умеет этого делать, то, хотя бы он умел дифференцировать все многочлены и рациональные функции, он ничего в производных не понимает.»

На чём же остановиться?

Как обычно, чтобы разобраться в явлении, полезно сопоставить его с собственной противоположностью. Здесь надо говорить об отсутствии понимания, о непонимании. Что же мы можем не понимать?

1) Слова. Пример — неизвестные термины.

2) Фразы, хотя каждое слово из этой фразы известно. Пример — философские сочинения. Причина ясна — нет соответствующей культуры.

3) И слова понятны, и фраза ясна, но она не укладывается в контекст, в систему предыдущих знаний и смыслов. Пример: «Сегодня можно то, что вчера было нельзя».

4) Смысл фразы. Маленький диалог в качестве примера.

— Дай, пожалуйста, чашку.

— На.

— А где блюдце?

Это неплохой перечень. А если взять поближе — что не понимаю сам? Много чего.

До сих пор мне неясно одно место из учебника геометрии А. Киселёва. Он даёт определение параллельных прямых как таких, которые, находясь в одной плоскости, не пересекаются, «сколько бы их ни продолжали». Как же можно продолжать прямые, если они и так бесконечны? Оказалось, что под прямыми А. Киселев, следуя Евклиду, имеет в виду отрезки. Но далее А. Киселев говорит в таком же духе о параллельности прямой и плоскости. Что же он имеет в виду под плоскостью, коль скоро допускает её продолжение? Справившись в классическом учебнике Ж.Адамара, мы можем найти там, что Ж.Адамар допускает продолжение прямой, но продолжения плоскости у него нет. Насколько я знаю, идея плоскости как чего-то продолжающегося обрела полноправный статус у А. Александрова, только произошло это спустя много лет после сочинений А. Киселёва.

Также долго не понимал ссылок на аксиому математической индукции. Собственно, а почему нельзя, сделав индуктивный переход, сказать примерно такую фразу: «При n =1 утверждение доказано, тогда согласно индуктивному переходу оно верно при n = 2. Так как оно верно при n = 2, то в силу индуктивного перехода оно верно при n = 3». И т.д. И при чём тут аксиома индукции, принцип индукции? Почему нельзя просто сказать: «И так далее»? Спрашивал у разных людей, у математиков получал разные ответы. У них было какое-то своё понимание, но меня оно почему-то не устраивает. Есть и своё объяснение, на котором, разумеется, не настаиваю. Именно фразы: «Это свойство имеет любой объект» и «Это свойство имеют все объекты» равносильны, когда объектов, о которых идет речь, конечное число. Но если такой законченности нет, тогда как? Фраза «Утверждение верно для любого натурального числа» не требует, по-моему, аксиомы индукции, так как до любого натурального числа можно «добраться» за конечное число шагов. Напротив, фраза «Утверждение верно для всех натуральных чисел» не может обойтись без аксиомы индукции, так как предполагает бесконечность актуальную.

А вот пример.

Пусть требуется доказать хорошо известное равенство $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)}=1-\frac{1}{n}$.Традиционное доказательство по индукции несложно. Есть только одна тонкость — здесь, по-моему, лучше начинать индукцию с n = 2, ибо речь идет о сложении, т. е. о бинарной операции. При n=1 нет ещё никакой суммы.

Известно и такое доказательство, которое использует тождество $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

Тогда

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

………..

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

Суммируя все равенства и упрощая выражение в правой части, получим то, что хотели. Что использовалось в этом рассуждении — метод математической индукции, принцип математической индукции или аксиома математической индукции? А может, их всех тут вообще нет, коль скоро нет индуктивного перехода?

Возможна любопытная модификация приведённого доказательства. Запишем требуемое равенство $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)}=1-\frac{1}{n}$.

Прибавим к обеим его частям дробь $\frac{1}{n}$ и получим такое равенство: $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{n}=1$.

Сложим последние две дроби и увидим, что $\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}$. Теперь будем производить сложение дробей от конца к началу. Следующее сложение будет таково: $\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n-2}$. В конце концов придём к равенству $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2}=1$. Теперь, пройдя весь путь обратно, мы приходим к первоначальному равенству.

Вопросы те же: есть ли в этом доказательстве метод, принцип или аксиома индукции?

Совершенно аналогичные вопросы можно задать при выводе некоторых формул суммирования, когда автор пишет «и так далее». Что означают эти слова? Неясно.

И так как эта ситуация достаточно «темна», а сам метод доказательства по своему содержанию обычно понятен, то не стоит требовать от учеников последних заклинаний после проведения доказательства таким методом — ни ссылки на принцип, нп ссылки на (тем более) аксиому. Увы, я это делал довольно долго, пока сам не стал размышлять по этому поводу.

К слову сказать, доказательство по индукции, следуя Г. Штейнгаузу, можно метафорически преподнести как передачу "наследственных свойств". Если прародитель имеет некоторое свойство (база индукции), которое передаётся по наследству (индуктивный переход), то этим свойством обладают все его потомки.

До недавнего времени я исправно и вполне традиционно доказывал ученикам, что $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ =1.

Доказательство это, как известно, длинное и не слишком простое. Но ведь уже в девятилетней школе детям сообщается определение длины окружности как предела периметров правильных вписанных многоугольников. Стоит только чуть изменить это определение, взяв вместо правильных многоугольников правильные вписанные ломаные, необязательно замкнутые, как мы получаем определение длины окружности, равносильное данному предельному равенству (Х. Фрейденталь, А. Александров). Причём эта равносильность видна невооружённым глазом, ибо $\sin x$ —это половина звена нашей ломаной в единичной окружности, а x — половина длины соответствующей дуги. Моё непонимание (видимо, не только моё) и заключалось в невидении этой равносильности.

Сравнительно недавно я уяснил, что означают точки в записи бесконечной десятичной дроби. Например, π = 3,1415... Только то, что $3{,}1415< \pi <3{,}1416$. И всё. (При таком понимании с ходу получается, что 0,999...= 1.)

Ещё пример, хорошо знакомый коллегам. Не упускаю случая спросить у детей:

«Какой по виду треугольник со сторонами 3, 4, 5?»

— Прямоугольный.

— Правильно. Почему?

— По теореме Пифагора.

И тут я начинал в который раз объяснять разницу между прямым утверждением и обратным, что теорема Пифагора тут вовсе ни при чём, ибо она уже подразумевает «прямоугольность», что без теоремы косинуса тут не обойтись...

Но на самом деле теоремы Пифагора «почти хватает» для правильного обоснования. Дело в том, что зависимость стороны треугольника от противолежащего угла (при постоянных двух других сторонах) монотонная — этот факт легко получить, используя теорему Пифагора. Но тогда и обратная зависимость также монотонна. И если согласно теореме Пифагора гипотенуза прямоугольного треугольника со сторонами 3 и 4 равна 5, то верно и обратное утверждение: в треугольнике со сторонами 3, 4, 5 против большей стороны лежит прямой угол.

Тот же вывод может быть получен из теоремы Пифагора и признаков равенства треугольников.

Так или иначе, но без теоремы косинуса можно прекрасно обойтись!

Небольшая сумятица была в моей голове при использовании знака неопределённого интеграла. Возьмём вроде бы ясное равенство $\int (f+g) = \int f + \int g$. (Здесь записывать переменную нет необходимости.) Но это равенство чего? Не функций, ибо и слева и справа — семейства функций (ввиду наличия произвольных постоянных). Может быть, равенство множеств? Возможно, но как-то странно, как говорится, «из другой оперы». А суть в том, что, сложив любую первообразную для одной функции с любой первообразной для другой функции, мы получим некоторую первообразную для суммы этих функций. (Замечу, что в соответствии с такой формулировкой само равенство лучше записывать в обратном порядке.) Символ неопределённого интеграла этой сути не соответствует из-за отсутствия однозначности, обусловленной наличием произвольной постоянной. Известно, как обойти это неприятное место. Некую первообразную для f записывают как F, т. е. употребляют соответствующую заглавную букву. Это не вполне удобно, ибо исчезает символ операции, обратной дифференцированию. Приходится уходить от чистой символики и приписывать слова. Например, писать так: «Пусть $f(x) = x^2$. Тогда $F(x) = x^3/3$». Я придумал в этой ситуации использовать знак штриха, такой же, как знак производной, но уже перед самой функцией. К примеру, для функции $f(x) = x^2$ получилась такая запись: $'(x^2) = x^3/3$, а для суммы первообразных двух функций вот такая: $'(f) + '(g) = '(f + g)$. И по сию пору эта символика мне кажется достаточно выразительной.

(Похожий случай отсутствия однозначности и определённого несоответствия мы можем понимать так: произведение любого корня из одного комплексного числа на любой корень из другого комплексного числа является некоторым корнем из их произведения. Опять же это равенство лучше записывать в обратном порядке. А ещё лучше – избегать этой записи из-за смутности толкования)

Не понимаю, почему так явно выделено в школьном курсе "основное логарифмическое тождество". Равенство $a^{\lg_a b} = b$, получившее такое пышное название, по сути ничуть не лучше равенства $(\sqrt[n]{b})^n = b$ или равенства $\sin(\arcsin b) = b$. Но ведь никто не говорит об "основном корневом тождестве" и тем более об "основном синусовом тождестве" ….

Суть этих (и аналогичных) равенств в том, что композиция двух взаимно-обратных функций возвращает нас туда, откуда мы пришли: $f(f^{-1}(x)) = x$. И всё. С этой точки зрения равенства $a^{\lg_a b} = b$ и $\lg_a a^b = b$ одного и того же происхождения и ни одно из них не является "более основным", нежели другое. Замечу тут же, что равенство $(\sqrt[n]{b})^n = \sqrt[n]{b^n}$ моментально следует из того, что возведению в степень и извлечению корня соответствуют взаимно обратные функции.

Иногда не понимаю даже общепринятого в математике. Зачем, например, употреблять слово «монотонный», когда говорят о монотонном возрастании (убывании) функции на промежутке? Разве что-нибудь изменится, если говорить просто о возрастании (убывании)? А термин «монотонность» можно оставить как их объединяющий, скажем, во фразе «проверка функции на монотонность».

Зачем нужно специальное понятие «арифметический корень» для корня чётной степени из неотрицательного числа? Достаточно говорить о неотрицательном корне. Знак радикала позволяет записывать единственное значение корня, надо только чётко оговорить способ употребления этого знака, когда корней два,— с его помощью записывается именно неотрицательный корень. $\sqrt{4} = 2$ по смыслу знака радикала. Ученикам я говорю так: «Если вас лукавый экзаменатор спрашивает, чему равен корень квадратный из четырёх, то надо отвечать «плюс-минус двум». А если, говоря это, одновременно пишут $\sqrt{4}$ и ждут ±2 в правой части равенства, то вы не попадаетесь в расставленную ловушку и пишете только 2». (Этот разговор подразумевает нахождение корня на множестве вещественных чисел — для комплексных «особь статья»). Весь этот пассаж о корнях и радикалах известен из книги Ю. Шихановича.

Замечу тут же, что символ $\sqrt{2}$ - это именно символ числа, а не само число (аналогично для логарифмов, синусов и т.п.) . Вещественное число – в реалии - десятичная дробь, то есть некая последовательность цифр, с которой работают определённым образом.

Недоумеваю, когда при решении квадратного уравнения относительно переменной x в ответе пишут $x_{1,2}$. Зачем менять имя переменной проставлением нижних индексов? Бывает, что это разумно, но только в специальных случаях.

Помню непонимание того, как раскрывается $|x|$. В самом деле, мы знаем такую запись:

$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$. Но знак системы означает конъюнкцию предикатов (высказывательных форм, выражений с переменными). Эта операция определена только тогда, когда переменная задана на одном и том же множестве. А в нашей записи в первой строке $x \geq 0$, а во второй строке $x<0$. Как же тут можно ставить знак системы?

Любопытно, что в достаточно авторитетном пособии, рекомендованном МГУ (Кравцев и др. Методы решения задач по алгебре.— М.: Экзамен, 2001), вместо знака системы использован знак совокупности.

Верным здесь является именно знак системы - это давно объяснил В. Болтянский .

Ну а что же рассказывать ученикам, когда сам не вполне уверен в точности собственного понимания? Приходится идти в обход. Корректность метода математической индукции можно, как известно, доказать и без ссылки на аксиому индукции. При этом приходится, правда, постулировать нечто другое, именно существование наименьшего числа в бесконечной последовательности натуральных чисел. Необходимость этой аксиомы я понимаю уже лучше — кто знает, что там есть в бесконечных множествах!

До сих пор не понимаю, почему в учебниках математики не обсуждается общее понятие скалярной величины (при том, что о векторных величинах, иначе — векторах, разговоры ведутся). Примеров скалярных величин в элементарной математике достаточно: длина, площадь, объём, расстояние, угол; в текстовых задачах встречаются время, возраст, стоимость... А есть ещё физика, химия, биология... Но многие ли школьники смогут объяснить, почему можно решать уравнение $2\pi R = \pi R^2$, но нелепо приравнивать длину окружности площади круга? Приравнивать можно только их численные значения. Вот простенькая задача для начальной школы «Федя старше Васи в два раза, Коля старше Феди в три раза. Во сколько раз Коля старше Васи?». При её решении используется известное свойство скалярной величины V: $m(nV) = (mn)V$ (m,n — вещественные числа). Но где оно хотя бы разъясняется?

Я не понимаю оптимизацию обучения. Оптимизировать можно только то, что достаточно формализовано. Должен быть критерий оптимальности, причём имеющий численную характеристику. Ничего подобного в обучении пока нет.

Вот как Ю. Бабанский определял понятие оптимизации учебно-воспитательного процесса: «Под оптимизацией учебно-воспитательного процесса в современной школе подразумевается выбор такой методики его проведения, которая позволяет получить наилучшие результаты при минимально необходимых затратах времени и усилий учителей и учащихся».

Это определение ключевого понятия, оно должно быть совершенно недвусмысленным! Что же здесь неясно?

1) Оборот «минимально необходимые затраты», житейски ясный, здесь может толковаться неоднозначно. Минимальные — понятно, необходимые — понятно, а вместе для меня просто набор слов.

2) Слишком много «минимально необходимых затрат» требуется, причем одновременно. Пусть нам удастся минимизировать время учителя. Почему при этом будет минимизировано и всё

остальное?

3) Учебно-воспитательный процесс характеризуется многими параметрами. Что такое его «наилучшие результаты»? По какому именно параметру? Сразу по всем?

4) Даже если удастся достигнуть «наилучших результатов» по всем параметрам или хотя бы по главным, то на это требуется определённое фиксированное время. При чём тут его минимальность? То же можно сказать и про усилия.

Я не понимаю, каким образом ученики В. Шаталова учатся решать трудные задачи, точнее, как он учит их это делать. В его книгах об этом нет ни слова, хотя именно это, как я думаю, наиболее сложный вид деятельности в работе учителя математики.

Я не понимаю некоторых текстов: по математике, философии. Как-то летом решил одолеть современный учебник биологии для старшеклассников — ничего не вышло, не осилил я этой премудрости. Причина ясна: мало знаний, мало работал над текстом, недостаток упорства, желания. Очень полезно держать такую «трудную» книгу поблизости от руки — лучше начинаешь чувствовать ученика, перед которым не одна такая книга. С другой стороны, книги, в которых всё сразу ясно, по-моему, бесполезны, а может быть, и просто вредны.

«Что ведёт к успеху?» — спросили одного джентльмена. «Наличие препятствий»,— ответил тот. В школьной книге таким препятствием является трудное для понимания место. Само собой, не надо перегибать палку.

Однако пора перейти к детям. Но сначала... Моя коллега, учительница в ПТУ, рассказала как-то, что был у неё ученик, который появлялся на уроке математики примерно раз в месяц. Отсидев, он произносил обычно: «Опять не понимаю» — и исчезал.

Непонимание ребёнка бывает уникально ценным. Одна мама рассказывала как-то, что её толковый сын, будто перед стенкой остановился при вычислении значения -(3-1). И когда она (гуманитарий по образованию) узнала у него, в чём причина трудностей, то её удивление было неподдельным:

— Вы представляете, он заявил мне, что минус перед скобкой и минус в скобке —это разные минусы!

Как бы мне хотелось оказаться в такой момент рядом с этим хлопцем! Ведь, исходя из чисто формальных соображений, до поры до времени это действительно так, эти минусы и в самом деле разные: первый минус обозначает противоположность, а за вторым стоит знак операции.

Итак, что может быть причиной непонимания у школьника?

1) *Недостаток знаний*.

Поэтому в начале урока так важно задать, если можно так выразиться, его «аксиоматику» — факты, которые будут использоваться.

2) *Неподготовленность к языку, на котором идёт объяснение*.

Стандартный пример: язык $\varepsilon-\delta$ при изучении начал анализа.

3) *Недостаток определённой культуры*.

Стереометрия в старших классах начинается с таким трудом ещё и потому, что уровень логической культуры учеников к началу 10 класса не соответствует предмету изучения.

Здесь можно вспомнить и учителя математики. Порой нам очень уж хочется всё формализовать, даже там, где это совершенно неуместно, в частности и в нашем деле, в преподавании.

Вот пример. Где возрастает функция $y=x^2$: на $[0,\infty)$ или на $(0, \infty)$? Вопрос не стоит и выеденного яйца — какая разница, всё зависит от контекста или имеющейся договорённости — любой! Но я знаю, что в представительной комиссии петербургских учителей однажды была дискуссия по этому поводу, закончившаяся даже голосованием!

Ещё пример. Надо ли находить ОДЗ в тождественных преобразованиях?

Ответ непрост. Я вернусь к этой ситуации позже.

4) *«Неуложенные» знания*.

Типична попытка детей объяснить что-либо исходя из сведений, добытых на последнем уроке. Если мы только что прошли синус, то все задачи будут решаться только с помощью синуса, а когда пройдем косинус, то синус «получит отставку».

А однажды одна хорошая моя ученица Лена Г. на мой вопрос «Почему сужается струя воды, текущая из крана?» ответила, что это следует из теории относительности. Увидев мои квадратные глаза, она тут же добавила, что они как раз её проходят на физике.

5) *Нежелание вдумываться и толковать*.

Стандартный пример: дети посмотрели кинофильм, телепередачу.

— Ну и каковы ваши впечатления?

— Нормально.

А однажды я видел в работе ученика нарисованный угол, равный 0°. Это была пара лучей с общей вершиной — всё как полагается,— образующая острый угол, от стороны к стороне была нарисована маленькая дужка, а рядом с ней так и написано: 0°.

Сколько раз я читал: $\vec{0}$ - это вектор, начало и конец которого совпадают. Но, если вспомнить привычное определение вектора в школьном курсе математики, они не могут совпадать!

И не один раз я видел беззаботное несовпадение аналитических и графических результатов работы.

Одно ученическое «непонимание» любопытно. Оно касается графиков. Известно, что при $a > 0$ график функции $f(x - a)$ сдвинут относительно графика $f(x)$ вправо, а график функции $f(x + a)$ влево. Учеников « тянет» вначале «сделать наоборот». Может быть, это вызвано тем, что знак «-» ассоциируется с уменьшением, уменьшение абсциссы – с движением влево, а знак «+» ассоциируется с увеличением, увеличение абсциссы – с движением вправо?

Здесь может помочь несложное рассуждение. Сдвиг (иначе – параллельный перенос или просто перенос) задаётся вектором. Сдвиг влево или вправо – это сдвиг на вектор, параллельный оси абсцисс. Вектору в системе координат соответствует пара координат. Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$ с координатами (p, q). Если (x_1, y_1) - координаты точки A, (x_2, y_2) – координаты точки B, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются из равенства $(p, q) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, откуда получаем:

$$x_2 = x_1 + p,\ y_2 = y_1 + q. \qquad (1)$$

В этом равенстве (x_1, y_1) толкуем как координаты исходной точки, (x_2, y_2) - координаты точки, полученной в результате сдвига на вектор (p, q).

Так как при горизонтальном сдвиге (переносе вдоль оси абсцисс) ордината точки не меняется, то горизонтальный сдвиг задаётся вектором $(p, 0)$. Согласно равенствам (1), мы получаем, что

$$x_2 = x_1 + p, y_2 = y_1. \qquad (2)$$

Выразим теперь «старые» координаты через «новые»:

$$x_1 = x_2 - p, y_1 = y_2. \qquad (3)$$

Перейдём к графикам функций. Пусть нам была дана функция $y = f(x)$. Если точка (x_1, y_1) принадлежит графику функции f, то выполняется равенство $y_1 = f(x_1)$. Используя уравнения (3), приходим к равенству $y_2 = f(x_2 - p)$. Из него видно, что сдвинутая точка (x_2, y_2) принадлежит графику функции $y = f(x - p)$.

Теперь займёмся картинкой.

При $p > 0$ вектор сдвига $(p,0)$ «смотрит» вправо, поэтому точка (x_2, y_2) расположена правее точки (x_1, y_1) и сдвиг графика идёт вправо на величину p. Для толкования графика уравнения $y = f(x+p)$ при $p > 0$ достаточно здравого смысла. Ясно, что он сдвигается на величину p относительно графика $y = f(x)$, вправо сдвинуться уже невозможно, так как там находится график уравнения $y = f(x-p)$ – осталось сдвинуться влево.

Формальное рассуждение уже ничего не добавляет. Впрочем, можно обратить внимание учеников, что уравнение вида $y = f(x + p)$ ($p > 0$)можно толковать как уравнение вида $y = f(x - (-p))$, сведя ситуацию к предыдущему случаю, учитывая при этом, что вектор $(-p, 0)$ «смотрит влево».

Осталось перейти к примерам. График уравнения $y = (x - 1)^2$ строим как сдвинутый на вектор (1,0) (вправо на 1) график уравнения $y = x^2$. график уравнения $y = (x + 1)^2$ строим как сдвинутый на вектор (-1,0) (влево на 1) график уравнения $y = x^2$.

6) *Неподготовленность к стилю мышления*.

Я уже говорил о практическом мышлении. Однажды принимал экзамен на заочное отделение у школьного учителя труда, мужчины лет сорока с лишним.

— Как разделить отрезок пополам?

— Очень просто: измерить, длину разделить пополам и отмерить половину длины на отрезке.

— А если циркулем и линейкой, причем линейка без делений?

— Да где же вы видели линейку без делений?

Ещё пример из беседы с учеником вечерней школы, достаточно солидным по возрасту.

— Сколько плоскостей, перпендикулярных данной, можно провести через перпендикуляр к данной плоскости?

— Одну.

—??

Следуют долгие препирательства. Затем:

— Но ведь за раз можно провести только одну плоскость!

Ещё пример, сам слышал по радио, как один писатель восторгался выходом космонавта А. Леонова в открытый космос: «Но самое невероятное то, что Леонов вернулся обратно».

И ещё пример, сам читал в книге отзывов посетителей первой очереди ленинградского метро.

— Это потрясающе! Каждая следующая станция прекраснее предыдущей!

Потом шла запись:

— Чудак, а если бы ты ехал в обратную сторону?

А вот из жизни наших политиков. После приёма в НАТО прибалтийских стран наша Дума всполошилась - супостаты приближаются к нашим границам! Им бы ещё сообразить, что и мы тем самым приближаемся к границам НАТО.

Школьный пример: известные трудности учеников при изучении комбинаторики.

7) *Непривычность новых представлений*.

Классический пример — квантовая механика.

В книге В. Босса написано такое: "В целом квантовая механика - совершенно уникальная научная дисциплина, научившаяся справляться с обширным кругом явлений в отсутствие их понимания."

В школе — комплексные числа.

8) *Разнонаправленность «миров»*.

Глобальная вещь. Традиционный пример: «Запад есть Запад, а Восток есть Восток», мир взрослого и мир ребёнка. Впрочем, есть и вполне житейские примеры, если только «миры» свести к личностям и установкам.

Вот маленькая история. Однажды на мой урок пришла коллега. Я начал вполне обычно, с проверки домашнего задания. Вызываю одного — не сделал, другого — тоже не сделал, третьего — опять не сделал! «Ну,— думаю,— пора кончать это позорище». И стал разбирать домашнее задание фронтально, вполне прилично получилось. После звонка думаю, что коллега скажет, хорошо бы забыла про это жуткое начало урока. А сказала она так: «Это потрясающе! Вы вначале вызвали как раз тех, кто не сделал!»

Всё это в той или иной степени приходится учитывать, чтобы предотвратить непонимание. В «аксиоматике» урока важен не только перечень понятий, которые будут затем использованы, но обязательно в нужном для меня смысле. Если я говорю «многогранник», то что именно я имею в виду: тело или поверхность? А если сказал «угол», то обязательно выпуклый? Разные смыслы учитывать совершенно необходимо. Однажды среди коллег я произнес: «Производная» — и попросил сказать, о чём они сразу же подумали. И о чем же? Кто о чём: о пределе, о скорости, об угловом коэффициенте и даже о некотором сомножителе в выражении для приращения функции
$\Delta y = \kappa\Delta x + a(x)\Delta x$.

Разные смыслы можно увидеть в самых простых ситуациях. Для начала поговорим о числе 1. Точнее — о единственности. Что имеется в виду, когда мы говорим в математическом контексте о единственности какого-либо объекта? Оказывается, не одно и то же. В теории – одно, на практике – другое.

Когда мы говорим о единственности прямой, проходящей через данную точку и параллельной заданной прямой (на плоскости), то это означает, что таких прямых не может быть больше одной. Либо одна (в евклидовой геометрии), либо таковых вообще нет (в сферической и вообще в римановой геометрии). Аналогично понимается единственность перпендикуляра. Существование этих объектов не предполагается, и, более того, объект может отсутствовать. Условно говоря, здесь 1 —это либо 1, либо 0.

Когда мы говорим о единственности корня уравнения, то здесь 1 всегда именно 1. Единственность означает здесь и существование объекта, и что таковой один. В иных случаях при решении уравнения учитывается кратность корня. Если кратность корня равна, к примеру, 10, то мы этот единственный корень считаем десять раз. Условно $1 = 10$. Когда мы решаем геометрическую задачу на построение, то единственность построенного, скажем, треугольника понимается как единственность с точностью до равенства, т. е. до положения на плоскости. На самом деле таких треугольников бесконечное множество. Условно $1 = \infty$.

И, наконец, шуточное толкование в духе В. Маяковского, написавшего :" Единица - ноль !". Этакая поэтическая вольность? Но! И 1 , и 0 - нейтральные элементы в аксиомах поля вещественных чисел: 1 - нейтральный элемент для умножения, 0 - нейтральный элемент для сложения. Потому в определённом смысле за ними стоит одно и то же понятие, а потому Маяковский невольно что-то угадал.

Здесь же отмечу, что в иных текстах термин "один " толкуется по-разному: и как "ровно один" ("только один "), и как " хотя бы один ". По моему разумению у человека один нос, а не «ровно один» или «только один». То же про другие числа, полученные в результате счёта. Мы стали нечто считать и сосчитали. И не надо это подчёркивать специально прочими словами. А если требуются другие толкования слова " один ", к примеру, как " хотя бы один ", то это требуется специально оговаривать. К тому же слово «ровно » неоднозначно, как во фразе «можно провести ровно одну прямую, параллельную данной». (В анекдотическом случае некий ученик взял линейку и провёл по ней прямую – получилось «ровно».) Особый случай - кратные корни уравнения. Если они нас стали интересовать, то необходима соответствующая оговорка.

Конкретно. Рассмотрим уравнения на множестве вещественных чисел. Уравнение $x^3 = 3$ имеет один корень. Уравнение $x^2 = 3$ имеет два корня, то есть хотя бы один корень. Уравнение $x^2 = 0$ имеет один корень второй кратности. Вопрос: " При каком значении a уравнение $x^2 = a$ имеет один корень?" имеет ответом $a = 0$. На вопрос: " При каком значении a уравнение $x^2 = a$ имеет хотя бы один корень?" ответом является $a \geq 0$. Вопрос " При каком значении a уравнение $x^2 = a$ имеет не больше одного корня ? " имеет ответом $a \leq 0$.

Теперь терминология становится чётче. Беда, однако, в том, что математикам, а особливо преподавателям или авторам учебников, трудно договориться об однозначном употреблении знака или термина - чего стоит словесная путаница, например, с максимумом, глобальным максимумом, абсолютным максимумом и наибольшим значением.

Теперь поговорим о числе 2. В определении равнобедренного треугольника говорится о равенстве двух его сторон. Но равносторонний треугольник мы также считаем равнобедренным, а в нём равны все стороны, коих три. Поэтому в определении равнобедренного треугольника 2 означает «не меньше чем 2». Формально говоря, надо было бы сказать, что равнобедренный треугольник — это тот, в котором не меньше двух равных сторон. Или «есть равные стороны». Но кто же такое будет говорить? Можно, правда, пойти по другому пути и считать, что равносторонний треугольник — это сразу три равнобедренных треугольника, но это уж совсем чересчур. (Один мой ученик как-то назвал равносторонний треугольник «очень равнобедренным».)

В других случаях мы понимаем число 2 именно как 2, когда, например, ищем число корней уравнения или когда находим число способов в комбинаторной задаче. Здесь 2— это 2 и ничего другого. Наконец, возвращаясь к понятию кратности корня, мы считаем, что квадратное уравнение с дискриминантом, равным нулю, имеет два равных корня, хотя на самом деле корень один. А от учеников часто слышу: «Если две точки (прямые, плоскости) совпали, то это как считать — как одну точку или как две?» Очень полезно всё это разъяснить.

Ещё пример. Я говорю: прямая проходит через отрезок, имея в виду, что она его содержит. А кто-то рисует прямую, его пересекающую, по-своему толкуя это «через».

Однажды было такое. Я уже порядком позанимался с учениками комплексными числами и собирался рассказать, что для них не существует отношение линейного порядка, иначе говоря, они не сравниваются. Начал с вопроса : «Можно ли сказать, что $i>0$?» Был и такой ответ: «Смотря какое i».

А вот сохранившийся в моей памяти эпизод со времен начала педагогической деятельности. Итак, шестой класс, урок арифметики. Начинаю рассказывать про обыкновенную дробь и как она устроена.

«Числитель,— говорю,— стоит над дробной чертой, а знаменатель стоит под дробной чертой». На первой парте, вытянув ноги до середины прохода, сидит ученик-второгодник.

— Да? — очень натурально удивляется он.— А в прошлом году было наоборот!

Ещё пример. Весьма толковый мой ученик, увидев впервые традиционный схематический рисунок в текстовой задаче на движение, спросил: «А почему поезда у вас ходят по прямой?»

Быть может, надо вообще действовать от противного — объяснять не так, чтобы тебя понимали, а так, чтобы нельзя было не понять? Это заметил ещё Вергилий.

И сдаётся мне, что самое интересное в профессиональной работе учителя математики — преодолеть непонимание. Конкретное непонимание конкретного Васи, когда необходимо «влезть» именно в его голову.

Вот случай, который однажды произошел у меня на уроке. Занимаясь комплексными числами, даю задачу: "Имеется уравнение $z^2 + z + 1 = 0$. Пусть z_1 и z_2 - его корни. Вычислите $z_1^3 + z_2^3$."

Ее несложно сделать "в лоб". Но хотелось покрасивее, а потому предлагаю такое решение: Умножим исходное уравнение на ($z - 1$). Получим уравнение: $z^3 - 1 = 0$, то есть $z^3 = 1$. Так как z_1 и z_2 являются и корнями последнего уравнения, то ясно, что нужная нам сумма равна 2. Всё.

На каких-то лицах - та самая реакция, которую добивался, однако тянется рука - "не понимаю". И ещё одна такая же. И что делать? Ну не повторять же снова сказанное!

Попробовал начать " с конца". Буквально. Итак. Пусть мы имеем уравнение $z^3 = 1$. Оно равносильно уравнению $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$. Каждый корень уравнения во вторых скобках, то есть наши z_1 и z_2 , при возведении в куб даст по 1, а потому их сумма равна 2.

И тех, кто не понял вначале, это рассуждение убедило. Но в чём же была загвоздка?

Небольшое отступление - о "хороших" учителях и даже о "лучших" учителях. Довольно часто доводилось слышать такой оборот. Почему-то считается, что учитель тем лучше, чем выше уровень школьников, с которыми он работает. А по-моему разумению, лучшие учителя работают в начальной школе. Именно там максимален разрыв понимания (чего бы то ни было, а особенно абстракций) между учителем и школьником. Именно там наше профессиональное мастерство - объяснять непонятное - требуется в высшей степени.

У меня есть совсем крошечный опыт работы с дошколятами, учил я их как-то началам шахматной игры. Вот это была работа…

Но именно они, учителя начальной школы, оказываются на задворках общественного внимания - среди них нет ни Соросовских лауреатов, ни "учителей года", ни победителей конкурса «Династия»..

Как же можно работать собственно над пониманием? Попробую рассказать, как это пытаюсь делать я.

Разумеется, речь идёт о передаче собственного понимания, того, к которому пришёл сам. Если его нет, то неясно, какого понимания добиваться от учеников. Хотя в какой-то мере верно, что своё понимание созревает и в процессе объяснения.

Рассказывая новое, я стараюсь объяснить, откуда оно взялось. Какие вопросы надо было разрешить? Действительно, а зачем понадобился синус? И откуда взялась необходимость в производной? Рассказ о ней я начинаю обычно с астрономии, Птолемея, Кеплера, задач, которые они пытались решить. При этом совершенно не обязательно передавать буквально историю вопроса — это немыслимо.

Полезно сначала рассказать план всей темы, затем постоянно к нему возвращаться, точно указывая место, в котором мы находимся. Понимание конкретного теоретического вопроса иногда возможно только в контексте. Почти всегда обязателен взгляд назад, на пройденный путь.

Уроки, где излагается трудный для понимания материал, предпочитаю вести как диалог. Обязательно провоцирование вопросов. Если после объяснения я таковых не услышал, то сработал не лучшим образом. Текущее понимание можно проверить, спросив у детей: «О чём я буду говорить сейчас?» Если они не могут предвосхитить рассказ, то плохо понимают происходящее (хотя могут при этом быть идеально внимательны). Во время объяснения важен выход на границу с непонятным. Хорошо, конечно, понимать всё, но необязательно сразу. Есть тут один спорный момент. Если я рассказываю материал так, что он не вызывает трудности у сильного ученика, но сложен для ученика среднего, то в этот момент урока, по моему разумению, я работаю как раз со средним учеником, ибо именно его вытягиваю на более высокий уровень. То же можно сказать и о паре средний — слабый. Работать с учеником — это не опускаться, а вытягивать. Весьма часто моё мнение тут не совпадало с мнением гостей и администрации. Но ещё раз повторю: дискуссии в классе важны не только для участников, но и для тех, кто им внимает.

Я уже говорил о разных типах мышления. Даже ученики в специализированных школах разнятся в этом отношении, и математику для «математиков» надо рассказывать иначе, чем математику для «физиков». Человек с практическим складом мышления не то чтобы не понимает иных доказательств. Вовсе нет! Гораздо чаще он не понимает их необходимости. Это прекрасно видно в начале систематического курса геометрии.

Д. Гильберт призывал лекторов по пять раз повторять одно и то же, дабы довести до слушателей некую истину. Я не очень с ним согласен. Пусть пять раз, но не одно и то же. Неисповедим, но интересен путь в человеческую голову! Пять раз повторить одно и то же — это не объяснять, а вдалбливать. Вот это мы умеем делать.

Последую примеру К. Вейерштрасса, который на полях конспектов своих лекций делал пометку: «Здесь — анекдот». Итак, анекдот.

— Не понимаю, как это Ковальский врезался в столб на своём мотоцикле.

— Чего же тут непонятного? Вот ты видишь столб?

— Вижу.

— А Ковальский не видел.

Не так ли частенько и мы объясняем математику? Поэтому, если есть возможность растолковать одно и то же, как говорят, на пальцах, а потом геометрически наглядно, а потом аналитически, да ещё не одним способом, то я стараюсь её не упускать. Вот яркий пример.

Отыскание первообразной — задача в первую очередь аналитическая. Для её более полного осмысления я рисую известную картинку (рис. 103).

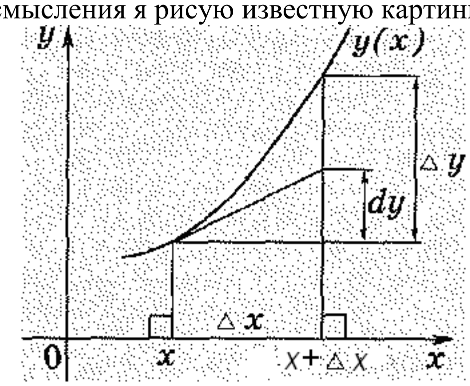


Рис. 103

Затем объясняю, что задача нахождения первообразной согласно этой картинке сводится к нахождению отрезка Δy, зная отрезок dy, и при этом в любой исходной точке x.

Прекрасный пример пользы от картинок - геометрический образ дифференциального уравнения, называемый фазовым пространством.

Рисование картинок для прояснения ситуации, заданной словесно или формулой – частный случай сведения новой и не вполне ясной ситуации к уже известной, отыскания подходящей, но уже известной модели. Работа с матрицами, к примеру, в некоторых случаях - это работа с движениями плоскости и устрашающее перемножение матриц – это композиция движений, из чего моментально следует его ассоциативность и отсутствие коммутативности.

Ещё пример - из комбинаторики. В этой теме традиционно наглядности почти нет. Поэтому так важно найти хоть какой-либо способ увязать комбинаторные соотношения с рисунком. По счастью такая возможность, хотя бы и частичная, существует - для числа сочетаний. Именно, число сочетаний C_n^k можно трактовать как число различных путей на шахматной доске из левого нижнего угла доски в правый верхний угол притом, что каждый путь идёт только слева направо или снизу вверх. Если обобщить понятие шахматной доски как таблицы, в которой m столбцов и n строк, то число таких путей вычисляется по формуле C_{m+n}^m или - с тем же результатом - C_{m+n}^n. С помощью такой схемы можно не только оживить всю тему, но без всяких вычислений доказать иные комбинаторные тождества.

Для улучшения понимания важно варьирование несущественного, что хорошо известно из методики, достаточно вспомнить смену букв на рисунках при доказательстве геометрических утверждений, да и смену самих рисунков.

Совсем новые знания иногда с трудом укладываются в голове, например отрицательные числа. В иных случаях работает старый приём — метафора. В данном случае: отрицательные числа — это расход, в то время как положительные — приход. Не всегда можно найти удачную метафору, как, например, для комплексных чисел.

Важнейший момент в понимании теории — её применение для объяснения того, что, грубо говоря, находится под носом. Почему потолок параллелен полу? Почему человек норовит сжаться, свернуться, когда ему холодно? Ну и так далее. Зачем мы доказываем существование перпендикуляра к плоскости, когда ни у кого не возникает в этом сомнения? Хотя бы затем, говорю я детям, чтобы показать, что та геометрическая теория, которую мы изучаем, хорошая, она действительно объясняет то, что видим.

Самые большие трудности при объяснении возникают тогда, когда приходится ломать устоявшуюся точку зрения или даже просто менять её. Примеры из науки хорошо известны: аксиома параллельности, мнимые числа (здесь даже название выразительно), вероятностный подход при описании действительности. Понимание новой точки зрения порой мучительно и для профессионалов, чего уж говорить о детях! Я помню свои ученические муки и при изучении комплексных чисел, и при осмысливании несчётных множеств, и при изучении основ анализа. Аналогичные процессы происходят и в голове школьника при переходе к систематическому курсу математики, да и по мелочам.

Интересные разговоры возникают порой в самых обычных, казалось бы, ситуациях. Признак перпендикулярности прямой и плоскости сводит континуум возможностей (заданный определением прямой, перпендикулярной плоскости) всего к двум. Проще говоря, не надо — да и возможности такой нет в принципе — проверять (согласно определению) перпендикулярность данной прямой и каждой прямой на плоскости. Достаточно проверить всего две такие перпендикулярности. Здесь мы видим чрезвычайно принципиальный скачок: сведение бесконечного к конечному. Поневоле напрашиваются хрестоматийные примеры в истории математики. Проблема четырех красок оказалась решённой после того, как удалось свести её к конечному (хотя и достаточно большому) перебору вариантов, после чего окончательную проверку этой гипотезы сделали с помощью компьютера. Интрига в доказательстве великой теоремы Ферма в том и состояла, что такой переход — от конечного к бесконечному — никак не давался математикам.

Проверить понимание школьника можно на разных элементах математической теории: определение, понятие, формула, задача, теорема, раздел курса, предмет в целом.

Как проверить понимание определения? Я предлагаю такие вопросы:

1) Каков характер определения: описательный или конструктивный?
2) Что определяется: объект или свойство?
3) Для описательных определений: из какого множества выбирается определяемый объект?
4) Можно ли сказать определение своими словами? Если ученик способен только на дословное повторение, то это говорит лишь о его хорошей памяти. Понять — это в начальной стадии именно переформулировать с сохранением смысла, быть может, опустив тонкости.

Иногда приходится объяснять, почему определение именно такое, а не другое. Пример. Почему $0! = 1$, а не так: $0! = 0$? Дело в том, что для факториала существенно равенство $(n+1)\,! = n\,(n+1)$, которое перестает быть полезным, если положить $0! = 0$. (Впрочем, тут возможен более глубокий разговор – о гамма – функции, обобщающей понятие факториала.)

Ещё пример: почему множество всего из одной точки считается выпуклым? Можно, конечно, сказать детям, что это удобно, но почему удобно именно это?

По случаю замечу, что записывать величину угла, к примеру, в полградуса (как 0,5°) некорректно, такой записи нет в таблицах, и понятно почему: доли градуса записываются не в десятичной системе счисления.

А иногда объясняешь, почему вообще нет определения тому, что вроде бы определить можно. Почему нет определения для выражения 0^0, которое естественно считать равным 1 исходя из свойств функции x^x. Но нет, нарушаются свойства степеней, именно тогда получается, что

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1^0}{0^0} = \left(\frac{1}{0}\right)^0,$$ что нелепо.

А почему нельзя определить символы $\frac{1}{0}$ как ∞, $\frac{1}{\infty}$ как 0? В некоторых случаях очень удобное соглашение. Но, увы, тогда получаем, сохраняя свойства чисел, такую цепочку равенств: $a = a \cdot 1 = a \cdot (0 \cdot \infty) = (a \cdot 0) \cdot \infty = 0 \cdot \infty = 1$ — для любого a, что нелепо.

Ещё примеры: почему нуль – вектор остался без направления, почему комплексный нуль не имеет аргумента, почему не выделено главное значение для корня из комплексного числа — ведь на множестве вещественных чисел все теоремы о корнях доказываются после того, как выделено одно его значение? Почему нет определения для периметра объединения двух фигур, у каждой из которых есть свой периметр? Ведь считаем же мы длину границы государства, состоящего из островов.

Добавлю, что все эти вопросы задают сами дети — при надлежащем, разумеется, преподавании.

Понять определение иногда очень непросто, особенно в геометрии – там «мешает» наглядная очевидность, зачем ещё определять, когда и так «всё видно»? Вот примеры.

Не вполне понятно определение ломаной. Замкнутая ломаная *ABCA* и замкнутая ломаная *ABCAB* - это одна и та же ломаная? А ломаные *ABCA* и *BCAB*? Как множество точек - разумеется, но ведь ломаная - это не просто множество точек, но и последовательность отрезков. А указанные последовательности - разные.

Поэтому граница треугольника задаёт не одну замкнутую ломаную, а шесть - по две из каждой вершины.

Отсюда получается, что определение равенства фигур, принятое в геометрии, для них не годится. Не следует ли отсюда такой парадоксальный вывод: замкнутая ломаная (и вообще ломаная) - не геометрическая фигура?

Ясность приходит тогда, когда понимаешь, что в понятии ломаной слепились два толкования: ломаная как фигура, объединение отрезков, как, например, в границе треугольника и ломаной как пути, как например, в уникурсальных фигурах (проводимых на бумаге одним росчерком при различных ограничениях) .

А определение грани многогранника и вовсе не очевидно, когда многогранник не является выпуклым, да ещё с самопересечением его поверхности. Хорошая получается беседа на уроке, когда указываешь такой многогранник. У него, согласно термину, "много граней", но чего именно много?

Вообще, преподавание можно строить так, чтобы не столько я задавал вопросы, а дети отвечали, а «совсем наоборот» - чтобы я отвечал на вопросы детей. Ух, как интересно может получиться! И порой получается. Такие начинаются беседы, которые мне и в голову не приходили до начала урока.

Здесь не надо скупиться на «пятёрки».

Как проверить понимание объекта (понятия)? Здесь вопросы такие:

1) Какими свойствами обладает этот объект?
2) Какими признаками обладает этот объект?
3) Какие из его свойств являются характерными?
4) Какие определения можно дать этому объекту?
5) Зачем появилось это понятие?
6) Где оно применяется?

Уж чего проще, чем единица? Однако же она может быть и степенью (2^0), и логарифмом (lg10), и синусом, и тангенсом, и квадратом тангенса, и, разумеется, суммой квадратов синуса и косинуса одного аргумента, и 0!, и первым замечательным пределом, а если совсем абстрактно — это нейтральный элемент операции умножения в поле вещественных чисел, да и сколько ещё всякого можно сказать про единицу. И чем больше мы про неё знаем, тем лучше мы её можем понять.

Приведу пример того, что можно делать при изучении арифметической прогрессии. После определения начинаем знакомиться с её свойствами. Можно доказать такие:

а) Формула для *k*-го члена: $a_k= a_1 + d\ (к-1)$.

б) Формула, связывающая три соседних члена: $a_k= 0{,}5\ (a_{k-1} + a_{k+1})$.

в) Все члены прогрессии в системе координат располагаются на одной прямой. (Отсюда моментально следует, что две бесконечные прогрессии не могут иметь больше одного совпадающих членов.)

г) Формула для суммы *n* членов: $S_n = 0{,}5(a_1 + a_n)\ n$.

Затем встаёт вопрос: какие из этих свойств являются признаками прогрессии? Например, если в последовательности (a_n) выполняется соотношение $a_k= 0{,}5\ (a_{k-1} + a_{k+1})$ для всех членов, кроме крайних, то будет ли она прогрессией?

Если свойство является одновременно и признаком, то оно становится характерным свойством объекта и может быть положено в основу его определения.

На последних уроках темы ученики смогли мне дать штук шесть определений прогрессии.

Как проверить понимание формулы? (Будет практичнее, если мы будем иметь некую формулу перед глазами, пусть формулу общего члена арифметической прогрессии:

$a_k = a_1 + d(\kappa-1)$.)

1) Какие величины участвуют в формуле?

2) Как выразить из формулы каждую из входящих в неё величин?

3) Каков характер зависимости величин между собой? Например, зависимость a_κ от κ линейная.

4) Как она устроена (симметричность, размерность)?

5) Какие следствия можно получить из этой формулы? В нашей формуле можно получить такое выражение для κ: $\kappa = (a_{k+1} - a_1) / d$, после чего быстро решаются задачки такого типа: «В прогрессии $a_1 = 3$, $d = 0{,}02$. Какой номер имеет член прогрессии, равный 5?»

6) Как можно обобщить формулу?

В нашем случае можно предложить такое обобщение: $a_q = a_p + d\,(q-p)$, где p, q — номера членов прогрессии. Из этой формулы легко выразить разность прогрессии , после чего быстро можно ответить на такой вопрос: «Чему равна разность прогрессии, если $a_{30} = 2{,}3$; $a_{100} = 3{,}7$?»

Неплохой пример обобщения формулы — площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, кольца равна произведению средней линии на высоту при соответственном толковании средней линии и высоты.

7) Возможны ли интерпретации формулы?

Любопытно «лестничное» толкование нашей формулы. Если я стою на высоте a_1 над землей, d— высота ступеньки лестницы, то a_κ — высота, на которой я нахожусь, поднявшись на κ-1 ступеньку.

8) Где можно применить формулу?

Вот задача о прогрессии – найти длину цилиндрического рулона скотча.

Ещё пример. Формулу, полученную в теореме косинуса, (в треугольнике ABC $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$) , естественно применить для нахождения углов треугольника, для определения его вида в зависимости от его углов, если переписать её в таком (естественном, исходя из названия) виде : $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$.

Это общеизвестно. Но можно использовать её для нахождения других сторон треугольника (b и c). Один путь окольный - получить из неё теорему синусов, а дальше идти известным путём. Но можно идти " в лоб " - рассматривать исходное равенство как квадратное уравнение, скажем, относительно b. Решив его, получим после упрощений: $b = c\cos A \pm \sqrt{a^2 - c^2\sin^2 A}$. Из его анализа становится ясно, что задача о решении треугольника по двум сторонам и углу против одной из них (в данном случае - по сторонам a и c и углу A) может иметь два решения, одно решение и ни одного решения; всё зависит от знака подкоренного выражения и наличия знака ±. Знак подкоренного выражения зависит от знака разности ($a - c \sin A$). Ясен геометрический смысл этой разности. Выражение $c \sin A$ - это расстояние от точки B до прямой AC. Значит, число решений зависит, в частности, от сравнения стороны a с этим расстоянием.

Это исследование несложно довести до конца, разобравшись со знаком ±. Нам нужно выяснить знак разности $c\cos A - \sqrt{a^2 - c^2\sin^2 A}$. Если разность не является положительной, то решение одно; если же она положительна, то решений два. Неравенство $c\cos A - \sqrt{a^2 - c^2\sin^2 A} > 0$ равносильно условию $c > a$. Приходим к известному результату: для наличия двух решений необходимо и достаточно выполнение неравенства $c \sin A < a < c$.

Мне такое исследование кажется даже более естественным, чем соответствующее исследование на основании теоремы синусов.

9) *Как доказать формулу*?

Разумеется, для каждой формулы задаются наиболее выигрышные вопросы из этого списка.

Кроме того, ясно, что формулы, полученные в геометрии, порождают разнообразные задачи для курса алгебры (уравнения, неравенства, системы, доказательства тождеств) и начал анализа (функциональные зависимости, экстремальные задачи). Один из самых известных примеров — пифагоровы тройки чисел.

Как проверить понимание задачи или теоремы? (Возможно, я несколько повторюсь.)

1) Откуда взялась эта задача? Почему мы решаем именно её?
2) Какой факт утверждается? Можно ли её переформулировать?
3) Какими условиями обеспечивается результат в задаче? Все ли условия использованы при решении? Являются ли эти условия необходимыми?
4) Какие факты использованы при доказательстве?
5) Ясна ли логическая схема доказательства? Держится ли она полностью в сознании?

В начале курса геометрии (в 7 и 10 классах) я после доказательства каждой теоремы записывал на доске «скелет» теоремы в виде схемы конъюнкций, дизъюнкций и следований. Ученики запоминали эту схему и ответ начинали с её воспроизведения на доске, а уже потом «оживляли» её рисунком и буквами. Другой вариант, более пригодный для случая, когда проводятся дополнительные построения. Перед учениками на доске появляется не один рисунок, на который наносится всё новое, а последовательность рисунков. Каждый следующий рисунок отличается от предыдущего одним элементом. Получается как бы диафильм, и логическая схема доказательства запоминается в виде набора картинок.

6) Какие следствия возможны из полученного результата?
7) Можно ли обобщить полученный результат?
8) Можно ли получить его как-то иначе?

Этот вопрос всегда уместен, Ведь у детей всё, к чему мы так привыкли, впервые. Вот теорема, которую учителя знают, как говорится, с закрытыми глазами: «В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы». И что же тут можно придумать? Пожалуйста — пример детского творчества.

Внутри прямого угла построим угол 60° так, что его вершина совпадает с вершиной прямого угла, а одна из сторон идет по меньшему катету. Тогда исходный треугольник разобьется на два: равносторонний и равнобедренный. Дальше по известному принципу: «Смотри!»

9) Как полученный результат можно интерпретировать?
10) Как его можно применить?

Здесь я опять хочу привести пример об арифметической прогрессии. Несложно видеть, что любая последовательность, полученная из прогрессии прибавлением постоянной ко всем её членам и умножением их на постоянную, является также арифметической прогрессией. (Это действительно можно «видеть», если интерпретировать члены прогрессии как точки на прямой.)

Известна такая задача: «Доказать, что если $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ - члены арифметической прогрессии, то a^2, b^2, c^2 также члены арифметической прогрессии». Требуемый результат несложно получить, если первую тройку превратить во вторую, действуя с прогрессией дозволенным образом. Для этого достаточно из каждого выражения в первой тройке вычесть $\frac{1}{b+c}$, затем разделить на то, во что превратится второй член из этой тройки. Получим такую тройку: 0, 1, $\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}$, Далее умножим все эти выражения на b^2-a^2, а к полученной тройке прибавим по a^2, В результате оказывается, что тройка a^2, b^2, c^2 даёт прогрессию.

11) Верно ли обратное утверждение? В некоторых случаях – можно ли найденное свойство объекта обратить в его признак? Например – наличие центра симметрии у параллелограмма.

Ясно, что такие вопросы относятся в первую очередь к задачам на доказательство. Задавать их необязательно все, а только наиболее удачные.

Как проверить понимание некоторой темы курса? Здесь можно предложить такие вопросы:

1) Какова структура раздела: что изучается и в какой последовательности?

2) Каковы связи между объектами, введёнными в этом разделе? Какие из них наиболее существенны?

Пример: изучение параллельности и перпендикулярности в стереометрии. Первоначально набор теорем кажется ученику довольно бессвязным. Но их можно структурировать, разделяя на свойства и признаки. Так, теорема: «Прямая, являющаяся пересечением двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости, сама перпендикулярна третьей плоскости» — является ещё одним признаком перпендикулярности прямой и плоскости. В таком качестве теорема лучше укладывается в голове.

3) Каковы связи этого раздела с другими?

Это старый вопрос внутрипредметных связей. Чем больше таких связей известно ученику, тем лучше он понимает изучаемый раздел. Прекрасный пример — комплексные числа в разных своих формах: алгебраической, геометрической, тригонометрической и показательной. Почему-то во всех программах, где были комплексные числа, о показательной форме не упоминалось.

4) Почему он находится именно в этом месте курса? Возможны ли его перестановки?

Один из дискуссионных примеров: можно ли поменять местами производную и интеграл? Или лучше вообще их изучать совместно?

Здесь же скажу о понимании текста. Для меня достаточно, чтобы ученик задал мне вопрос по этому тексту, неважно какой трудности. Если же после прочтения текста у него не возникает никаких вопросов, то мне сомнительно, что у него произошло подлинное понимание.

Когда мы спрашиваем:" Что непонятно?" , а ученик заявляет, что ему всё понятно - вот тут - то и звучит для учителя сигнал тревоги. И я уже давно не произношу таких слов - они просто "шум" на уроке. Взамен должна быть предложена операциональная проверка **понимания**.

Например. Если я даю задание разобраться в каком-нибудь фрагменте учебника, то настаиваю на том, чтобы этот фрагмент был прочитан минимум три раза. В результате первого прочтения надо получить представление о тексте в целом и разобраться в его структуре. В результате второго прочтения должны появиться вопросы по тексту и постараться на них ответить самостоятельно. В результате третьего прочтения должны появиться вопросы содержательного характера, обращённые ко мне.

И, наконец, *как проверить понимание всего предмета* - очень фрагментарно.

Прежде всего ясно, что оно разное - от школьника до профессионала, от ребёнка до академика. И даже между профессионалами, как мы хорошо видим на примере книг по элементарной геометрии, написанных выдающимися учёными в разное время и в разных странах. Поэтому я буду иметь ввиду только наше, учительское понимание.

Одно ясно совершенно точно — понимание предмета учеником во многом, если не во всём, определяется тем, как понимает его учитель.

И несколько мыслей.

1) Если математика для кого – то всего лишь наука о том, как считать, то такое понимание — наш грех, учительский.

2) Если учитель понимает геометрию как бесконечную возню с задачами про треугольники и окружности, то легко себе представить, какой багаж останется в головах его учеников лет через пять.

3) То, что мы делаем в текстовых задачах, определяется тем, как мы понимаем их суть. Что они для нас — почти сказочный жанр со своими условностями или дидактическая попытка ввести в обучение элементы прикладной математики?

4) Понимаем ли мы необходимость доказательства при решении уравнения (неравенства, системы)? Если оно необходимо (а как же иначе по смыслу нашей деятельности?), то никуда не денешься от равносильностей или других доказательных рассуждений.

5)Является ли для нас математика по сути своей единой наукой или она разделена так же, как школьные предметы? Даже если мы формально преподаем разные предметы: алгебра, геометрия, анализ, то на что мы делаем акцент - на их связи или на их различие?

6) Если для учителя математика – это наука, а не просто интеллектуальное занятие, то необходима её связь с другими науками, ибо, как об этом говорил А.Александров, суть любой науки в её связях с другими науками.

Много можно сделать для понимания при обобщающем повторении. Возьмем, к примеру, теорему Пифагора.

Начинаем с классической формулировки для прямоугольного треугольника. Далее. в прямоугольном треугольнике с гипотенузой 1 она даёт основное тригонометрическое тождество (специализация). Далее обобщаем её для проекций отрезка на две взаимно перпендикулярные прямые. Затем другое обобщение - теорема косинуса.

Переходим к прямоугольнику -там она звучит иначе - применительно к диагонали. Потом для векторов, когда выводим формулу для длины вектора через его проекции. Наконец, в системе координат получаем формулу длины отрезка через координаты его концов.

Затем оказываемся в трёхмерном пространстве. Обобщение по размерности проходит, когда мы от прямоугольника переходим к прямоугольному параллелепипеду, а длина отрезка, вектора и расстояние между точками выглядят точно так же, как на плоскости, только добавляется ещё одно слагаемое. Впрочем, нужные обобщения получаются, если переходить сразу к проекциям.

Далее формулируем теорему, обратную теореме Пифагора, и её аналог для углов (дуг на сфере). Для них есть теорема о «трёх косинусах» - такая.

«Если прямая *b* лежит в данной плоскости α, а прямая *a* пересекает эту плоскость, то выполняется следующее равенство:

$$\cos\angle ab = \cos\angle ac \cdot \cos\angle cb \text{ »} \qquad (\,*\,)$$

В этом равенстве *b* - данная прямая на плоскости, *a* - прямая, которая её пересекает, *c* - проекция на данную плоскость прямой *a*. (Рис. 104)

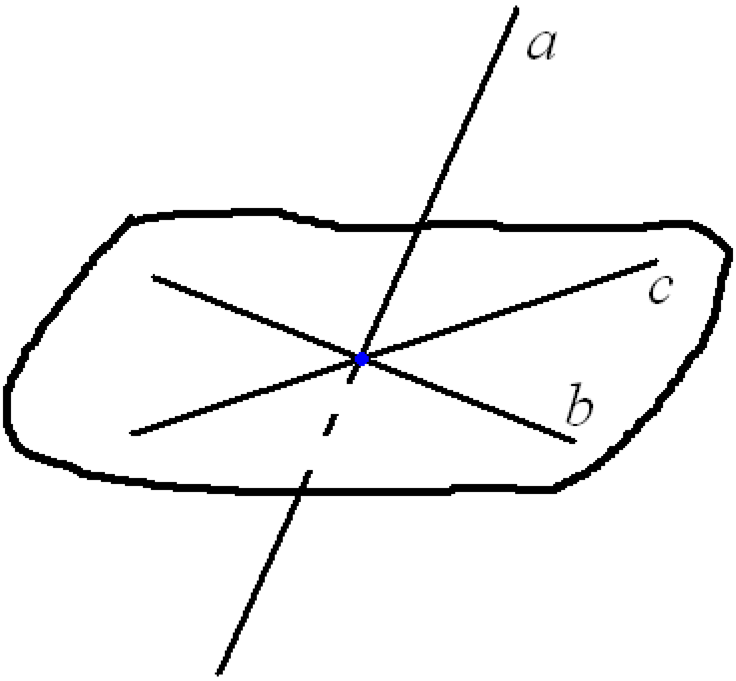


Рис. 104

В чём же аналогия? Для того, чтобы это понять, рассмотрим сферу с центром в точке *O*. Плоскости, которые проходят через каждую пару данных прямых, высекают на этой сфере три дуги большой окружности. (Рис. 105)

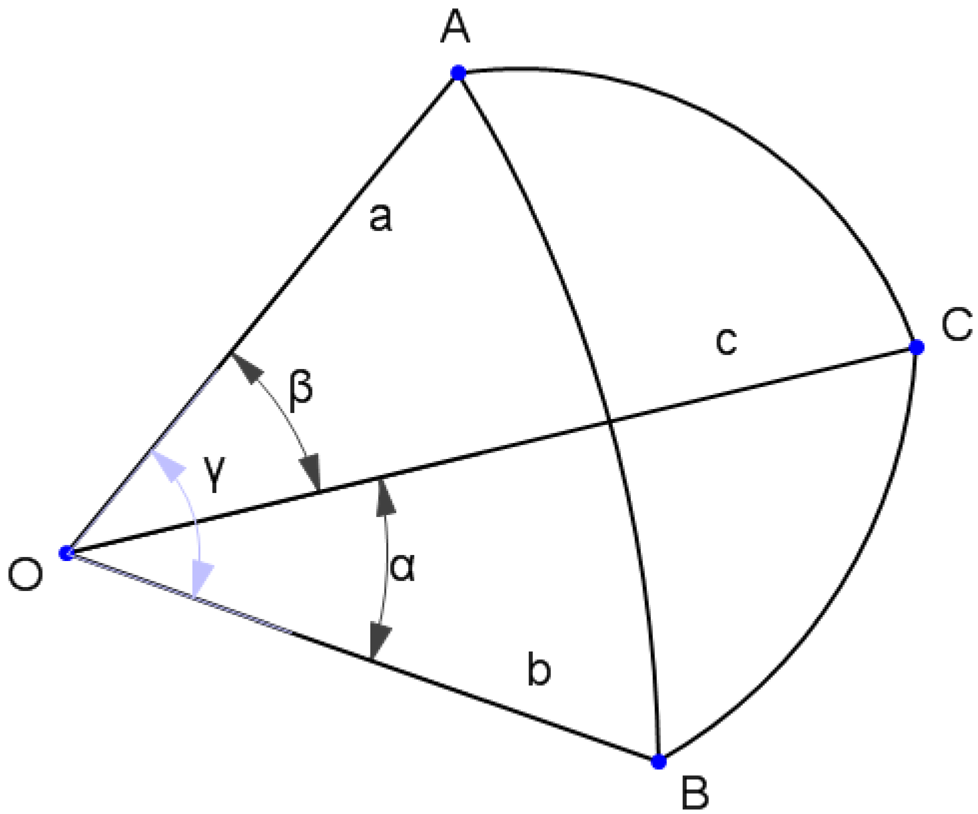


Рис. 105

В результате на сфере образовался сферический треугольник. В этом треугольнике один угол прямой – это угол между дугами *AC* и *BC*. Тогда дуги *AC* и *BC* можно считать катетами этого треугольника, а дугу *AB* - его гипотенузой. Каждая из этих дуг имеет длину. И соотношению между углами (то есть их косинусами) соответствует соотношение между этими длинами, причём длина наибольшей дуги определяется длинами меньших дуг. То же и в теореме Пифагора.

Более того, оказывается, что теорема Пифагора для плоского треугольника является предельным случаем теоремы « о трёх косинусах» для сферического треугольника. Покажу это.

Проделаем такую выкладку, чуть изменив обозначения.

Обе части равенства (*) возведём в квадрат. Затем каждый квадрат косинуса выразим из основного тригонометрического тождества. Получим такое равенство:

$1 - \sin^2\gamma = (1 - \sin^2\alpha)\ (1 - \sin^2\beta)$. Если углы заданы в радианной мере, то перейдём от углов к длинам соответствующих дуг больших окружностей, которые обозначим соответственно: c, a, b . Получим такое равенство

$$1 - \sin^2\ (c / R) = (1 - \sin^2 (a / R)\ (1 - \sin^2\ (b / R\ ) .$$

При устремлении радиуса сферы к бесконечности заменим синусы на их аргументы - получаем после упрощения равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - ((\ a^2 b^2\ ) / R^2 .)$$

Затем отбрасываем последнее бесконечно малое слагаемое и получаем формулу теоремы Пифагора.

Иногда пространственной теоремой Пифагора называют следующее утверждение.

«В тетраэдре *ABCD* плоские углы при вершине *D* - прямые. (Трёхгранный угол при этой вершине иногда называют прямым.) Площади граней – прямоугольных треугольников – S_1 , S_2, S_3 . Четвёртая грань имеет площадь *S*. Тогда $S^2 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2$. »

Мне трудно назвать этот результат обобщением теоремы Пифагора – потому как теорема Пифагора не является его частным случаем. Естественно считать его трёхмерным аналогом теоремы Пифагора.

В основном - всё. Затем даем подборку задач, где теорема Пифагора предстаёт во всех своих проявлениях достаточно разнообразно и красочно.

Заканчивая разговор о понимании, должен сказать, что мне ещё очень многое неясно. И никаких особо законченных рекомендаций дать не берусь. Всё, что было сказано мной по этому поводу, только попытка поделиться некоторыми соображениями, быть может, наивными. Однако работать «на понимание» интересно. Такая работа «перекрывает» традиционную деятельность учителя, направленную на знания и умения, и кажется мне более «тёплой», более близкой к ребёнку, раскрывает перед ним «человеческое лицо» школьной математики. «Я стала понимать, откуда что берётся»,— сказала мне к концу обучения Наташа Н. А вот что я услышал от Маши С: «Вы как-то говорили, что школьная математика — как палец на ноге статуи, изображающей всю математическую науку. И пусть палец на ноге. Но я поняла, что на статуе богини».

IY.4. Понять комплексное число

«Джентльмены, это, наверно, правда, но она абсолютно парадоксальна, мы не можем понять её, и мы не знаем, что она значит, но мы доказали её, и потому мы знаем, что она должна быть достоверной.»

Бенджамин Пирс о формуле Эйлера $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Обычно комплексное число вводится в алгебраической форме. Говорится, что комплексными числами называются числа вида $a + bi$, где a и b - вещественные числа и полагается по определению, что действовать с комплексными числами будем как с многочленами, учитывая, что $i^2 = - 1$.

И сразу же несколько загвоздок. Загвоздка первая. Непонятно, что это за знак «+» между a и bi? Определения для сложения вещественного числа и комплексного ещё не было, разговор только начинается, но пока нет этого определения, знак «+» бессмыслен. Запись bi порождает аналогичное недоумение. Отсутствие знака в этом месте - по аналогии с предыдущими записями такого вида - пропуск знака умножения. Но определения для умножения вещественного числа на комплексное тоже ещё не было. Как не было упоминания о том, что вещественное число - частный случай комплексного, а потому неясно, на каком множестве определяются эти операции. Поэтому и знак сложения, и пропущенный знак умножения могут рассматриваться только как формальные символы, вне всяких ассоциаций с предыдущим их употреблением. Очень сильная условность, явно сбивающая с толку, хотя и временная.

<**Препятствует пониманию использование символа, имеющего неоднозначный смысл.** >

Не уместнее ли писать вместо $a + bi$ нечто такое: $a * b**i$, заменив знаки сложения и умножения на соответствующие звездочки, тем самым лишая эту запись "вредных" ассоциаций?

Г. Дорофеев идёт ещё дальше - он предлагает вместо символа i ставить символ $\wedge$. И получится вот что: комплексным числом называется число вида $a * b{*}{*}\wedge$, где a и b - вещественные числа, при условии, что $\wedge^2 = -1$ и что действовать с комплексными числами будем как с многочленами.

При такой записи, не ассоциирующейся с чем-то известным, появляется вторая загвоздка, порождающая недоумение - а с чего это такую "бяку" мы называем числом?

<П**репятствует пониманию использование известных терминов в новом качестве. >**

Известный аргумент:" Смотрите, как хорошо всё потом получается ! " не успокаивает. Кто знает, может быть и при другом определении комплексного числа тоже всё получится? Сие возможно. Это раз. Два. Частенько говорят: "Вы пока делайте, а **понимание** придет потом." Мы действительно частенько полагаем, что **понимание** растёт вместе с количеством проделанных упражнений. Будто вообще достаточно запомнить, правильно воспроизводить и уметь пользоваться, а **понимание** приложится. **О**днако ясно, что дело не в количестве упражнений, а в их качестве, в их разнообразии и значимости. От того, что ученики прорешают, к примеру, десятки уравнений про синус и косинус ничуть не углубится их **понимание** тригонометрических функций. Другое дело - периодические процессы, гармонические колебания, я уже не говорю о ряде Фурье. И про комплексные числа - то же самое. Будто бы, научившись исправно действовать с комплексными числами, мы станем лучше их понимать. История появления и осмысления комплексных чисел как раз говорит о том, что можно искусно производить с ними разнообразнейшие манипуляции, но быть далеким от **понимания** того, с чем имеешь дело.

<Препятствует пониманию чрезмерное однотипное повторение .>

Здесь же рядом наше убеждение в том, что **понимание** облегчается при тщательном логическом построении излагаемой темы. Оно выросло из нашего математического образования и того, что реализовано в современных учебниках для школы и тем более для высшей школы. В них принят онтодидактический подход. Суть его, если совсем коротко, такова: идти от логики, а не от истории. При таком подходе с пути ученика убираются все камни преткновения, все проблемы, которые и привели к созданию рафинированного изложения. Разумеется, при онтодидактическом подходе мы выигрываем во времени. Но, уверен, проигрываем в **понимании**. (Всё так и должно быть – если где-то что – то улучшается, то где - то что – то ухудшается – «закон сохранения качества».) Хорошо известно: логичное - не значит понятное. Почему такое происходит ? В частности, потому, что такой подход убирает проблемную ситуацию, приведшую к появлению нового знания и, тем самым, начало пути к его **пониманию -** здесь я нашел поддержку у К.Поппера.

< **Убирая проблемную ситуацию, приведшую к возникновению понятия, мы уходим с дороги, ведущей к пониманию этого понятия**.>

Вот пример в нашем случае. Можно вводить комплексное число как упорядоченную пару вещественных чисел. (Предложил У.Гамильтон) Но и при таком подходе всё те же загвоздки. Первая - в определении действий и особенно умножения комплексных чисел. Почему мы выбираем именно такое совершенно искусственное, "взявшееся с потолка" определение: если $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, то

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ \ x_1 y_2 + x_2 y_1)$? Вторая - а на каком основании мы такую пару называем числом? К примеру, вектор на плоскости также можно трактовать как упорядоченную пару вещественных чисел, но никто на основании этого не называет такой вектор числом.

Идея использования упорядоченной пары хорошо известна в теоретической арифметике. Упорядоченные пары натуральных чисел могут служить исходным объектом для построения теории отрицательных чисел, а упорядоченные пары целых чисел - для построения теории рациональных чисел. Если бы мы именно так действовали ранее, то построение множества комплексных чисел как упорядоченных пар вещественных было бы вполне естественным. Но ведь в школьном курсе математики делается не так, а потому теория комплексных чисел как пар вещественных валится на головы учеников как снег среди ясного неба.

Можно ли предложить другой подход к комплексным числам? Принципиально другой, не онтодидактический? Положительный ответ на этот вопрос, относящийся не только к этой теме, хорошо известен. Существует генетический подход, при котором изложение материала следует тому, как он появлялся в ходе исторического развития. Если это невозможно реализовать полностью, то хотя бы эскизно. На этом пути п**онимание** возникает прежде всего из рассмотрения возникшей проблемной ситуации - надо пояснить ученикам, почему без нового знания что-то не получается. Далее, по мере расширения сферы действия нового знания, возникают ещё проблемы, надо и про них не умолчать. Очищенный от случайного, генетический подход погружает ученика в процесс поиска истины, формирующий **понимание**. (Известно после Г. Гегеля - именно такой подход и есть логический.) Диапазон использования этого подхода может быть достаточно широк: от попутно излагаемых сведений до - в мечтах - полного изложения темы.

<Способствует пониманию генетический (исторический) подход.>

Всё дальнейшее - эскизное описание проблемных ситуаций, встретившихся при построении теории комплексных чисел, а также описание путей их разрешения в практике преподавания.

Начнем с Д. Кардано. Именно в его сочинении в 1545 году была предложена формула для решения кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$. Эта формула имела такой вид:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}\ .$$

История появления этой формулы красочна сама по себе и подробно описана в книгах по истории математики. Можно прочитать в одной из них такое: "…Кардано, свободно складывавший и перемножавший мнимые числа, так и не понял окончательно их природы и считал их совершенно ненужными и бессмысленными." (Тем самым авторы полагают, что уметь - не значит понимать. По моему, у Д. Кардано в этом смысле много общего с нашими учениками.) Вернёмся, однако, к формуле. Рассмотрим такое уравнение $x^3 - 21x + 20 = 0$. Начнём его решать по формуле Кардано, но ничего не выйдет, ибо под радикалом оказывается число «-243». С другой стороны, его можно решить, отыскивая известным способом целые корни многочлена - получим три корня: 1,4,-5.

Проблемная ситуация N 1.

Ведь что получилось - в результате манипуляций с чем-то неведомым (извлекли квадратный корень из отрицательного числа, а потом ещё были разные операции с этой чертовщиной) - и вдруг в результате выскакивает число. Как же такое происходит в результате манипуляций неизвестно с чем!

Сам Д. Кардано не придумал объяснения случившемуся.

Ситуацию немного прояснил Р. Бомбелли (1572) . Он заметил, что под радикалами третьей степени стоят сопряжённые выражения вида а $\pm\sqrt{b}$, где $b < 0$. Если извлечь из них кубические корни, как мы бы делали с числами, то потому получается число, что мы суммируем также сопряженные выражения, в результате чего корни исчезают. По поводу результата Р. Бомбелли было написано так: " Бомбелли каким-то чудом сообразил, что кубический корень из комплексного числа вновь является комплексным числом, причем комплексная сопряжённость сохраняется."

И вот тут нас ждет третья загвоздка - а почему мы с какими-то неведомыми выражениями работаем как с числами: извлекаем корни, затем складываем? Мы просто по инерции полученные выражения называем числами, хотя бы и мнимыми. Давайте уберём инерцию и будем называть их , как я уже выразился, "бяками" (далее - без кавычек). И вот тут - то нашей прыти действовать по аналогии заметно поубавится. Откуда мы знаем, что бяки можно складывать? А если можно, то как? Ну, ладно, предположим, что складываем как многочлены: две бяки прибавить три бяки будет пять бяк. Хотя, как сказать. Две бяки, будь они числами, это два, умноженное на бяку. Но как понимать произведение числа на бяку? Какой природы этот объект? Число? Бяка? Что - либо ещё? Далее, как понимать, к примеру, такое выражение : $1 + \sqrt{-1}$. Иначе говоря, как к числу прибавить бяку? И опять - что при этом будет получаться - число или опять же бяка, или может быть что-то третье?

Рискнём, следуя иным советам, и начнём действовать с бяками как с числами - вдруг всё будет получаться как нам хочется - и довольно быстро придем к недоумению. Предположим, мы хотим перемножить две бяки: $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$. Действуя, как с числами, мы получим $\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{ab}$ (так полагал, в частности, Л. Эйлер). Но, например, Э.Безу считал, что должно быть $-\sqrt{ab}$. Дискуссия между двумя математиками такой величины настораживает - оказывается, не всё так просто. И путаница случалась порой грандиозная. Если действовать с бяками, как с числами, то в некоторых случаях всё получается хорошо, а других - мы натыкаемся на противоречия.

Сейчас можно позволить себе более общий разговор о числах вообще. А что такое число как таковое? Что мы имеем в виду, когда говорим, к примеру, что e^{π} является числом? Разумеется, число - такой объект, с которым можно работать по определённым правилам. e^{π} является числом именно потому, что мы знаем как с этим выражением действовать. И дело не в том, что мы нарисуем к примеру знак + между e^{π} и π^{e}, после чего заявим, что мы эти два числа сложили. И даже не в том, что мы начнём каким - то образом выписывать десятичные знаки в результате. Числами эти символы делают свойства основных с ними операций. (При традиционном школьном изложении теории вещественных чисел доказательства этих свойств обычно не проводят из-за технической сложности. При аксиоматическом введении вещественных чисел как элементов поля возникают другие замысловатые проблемы.)

Для чисел существуют две основных операции - сложение и умножение ,относительно каждой из которых множество этих объектов (с оговоркой относительно нуля) должно быть коммутативной группой. Если на множестве изучаемых объектов этих двух (или им аналогичных) операций нет или они есть, но у них нет групповых свойств (как, например, при умножении векторов), то нет и чисел. С бяками тут все в порядке.

Так что, уже можно называть их числами?

Самая пора сказать о сравнении чисел. Любые два (различных) числа сравнимы, причём сравнение должно быть увязано с операциями. Например, умножение положительных чисел должно быть монотонно : если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$. Но тут нас ждёт полный афронт: как раз для бяк это требование не выполняется, ибо $i^2 = -1$. И Л. Эйлер (в отчаянии?) написал:"…корни квадратные из отрицательных чисел …суть числа невозможные. "

Так думали тогда все математики и называли бяки воображаемыми (мнимыми) числами. (Вспомним: у гиперболы есть мнимая ось, в оптике - мнимое изображение, а у Мольера - комедия "Мнимый больной".) То есть бяки и не числа вовсе.

В каком - то смысле история повторялась. С таким же трудом воспринимались в свое время отрицательные числа. Это трудно себе сейчас представить, мы изучаем их чуть ли не в начальной школе, все видели термометр за окном. М. Штифель называл отрицательные числа фиктивными, Р. Декарт - ложными. Ф. Виета их вообще не признавал, хотя и работал с ними. (М. Гарднер пишет, что так было в Европе. В Китае с ними работали ещё до новой эры, более того – даже в Древнем Вавилоне.) Есть объяснение таким странностям. Оно такое. Для многих математиков тех времен понятие числа было тождественно понятию величины (это сохранилось и по сию пору в терминологии - мы говорим "абсолютная величина", "величина угла"). А реальные величины были, естественно положительными. Даже с нулём были проблемы - его только в конце 18 века признали за число - как это "ничто" может быть числом? Да что там с нулём - были проблемы даже с единицей - началом натурального ряда, её тоже до поры, до времени числом не считали.

Позволю себе небольшое отступление.

Представим себе, - говорю я ученикам, - что в руки Архимеда попал современный калькулятор. Пусть он умеет делать только четыре арифметических действия. Сможет ли Архимед догадаться, что перед ним за прибор? Учтите, что он не знает ни арабских цифр, ни современных обозначений знаков действий, ни знака равенства. Он даже про число 0 не знает. Но гениален.

Ответ более или менее очевиден - разгадали же археологи древние письмена - буквы и числа.

Немного "философии" . Как понимать существование чисел? Существует ли натуральный ряд? Кто его, собственно, видел во всей красе? Существует ли даже число 1? Не один предмет, а число 1? А если и да, то в каком смысле? Или это чистая идея? Но тогда и все остальные числа "живут" только в голове человека или, если угодно, в платоновском мире идей. Следуя (в свободной трактовке) К. Попперу назовем этот мир так: Мир - 3 (Мир - 1 - это мир реальных объектов, Мир - 2 - это мир психических состояний человека, куда отнесём и его мышление.) Сразу получается, что комплексные числа "живут" в Мире - 3.

Существование математических объектов в современном толковании - это отсутствие противоречий: объект существует, поскольку он каким - нибудь образом вписывается в непротиворечивую аксиоматику. Посему существование комплексных чисел мы сейчас сводим к существованию вещественных чисел, с которыми " всё в порядке". Но психологическое восприятие существования совсем иное. Существует то, что мы видим, слышим, то, что сделано, построено. Нам - то хочется, чтобы комплексные числа были и в Мире - 1, как, например, вещественные, которые мы можем "увидеть" на прямой или в виде отрезков на плоскости, полученных в результате геометрического построения.

Нестыковка Мира - 3 и Мира - 1 порождает ощущение интеллектуального дискомфорта в Мире - 2. Было сказано:"Комплексные числа на длительное время превратились во что-то таинственное, но полезное для решения математических проблем. Поэтому математики, хотя и не верили в их реальность, привыкали с ними работать. Как говорится, «глаза страшатся, а руки делают.»

Тут стоит добавить, что долгое время бяки использовались только как средство получения какого - то результата, как некий формализм для вывода окончательных соотношений. Один пример хорошо известен: произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма квадратов двух целых чисел, есть сумма квадратов двух целых чисел. И формулировка, и результат относятся к целым числам, но существует доказательство этого утверждения, использующее бяки. Вот оно. Пусть $p = a^2 + b^2$, $q = c^2 + d^2$. Тогда

$$pq = (a^2 + b^2) (c^2 + d^2) = (a + bi) (a - bi) (c + di) (c - di) =$$
$$((a + bi) (c + di))((a - bi) (c - di)) =$$
$$((ac - bd) + (ad + bc) i) ((ac - bd) - (ad + bc)i) =$$
$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Уместно заметить, что этот результат, переложенный на комплексные числа, выглядит так: квадрат модуля произведения двух комплексных чисел равен произведению квадратов модулей этих чисел. Р.Пенроуз называет это равенство "замечательным математическим фактом" - произведение двух сумм квадратов есть сумма двух квадратов.

(Р. Пенроуз - крупный современный математики и физик. Нам он известен из популярной литературы как автор "треугольника Пенроуза " и по книге М. Гарднера.)

Однако в некоторых случаях бяки стали появляться и как результат, причем с наибольшим эффектом в анализе бесконечно малых.

Например, Г.Лейбниц, интегрируя некоторые рациональные функции, получил результаты, в которых появились логарифмы бяк. Формально это могло получиться так. Дробь $\dfrac{1}{1+x^2}$ разложим на простейшие. Получим $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{0,5}{1+xi} + \dfrac{0,5}{1-xi}$. Проинтегрируем обе части равенства (глазам страшно, а руки делают!). Получим с одной стороны arctg $x + C_1$, а с другой стороны $\dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{1+xi}{1-xi} + C_2$. Положим в этом равенстве $x = 0$ и увидим, что $C_1 = C_2$, , а за ним и сногсшибательное равенство: arctg $x = \dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{1+xi}{1-xi}$. А если ещё взять $x = 1$, то после небольших преобразований результат и вовсе ослепительный:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\ln i}{i} \qquad (*).$$

Понимай, как хочешь! Но как? Я бы на месте первооткрывателя этих равенств долго ходил обалделый.

Что ещё пуще, бяки оказались полезны для решения практических задач, например, Л.Эйлер применил их для решения задач картографии. Более того, теперь известно, как плодотворно используются комплексные числа в электротехнике, радиотехнике, механике, квантовой механике.

Чтобы "глазам было нестрашно", бяки пытались истолковать геометрически (Д. Валлис, Г. Кюн). Попытка вполне разумная - ведь иллюстрируют же таинственный до поры до времени $\sqrt{2}$ диагональю единичного квадрата. Для истолкования $\sqrt{-1}$ предлагали нарисовать числовую ось, отложить на ней два числа: +1 и -1, а затем построить по известным правилам отрезок, являющийся средним геометрическим из этих двух. Из начала оси он торчал вертикально, длина его равнялась 1, но сам он изображал уже $\sqrt{-1}$.

Можно показать, что эта интерпретация некорректна. Были и другие попытки геометрического толкования (Л. Эйлер). Но в итоге Л. Эйлер же полагал, что дать его невозможно.

Как можно дать бякам реальное истолкование (в смысле Мира - 1) понял К. Вессель.
(Геометрическая интерпретация комплексных чисел как точек плоскости была проведена Д.Валлисом задолго до К. Весселя, в 1673 году, но его предложение « … было целиком и полностью проигнорировано» - И. Стюарт. После такой интерпретации естественно перейти к заданию комплексного числа парой вещественных чисел – координат точки, что и сделал через пару столетий У.Гамильтон.)

Каков был ход мыслей К. Веселя - неизвестно. Можно разве что предположить следующее (в современной терминологии). Числа служат для счёта и для сравнения величин. Но величины ведь бывают разные. Есть скалярные величины - масса, стоимость. И числа вполне их характеризуют. Но есть векторные величины - сила, скорость. И чисел недостаточно для их характеристики - тех чисел, которые хорошо известны - вещественных, ибо они не учитывают направления величин. Так может быть бяки - как раз те самые объекты, которые могут характеризовать векторные величины? И эту идею, которая почему-то не пришла в голову выдающимся математикам тех времен, К. Вессель, который не был даже профессиональным математиком, развил полностью. Как такое могло случиться?

После Р. Декарта математики начали избавляться от примата геометрии при построении алгебры. Алгебра начала выстраиваться как наука об операциях, то есть на арифметических основаниях. И К. Вессель понял, что требуется дать реальное истолкование не столько самим бякам, сколько действиям с ними. Вот что говорится по этому воду:" В качестве основных К. Вессель ставит перед собой две следующие задачи:

1. Найти единое аналитическое выражение, способное выразить как длину, так и направление каждого расположенного на плоскости отрезка в зависимости от двух данных направленных отрезков.
2. Так определить операции сложения и умножения над этими аналитическими выражениями, чтобы они были способны выражать изменения, которым могут подвергаться длины и направления отрезков."

Возможно, К. Вессель рассуждал примерно так. Числа можно изображать на прямой. Бяки будут изображаться на плоскости. Но прямая - часть плоскости. Значит, числа должны входить в множество бяк. Поэтому надо просто обобщить действия с числами, создать такую арифметику для бяк, которая включала бы в себя арифметику чисел.

Но тогда надо обобщить определения действий над числами.

Как же это делает К. Вессель? Если не вдаваться в детали, то картина его теории такова. Он рисует систему координат и откладывает на осях четыре единичных вектора: 1,-1, i, -i (сам

К. Вессель вместо i ставит ε). Бяку $z = x + yi$ он изображает вектором $\vec{z}$ с началом в начале координат и концом в точке (x,y) - как мы делаем и сейчас. Суммой бяк z_1, z_2 он называет бяку z, соответствующую диагонали $\vec{z}$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{z}_1, \vec{z}_2$.

Легко показать, что сложение векторов в координатной форме даёт такие же результаты как уже привычные действия с бяками.

Трудности начинаются, когда мы переходим к умножению.

Видно, что умножение векторов (скалярное) и умножение бяк различаются.

Произведением z_1 и z_2 К. Вессель называет такое z, которое соответствует вектору $\vec{z}$, получающемуся из вектора $\vec{z}_2$ так же, как вектор $\vec{z}_1$ получается из вектора «+1». Заметим, что в этом толковании треугольник с вершинами в точках О, +1, z_1 подобен треугольнику с вершинами в точках O, z_2, z_1z_2 .

Встаёт вопрос, откуда К. Вессель взял такое соображение?

А вот откуда. Со времен И. Ньютона (то есть за век до К. Весселя) для действий с дробями была общепринятой такая точка зрения на умножение: под умножением понимать действие с "помощью которого ищут новую величину, находящуюся со множителем в таком же отношении …, какое множитель имеет к единице." Мы можем увидеть здесь завуалированную пропорцию: $ab/b = a/1$. Почему так сложно? Поясню. Понятно, что означает умножение числа, скажем на 5 - это повторение слагаемым 5 раз. Но что значит умножить число на 2/3 , на - 2, на $\sqrt{2}$ или на π? Тут уже ничего не повторяют, а делают что-то другое, например, составляют пропорцию. Так что ничего необычного в этом месте К. Вессель не придумал.

Теперь можно моментально получить такие равенства: $1\cdot i = i$, $i\cdot 1 = i$, $i \cdot i = -1$.

Тем самым пропадает мистика с равенства $i^2 = -1$.

А как же быть с умножением произвольных бяк? К. Вессель перешёл к тригонометрии. Каждую бяку z он охарактеризовал известным ещё Л.Эйлеру тригонометрическим равенством
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, понимая под r и φ то же, что мы сейчас понимаем. Из подобия треугольников, упомянутых выше, моментально получается, что аргумент произведения бяк z_1z_2 равен сумме аргументов z_1 и z_2.

Переводя это наблюдение на геометрический язык, мы говорим, что при умножении бяка поворачивается на некоторый угол. Красиво выглядит умножение на i - это поворот вектора на 90^0. Удивительная процедура, которая позволяет изящно решать геометрические задачи - об этом хорошо написали П. Моденов, З.Скопец и Я. Понарин.

Для упрощения выкладок рассмотрим далее только те бяки, которым соответствуют единичные векторы. Тогда

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2,$$
$$z_1z_2 = x_3 + iy_3 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Формулы тригонометрии уже хорошо известны, а потому

$$x_3 = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = x_1x_2 - y_1y_2,$$
$$y_3 = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = x_1y_2 + x_2y_1.$$

В результате получаем формулу, к которой так стремились:

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

(Любопытно, что сейчас и в теории, и в преподавании можно всё "перевернуть" - сначала построить полную теорию комплексных чисел и экспоненты, а из нее вывести формулы тригонометрии .)

Я не утверждаю, разумеется, что так всё и было на самом деле, что именно так К. Вессель шёл к достижению своей цели. Но почему бы и нет? Представляю себе, как он подскочил на стуле, когда всё так прекрасно завершилось.

Но вот беда - его работа стала известна математикам только через 100 лет. (В. Арнольд пишет, что К.Вессель пришёл также к идее гиперкомплексных чисел , по существу, кватернионов, и пытался применить их к описанию вращений трёхмерного пространства.) Говоря о векторной интерпретации комплексных чисел, упоминают куда чаще имя другого математика – Ж. Аргана, который пришёл к этим же идеям позже К. Весселя (и на работу которого вначале тоже не обратили внимания)..В самой же математике такая интерпретация стала общепринятой после одного из сочинений К. Гаусса (1832).

Имея ясное геометрическое толкование, бяки перешли из Мира - 3 в Мир - 1. Интеллектуальный комфорт в Мире - 2 был восстановлен. Арифметика бяк оказалась столь же естественна, как арифметика положительных чисел. Позволим себе теперь (только теперь !) уйти от терминологии бяк и называть их комплексными числами. Этот термин ввел в 1803 году Л.Карно - так что какое-то основание для термина "бяка" мы имели.

Запись для комплексного числа в виде $a + bi$ впервые употребил К.Гаусс в 1832 году, до него писали $a + b\sqrt{-1}$, хотя символ i для $\sqrt{-1}$ ввел Л.Эйлер в 1777 году. Различие между i и $\sqrt{-1}$ было обнаружено позже. Для этого пришлось разобраться с извлечением корня из комплексного числа и уточнить понимание самого символа $\sqrt{\ }$. На множестве вещественных чисел и на множестве комплексных чисел этот знак трактуется по - разному.

<Препятствует пониманию нечёткое использование математической символики. >

Прежде чем называться числами, бяки, как мы видим, прошли мучительный путь, да и потеряли на этом пути возможность сравнения. Использование наглядных геометрических образов для толкования комплексных чисел столь убедительно, что есть учебники для школы, в которых о комплексных числах именно так и рассказано с самого начала. Определение комплексных чисел таково:" Комплексным числом называется вектор на плоскости, имеющий своим началом нулевую точку действительной оси." А умножение комплексных чисел определяется в полном соответствии с идеей К. Весселя. Последовательно реализовал эту точку зрения В.Болтянский в своей книге «Элементарная геометрия».Разумеется, можно выбрать и такой подход. Но как ответить на вопрос ученика:"А зачем понадобилось уже известному объекту - вектору - давать другое название? Да ещё такое - число."

<Препятствуют пониманию немотивированные определения. >

Вот теперь пора поговорить об ещё одной загвоздке, четвёртой по счету. Бяки, то бишь комплексные числа, появились в результате того, что некая операция на множестве чисел оказалась невыполнимой (извлечение корня квадратного из отрицательного числа). Кто знает, может быть какая - то операция на множестве комплексных чисел приведет к появлению новых бяк?

На современном языке постановка этого вопроса звучит так: "Является ли множество комплексных чисел замкнутым не только относительно сложения и умножения, но и относительно других известных операций, из коих наибольший интерес представляет извлечение корня и возведение в степень?"

К этой же проблеме можно подойти иначе. Комплексные числа потребовались для решения квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом. Но кто нам заранее сказал, что при решении алгебраических уравнений более высоких степеней не понадобятся ещё какие - нибудь числа?

Что касается извлечения корня, то ответ стал ясен после того, как А. Муавр нашёл формулу для возведения комплексного числа в натуральную степень - результатом будет также комплексное число. А что получится, к примеру, если рассматривать такие выражения: 1^i или ln (- 1)? Или "ещё хуже": i^i или ln i? Г.Лейбниц и Л.Эйлер полагали, что логарифмы отрицательных чисел существуют и являются комплексными числами. И. Бернулли и Ж.Даламбер, напротив, полагали, что они вещественны. Более того, они считали, что ln (-1) = 0. Проследим за выкладками Ж.Даламбера (в письме к Л.Эйлеру от 24.03.1747 года):

$$-1 = \frac{1}{-1}.$$ Отсюда ln (-1) = ln (+1) - ln (- 1), 2 ln (-1) = ln (+1) = 0,

поэтому и получается, что ln (-1) = 0.

Л.Эйлер, ему отвечая в письме от 15.04.1747 , ссылался на равенство (*), из которого следует, что ln i, а потому и ln (-1) отличен от нуля.

Хотел бы заметить вот что. Именно дискуссии столпов математической мысли относительно сущей по нынешним временам ерунды и показывают, как трудно добывается **понимание** и возможность прогресса в математическом образовании. Более того, тут есть что не понимать - об этом говорит дальнейшее развитие теории функций комплексной переменной и топологии (но это очень уж далеко от нашей тематики).

То, что Л. Эйлер уже тогда понимал всё так, как надо, неудивительно. Ещё в 1740 году в письме к И. Бернулли он привёл формулу

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \qquad (**),$$

к которой пришёл, решая дифференциальное уравнение гармонического колебания.

В 1743 году Л. Эйлер опубликовал свою знаменитую формулу

$$e^{xi} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \qquad (***).$$

Её можно получить из формул (*) и (**).

К этой же формуле можно прийти, рассматривая разложения в ряд Тейлора cos x, sin x, e^x , и взяв в ряде Тейлора для e^x в качестве переменной ix.

Формулу (***) можно получить вполне в духе Л. Эйлера на основе гармонического колебания.

Если учеников познакомили достаточно полно с гармоническим колебанием, то можно предложить им путь Л.Эйлера.

Сейчас он может (по идее) выглядеть так. Уравнение гармонического колебания имеет (в частности) вид $y'' + y = 0$ при условии, что $y (0) = a$, $y' (0) = b$. Легко убедиться в том, что функция $= a \cos x + b \sin x$ является его решением, отвечающим начальным условиям. Известно также, что решение одно. (Задача Коши, о чём Л. Эйлер знать не мог.)

Не взирая « на мелочи », вроде того, что для комплексной переменной мы можем действовать только по аналогии с вещественной переменной, распространим это утверждение и на данный случай. Положим начальные условия такими, чтобы решением этого уравнения была функция $\cos x + \mathrm{i} \sin x$. Получим тогда, что $y (0) = 1$, $y '(0) = \mathrm{i}$. Легко убедиться теперь в том, что функция e^{ix} также отвечает тому же уравнению и тем же начальным условиям. В силу единственности решения получаем, что $e^{ix} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$.

Приведу выкладку, доказывающую единственность решения (без ссылки на задачу Коши или на физические соображения) . Пусть есть два решения этого уравнения: y_1 и y_2, удовлетворяющие начальному условию $y (0) = 1$, $y' (0) = \mathrm{i}$. Составим их разность: $z = y_1 - y_2$. Она также удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению вместе с начальным условием, осталось показать, что она равна нулю.

Рассмотрим функцию $w = z^2 + (z')^2$. Она удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению с заданными начальными условиями. В самом деле,

$w' = 2z\, z' + 2\, z' z'' = 2\, z' (z + z'') = 0$, а потому функция w является константой. Далее,

$w (0) = z^2 (0) + (z')^2 (0) = 1 + i^2 = 0$. Так как $w = 0$, то $z^2 + (z')^2 = 0$, откуда и следует, что $z = 0$, то есть $y_1 = y_2$.

Любопытно тут заметить, что формулу (***) получил ещё в 1714 году Р. Котес, друг и ученик И.Ньютона, профессор в Кембридже, не кто-нибудь. (Он же, Р. Котес, первым получил формулу для приближённого интегрирования, которая теперь носит имя Т. Симпсона. Вот так ему "повезло" в истории математики.) Однако же странно, почему его результаты, опубликованные за 20 лет до Л.Эйлера, остались неизвестными.

Зная формулу Л.Эйлера, можно получить формулу для логарифмов и отрицательных, и комплексных чисел.

Завершим этот разговор утверждением о том, что множество комплексных чисел оказалось замкнутым относительно основных алгебраических операций.

Чтобы в этом убедиться, достаточно разобраться в том, что представляют собой такие выражения: $z_1^{z_2}$ и $\ln_{z_1} z_2$, *где* z_1 и z_2 - комплексные числа.

А формула Эйлера - замечательна. Из неё, в частности, следует удивительное равенство: $e^{\pi i} + 1 = 0$. В этом равенстве - число e, представляющее математический анализ, число π из мира геометрии и число i, возникшее в алгебре. В нём знак равенства – чуть ли не основной знак в математике вообще. В нём два фундаментальных числа: 1 (основа натурального ряда) и 0 (без него нет позиционной системы счисления). Про 1 и 0 можно и отдельную книжечку написать (про 0 – написана). Наконец в ней три основных операции над числами: сложение, умножение и возведение в степень.

Если немного «поиграть» с этой формулой и её следствиями, можно получить нечто забавное. Вот несколько примеров.

1) Возведём равенство $e^{\pi i} = -1$ в квадрат и получим $e^{2\pi i} = 1$, откуда $2\pi i = 0$. Остаётся уточнить, какой из этих трёх сомножителей равен 0. Дело вкуса. Кроме того, полученный результат можно интерпретировать как длину окружности радиуса i, которая равна 0.

2) Равенство $e^{2\pi i} = 1$ можно переписать в виде $e^{2\pi i} = 1^{2\pi}$, а затем в виде $(e^i)^{2\pi} = 1^{2\pi}$, откуда имеем $e^i = 1$. Поэтому либо $i = 0$, либо $e = 1$ - опять же по вкусу. Можно работать иначе: $e^{2\pi i} = 1$ переписать в виде $e^{2\pi i} = 1^i$, а затем в виде $(e^{2\pi})^i = 1^i$, откуда имеем $e^{2\pi} = 1$. Поэтому либо $\pi = 0$, либо $e = 1$ - опять же по вкусу.

3) Перепишем равенство $e^{\pi i} + 1 = 0$. в виде $e^{\pi i} = -1$ и прологарифмируем обе части равенства по натуральному основанию, получим: $\ln(\pi i) = \ln(-.1)$ и далее $\ln\pi + \ln i = \ln(-.1)$. Так как $i^2 = -1$, то получим далее $\ln\pi + \ln i = \ln i^2 .= 2\ln i$, откуда $\ln\pi = \ln i$, а потому $\pi = i$. Если к тому же вернуться к исходному равенству, то получим два «любопытных» равенства:

$e^{\pi^2} = -1$ и $e^{-1} = -1$ и, наконец, $e = -1$.

5) Запишем теперь такое равенство $\pi i = 2\ln i$, откуда получим $\pi/2 = (\ln i)/i = \ln(i^{\frac{1}{i}})$, откуда $i^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{\pi}{2}}$. Возведя левую часть последнего равенства в степень i^2, а правую в степень -1 (что одно и то же), получим совсем забавное равенство: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

5) Ещё два равенства.

$(-1)^i = (i^2)^i = i^{2i} = (i^i)^2 = (e^{-\frac{\pi}{2}})^2 = e^{-\pi}$.

Естественно было бы ожидать, что $1^i = -e^{-\pi}$. Но

$1^i = (-1)^i \cdot (-1)^i = e^{-\pi} \cdot e^{-\pi} = e^{-2\pi}$.

Получается такое равенство $e^{-\pi} = e^{-2\pi}$, откуда $e^{\pi} = 1$. Ещё раньше было получено равенство $e^i = 1$. А потому $i = \pi$.

Ну, и так далее…

В этих забавах есть нечто рациональное, именно среди полученных равенств есть верные!

На этом можно остановиться при изучении комплексных чисел. Если сделать хотя бы это (а есть ещё много чего интересного), то можно рассчитывать на куда более полное их **понимание**. В частности, ученикам становится ясно, что "чисел вообще" нет. Нельзя потому сказать фразу, начинающуюся словами: " Числом называется…" Есть числа натуральные, целые,…комплексные. Хотелось бы также намекнуть на продолжение многовековой истории о числах, ибо теперь известны дуальные числа (такого же вида как комплексные с элементом, который в квадрате дает число 0), двойные числа (такого же вида как комплексные с элементом, который в квадрате дает число 1), гиперкомплексные (кватернионы , октонионы) , и - совсем в другую сторону - гипервещественные . Но это уже " другая история".

Выше я написал, что генетический подход способствует **пониманию**. Но как же убедиться в том? Из педагогики и психологии давно известно:

< Обнаруживается понимание тогда, когда появляются вопросы. >

Приведу примеры возможных вопросов про комплексные числа.

1. Число i, а с ним и все комплексные числа появились, когда мы решаем уравнение $x^2 + 1 = 0$. Можно ли было сразу рассматривать квадратное уравнение общего вида с отрицательным дискриминантом и ввести некие новые "числа" (опять хочется сказать "бяки") для решения именно такого уравнения? И если да, то будет ли полученное множество являться числовым множеством, причём именно множеством комплексных чисел?

2.Нельзя ли построить теорию таких "чисел", которые решают любое квадратное уравнение, независимо от знака дискриминанта? Иначе говоря, рассмотрим множество "чисел", которые являются корнями произвольного квадратного уравнения. Вопрос тот же: будет ли полученное множество являться числовым множеством, причем именно множеством комплексных чисел?

3. Всякое ли уравнение с элементарными функциями, которое мы не могли решить раньше, теперь можно решить? Например, имеет ли решение любое показательное уравнение?

4. При переходе от множества вещественных чисел к множеству комплексных чисел алгебраическое уравнение приобретает новые корни - примеры очевидны. А как обстоят дела с трансцедентными уравнениями. Например, появляются ли новые корни при решении таких уравнений: $\ln x = 1$, $\operatorname{tg} x = 1$?

5.Будут ли числами векторы в трёхмерном пространстве, хотя бы при некоторых дополнительных договорённостях?

6.До каких пор можно обобщать понятие числа?

Ответ интересен своей окончательностью. Множество комплексных чисел не может быть расширено так, чтобы в расширенном множестве сохранялись все законы действий, выполнимых на множестве комплексных чисел - установлено К. Вейерштрассом .

Несколько слов в заключение. Изучение комплексных чисел в школе ставит ученика в чрезвычайно сложную психологическую ситуацию, когда он вынужден пересматривать устоявшуюся точку зрения. Несколько лет ему внушали, что при возведении в квадрат не может получиться отрицательное число, даже оценки снижали, если он такое не учитывал, а тут - на тебе. Процесс пересмотра точки зрения характерен для развития науки, но порой мучителен для профессиональных ученых, тому в истории науки есть ярчайшие примеры . Именно ввиду "характерности и мучительности" я полагаю необходимым изучение комплексных чисел в средней школе, причем не только в математической, но и во всякой прочей, а особенно в гуманитарной (в последней - хотя бы знакомство с ними). А то ведь наши ученики, погружённые в мир готового, сформировавшегося, препарированного и адаптированного знания, так и будут пребывать в уверенности, что математики всегда и всё знали чуть ли не заранее: и что такое число, и что такое функция, и что такое многогранник…Что они сначала дают определения, а уже потом начинают аккуратнейшим образом всё по порядку доказывать. Словом, что в реальной истории науки всё происходит именно так, как написано в их учебниках. Отнюдь.

Д. Максвелл по случаю сказал : «… знание усваивается наиболее полно только тогда, когда видишь процесс его зарождения.»

А закончу я слегка загадочным ответом А.Пуанкаре на собственный вопрос: " Сможем ли мы когда-нибудь сказать, что мы понимаем теорию, если хотим придать ей сразу окончательную форму, которую навязывает ей безукоризненная логика, чтобы не осталось никакого следа от действий наугад, которые к ней привели? Нет, в действительности мы не сможем её понять, не сможем даже запомнить. Не сможем запомнить, даже если выучим наизусть."

IY.5. Упростить? Нет ничего проще?!

Иногда кажется, что стоит только добиться формализации содержательных понятий – и понимание наступит само собой. Увы. Приходится, видимо, искать другие пути.

Порывшись в различных математических справочниках, я не смог найти определение или хотя бы толкование того, что значит «упростить». А если открыть задачник по алгебре или достаточно полное пособие для абитуриентов, то найдётся не один пример именно с таким заданием - «упростить».

Я приведу несколько заданий на упрощение.

1. $(x-y)^3 - (x+y)^3 - 3(x-y)^2(x+y) + 3(x+y)^2(x-y)$.
2. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.
3. $\dfrac{x^6-1}{(x^2-1)(x^3-1)}$.
4. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$.

5. $(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+(a+b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.

6. $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$.

7. $\sqrt{x}+\sqrt{-x}$.

8. ($\sqrt{x}+\sqrt{-x}$) ($\sqrt{x}$ - $\sqrt{-x}$) / x.

9. 2 lg x + lg x^2 .

10. tg x + ctg x.

И само задание, и процесс его решения бывают любопытны. Всегда приятно в результате упрощения получить 1 (в примерах (2,4)). В примере (1) (как и в примере (2)) можно увидеть формулу куба (разности и суммы) . Пример (4) интригует своей симметричностью и возможностью принципиально разных решений – я приводил этот пример выше. Решение примера (6) предполагает не вполне очевидное преобразование (возведение в квадрат и дальнейшее извлечение корня). В примерах (7) и (8) чувствуется экзотика, однако полезная. Примеры (3), (9), (10) нам тоже понадобятся.

Задание « упростить» обычно толкуется как замена выражения «более простым», понимая это как «менее длинным» потому как «менее длинное» становится более обозримым. Что стоит за «большей обозримостью»? Более короткий ответ? Уменьшение числа операций (включая нахождение значений функций) ?

Например, будем ли считать упрощением левой части равенства получение таких результатов:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a},\ \lg x^2 = 2\lg\left| x \right|,\quad a^2+ab+b^2=\frac{a^3-b^3}{a-b}\ ?$$

Ответ неясен. Попробуем добраться до ясности.

Рассмотрим все три элемента задания вместе: исходное выражение, его преобразование и полученный результат.

I. **Исходное выражение**.

Основной вопрос – надо ли находить в исходном выражении область определения? Из общих соображений это разумно - прежде, чем что-либо делать, стоит определиться, имеет ли смысл это делать и в каких условиях всё это происходит.

Могут представиться разные ситуации.

А. Нахождение области определения может быстро привести к ответу, как в задании (7)

Я не раз предлагал задание (7) и мне всегда выдавали ответом число 0. Короткий ответ получен без преобразований, только после нахождения области определения.

Б. Нахождение области определения может показать, что заниматься упрощением не имеет смысла, ибо она есть пустое множество, как в примере (8). Упрощая это выражение и не обращая внимания на его область определения, получим в ответе 2, что нелепо.

В. Нахождение области определения способствует верному результату, полученному с помощью преобразований, как в задании (5).

Рассмотрим подробнее этот пример.

Действовать в нём можно по - разному. Избавляясь от иррациональности в знаменателе, приходим к выражению $\sqrt{a^2-b^2}$ ($\dfrac{a-b}{|a-b|}+\dfrac{a+b}{|a+b|}$). Далее избавляемся от модулей, для чего рассмотрим четыре случая:

1. $a > b, a > -b$,

2. $a < b, a < - b$,
3. $a > b, a < - b$,
4. $a < b, a > - b$.

В случаях 1 и 2 есть два варианта ответа : $\pm 2\sqrt{a^2 - b^2}$. В случаях 3 и 4 ответ 0.

Если не выяснять область определения исходного выражения, то приведённый результат - окончательный. А если заняться областью определения, то увидим, что случаи 3 и 4 невозможны, ибо подкоренные выражения должны быть положительными. Ответ может быть получен только в первых двух случаях.

Г. Нахождение области определения неуместно, ибо в исходном выражении нет ничего подозрительного – ни знаменателей, ни радикалов и т.п. (примеры 1,2)

В реальном учебном процессе все эти ситуации встречаются. На уроке, в котором нас интересует именно техника преобразований, вряд ли надо находить область определения - пример (6). Напротив, в примере (7) упростить выражение невозможно, если не находить область определения. В примере (8), забыв про область определения, вовсе получаем нелепость. Наконец, если нас интересует и техника преобразований, и использование области определения, то уместен пример (5).

Полагаю, есть общие соображения, которые, которые уточняют постановку дидактической задачи, стоящей перед учителем.

Необходимо определиться, в каком разделе математики мы находимся. Если «находимся в алгебре», то не требуется нахождение области определения в двух случаях: когда упрощается целое выражение (что очевидно), и когда упрощается дробно – рациональное выражение из многочленов от любого числа переменных (что требует нетривиальных соображений, связанных с размерностью – на это указал А.Колмогоров).

Например. Пусть мы имеем выражение $(x^2 – y^2) / (x – y)$. Если мы «находимся в алгебре», то пишем в результате $x + y$ без всяких оговорок.

Если же мы находимся «среди функций» - например, строим график функции $f (x) = (x^2 – 1) / (x – 1)$, равенство нулю в знаменателе учитывать необходимо. Функции $f (x) = (x^2 – 1) / (x – 1)$ и $g (x) = x + 1$ разные, потому как у них разные («естественные») области определения, а потому графики их различны .

Отдельная ситуация в текстовой задаче – тогда область определения полученных выражений необходимо включает в себя все ограничения, в том числе необходимые по смыслу задачи.

Особо надо отметить задания на упрощение аналогичных тригонометрических выражений (А. Колмогоров эту ситуацию не рассматривал). В дробных выражениях дело (по сравнению с алгеброй) усложняется , но я полагаю, ситуация аналогичная.

Например, если мы упрощаем выражение $(\sin^2 x – \sin^2 y) / (\sin x – \sin y)$, то можем написать в результате $\sin x + \sin y$, ничего не оговаривая. То же и в таком задании на упрощение: $(1- \cos x) / \sin x$.

В остальных случаях действуем, исходя из поставленной нами цели.

Возможны такие цели упрощения.

1. Когда существенна только сама техника преобразований – тогда про область определения разговор неуместен.
2. Когда упрощение – промежуточный этап работы над заданием (решить уравнение и т.п.) – тогда нахождение области определения необходимо.
4. Когда мы хотим специально показать ученикам, что учёт области определения обязателен , тогда нахождение области определения находится в рамках самого задания.

Наиболее сложный (практически) случай – когда ученик получает задание не от учителя, а взял его из книги или в другой ситуации. Он может не знать, какого ответа от него ждут.
И при этом должен понимать, что толкования полученного им ответа могут различаться и не всегда в его пользу. (Со мной именно такое случилось, когда я поступал в университет; я не стал искать

область определения у длиннющего тригонометрического выражения со знаменателями, которое требовалось упростить, и мне сие было отмечено с пристрастием известным тогда автором задачников для поступающих К.У.Шахно. До сих пор помню.)

Потому я советовал ученикам подстраховаться и начинать упрощение (когда это уместно) , со «спасительной» фразы: « Если данное выражение имеет смысл, то ….»

Некоторые авторы учебных пособий в заданиях на упрощение сразу же оговаривают специальные ограничения на параметры. Такое возможно, если их не интересует проведение необходимого исследования полученного результата. Так, в примере (5) они могли бы добавить в условие, что $a > b > 0$.

Отмечу такие особенности заданий на упрощение.

1) Остановка *процесса , хотя он мог бы и продолжаться*. Именно такая ситуация возможна в примере (3). Если ученик пишет

$\frac{x^6-1}{(x^2-1)(x^3-1)} = \frac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{(x^2-1)(x^3-1)} = \frac{x^4+x^2+1}{x^3-1}$ и не раскладывает далее числитель на множители, то можно ли предъявлять к нему претензии – упрощение сделано, а где сказано, что «надо доводить его до предела», ведь нет определения термина «упростить»? (Сам пример взят из заметки А.Колмогорова.)

2)В результате упрощения могут получиться совсем разные по виду выражения, как в примере (10)

2.Преобразования.

Занимаясь упрощением обычно производят преобразования левой части выражения. Что значит « преобразовать выражение» тоже не вполне ясно, определения тому нет.

Замечу, что в результате преобразования мы не обязаны получать выражение более простое по виду. Часто приходится преобразовывать не к более простому, а к нужному виду. Таковы задания: привести к виду, удобному для логарифмирования, преобразовать в произведение (в сумму), избавиться от иррациональности, выделить полный квадрат, исключить целую часть, разложить на множители, разложить дробное выражение на простейшие (при интегрировании) и т.п.

Толкование преобразования зависит от конкретной ситуации. Рассмотрим, например, такое равенство:

$(x^4 - 1) / (x - 1) = x^3 + x^2 + x + 1$. Его можно читать, как всякое равенство, в двух направлениях: слева направо и справа налево. И мы преобразуем как левую часть равенства в правую (скажем, при взятии производной) , так и правую часть равенства в левую (при суммировании прогрессии).

Похожее задание. Пусть требуется вычислить предел функции $f(x) = \frac{x^n-1}{x-1}$ при $x \to 1$.

Ясно, что мы перейдём к выражению $x^{n-1} + \ldots + 1$. Но если нужно найти предел функции $g(x) = x^{n-1} + \ldots + 1$ при $x \to -1$, то мы скорее будем действовать «в противоположном направлении» и запишем $x^{n-1} + \ldots + 1 = \frac{x^n-1}{x-1}$.

Как и при упрощении, возникает вопрос про область определения исходного выражения, насколько она учитывается в преобразованиях. В процессе преобразований область определения исходного выражения может сохраниться : $(x - 1) (x + 1) = (x^2 - 1)$; может поменяться – расшириться:$(x^2 - 1) / (x - 1) = x + 1$; сузиться: $x + 1 = (x^2 - 1) / (x - 1)$.

Преобразования, сохраняющие область определения исходного выражения и равенство в этой области между исходным выражением и полученным, называют тождественными.

Преобразование ($x - 1$) ($x + 1$) = ($x^2 - 1$) – тождественное. Преобразования, не сохраняющие область определения, но сохраняющие равенство на её подмножестве можно называть, следуя Ю. Шихановичу, квазитождественными (этот термин - для упрощения речи). Преобразования ($x^2 - 1$) / ($x - 1$) = $x + 1$ и $x + 1$ = ($x^2 - 1$) / ($x - 1$) – квазитождественные.

Одни и те же преобразования (например, разложение на множители) могут быть тождественными : $x^2 - 1 = (x - 1) (x + 1)$, но могут быть и квазитождественными: $x - 1 = (\sqrt{x} - 1) (\sqrt{x} + 1)$.

В процессе преобразований главное – сохранение равенства между исходным выражением и окончательным, если не на всей области определения исходного выражения, то хотя бы на её (непустом) подмножестве, важно, что «хоть где – то» работает транзитивность равенства.

Рассмотрим пример (9) . Преобразовать это выражение можно так: $2 \lg x + \lg x^2 = 4 \lg x$. Это преобразование – тождественное, так как область определения исходного выражения сохранилась.

Преобразовать это выражение можно так: $2\lg x + \lg x^2 = \lg x^2 + \lg x^2 = 2 \lg x^2 = 4 \lg |x|$. Это преобразование – квазитождественное, так как область определения исходного выражения изменилась.

Посмотрим чуть дальше. Так как из исходного выражения получено два других, то эти два других, равные исходному в силу транзитивности равенства , равны между собой: $4 \lg x = 4 \lg |x|$, откуда $\lg x = \lg |x|$ и $x = |x|$. И как это понимать? Очень просто. Отношение транзитивности работает здесь лишь при $x > 0$, то есть в области определения исходного выражения. Поэтому и окончательное равенство верно при $x > 0$. Равенство $x = |x|$ появилось потому, что в среди преобразований было квазитождественное, именно второе из них, так как оно не сохранило область определения.

Никаких проблем не доставляют тождественные преобразования. Квазитождественные преобразования требуют повышенного внимания. Их использование зависит от двух обстоятельств: *необходимо определиться, в каком разделе математики мы находимся* и *каковы цели преобразования*. Здесь дела обстоят так, как и при упрощении, и я не буду повторяться. Любопытно заметить, что неверная выкладка ученика может толковаться как квазитождественное преобразование: $(x^3 - 1) / (x + 1) = (x^2 + x - 1)$.

Двинемся дальше. Преобразование выражения происходит согласно некоторым формулам. А что есть формула? Это некоторое равенство двух выражений. Возникает это равенство из аксиом (например, ассоциативность), определений (например, тангенс) и доказанных ранее соотношений (например, формула бинома) . Посему перейдём к тождествам, к тождественным равенствам.

III **Тождество.**

В результате упрощения (преобразования) из выражения в левой части получается выражение в правой части (из начального выражения – конечное) Принято считать, что в совокупности образовалось тождество. Как сказано выше, тождества используются и в процессе упрощения (преобразования). Похоже, что именно понятие тождества является ключевым в нашем вопросе.

Определения тождества в разных источниках не всегда совпадают, вот самый почтенный вариант – из Математической энциклопедии.

Тождество – равенство двух аналитических выражений, справедливое для любых допустимых значений входящих в него букв.

Согласно приведённому определению (буду называть его каноническим), требуется учитывать область допустимых значений. Согласно ему, равенство $\lg x^2 = 2 \lg x$ является тождеством, ибо оно должно рассматриваться при $x > 0$. И согласно ему же, равенство $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ является тождеством, так как оно выполняется при $x = 0$ - на области определения. (Г.Дорофеев в одной из своих статей приводит как пример тождества именно это равенство, подчёркивая его экзотичность.)

Обобщая эту «патологию», получаем, что равенство $\sqrt{f(x)} = \sqrt{-f(x)}$ является тождеством на множестве нулей функции *f*. Более того. Оказывается, можно считать тождеством даже такое равенство $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$ = sin ($\sqrt{x} + \sqrt{-x}$). Но как – то не хочется. И вот почему.

Рассмотрим тождество $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$, затем ещё одно $\sqrt{-x}$ = $\sqrt[4]{x}$ (столь же экзотическое). Получается , согласно транзитивности равенства, такая цепочка $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ = $\sqrt[4]{x}$. Однако равенство $\sqrt{x} = \sqrt[4]{x}$ тождеством не является (аналогичный пример приведён Г. Дорофеевым).Нарушение транзитивности равенства – вещь серьёзная и может служить для исключения таких «монстров» из рассмотрения.

Однако я бы не сказал, что приведённые выше «монстры»– совсем уж экзотика, аналогичные ситуации теоретически возможны . Например. Пусть нам нужно исследовать на чётность функцию *f*. Мы составим равенство $f(-x) = f(x)$ и получим уравнение $f(x) - f(-x) = 0$; если равенство выполняется для всех x из области определения, то функция будет чётной даже в том уникальном случае, когда в области определения только 0.

Вот более простой пример. Тождествами являются такие равенства: $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$, $(\sqrt{x})^2 = x$. Однако равенство $\sqrt{x^2} = x$, полученное как следствие из двух предыдущих, тождеством не является.

Такие примеры полезны для теоретического анализа определения (достаточно вспомнить определения функции, многогранника, которые, как известно из истории математики, многократно уточнялись по мере появления всё новых «монстров», то есть контрпримеров). И если определение тождества приводит к нарушению отношений, которые мы считаем важными (транзитивность равенства), то, видимо, каноническое определение тождества нуждается в коррекции. Например, стоит исключить из рассмотрения случаи, когда область определения - конечное дискретное множество. Но этого недостаточно. Видимо, стоит исключить из канонического определения те случаи, когда нарушается транзитивность равенства.

Подробный научный анализ канонического определения тождества и его использования в школьном курсе математики провёл в своё время А. Колмогоров. Потому – вопрос не пустяшный. Подробный методический аспект этого понятия рассмотрен, например, в статье И. Баума и Ю. Макарычева (сборник « Преподавание алгебры в 6 – 8 классах», М., Просвещение», 1980 .) Они предлагают уточнить каноническое определение тождества, рассматривая «тождества на множестве». Согласно их точке зрения, как я понял, выражение может являться тождеством на одном множестве и не являться тождеством – на другом. Тоже не очень – то. Получается, например, что равенство $x^2 = 1$ является тождеством на множестве корней этого уравнения. Можно, следуя Ю.Шихановичу, ввести понятие квазитождества и рассмотреть его использование в школьном курсе, да опять же не хочется – не к месту.

Пара заключительных замечаний. Зададимся вопросом – как появляются тождества? Я вижу два пути.

Наиболее распространённый способ – тождество получается как результат решения задачи на преобразования (упрощения) данного выражения с готовым ответом или сводящейся к таковой. Тогда доказательство тождества может выполняться при тех же договорённостях, что и упрощение (преобразование).

Другой способ – решение уравнения. Например, при исследовании функции, на периодичность, мы решаем уравнение $f(x \pm t) = f(x)$. Если его решением является вся область определения функции, то получаем тождество.

Я полагаю, что нет окончательных толкований понятия тождество. А оно входит, как было сказано, в процесс упрощения. И задание «упростить» тем более становится неформальным и зависит не столько от самой математики, сколько о нашей договорённости. А потому – надо быть поосторожней в том, что связано с этим понятием.

Общий итог. Полного формализма нет, надо понимать, где мы находимся, зачем мы это делаем и действовать по ситуации.

IV. 6. ТВОРЧЕСТВО НА КАЖДОМ УРОКЕ

Говоря о критической деятельности, о понимании, я хотел показать некоторые пути воздействия на личность ребёнка через его интеллект. Но пути воспитания разные. И один из них, как мы помним, формирование творческой личности.

Об этом написана большая педагогическая литература, и то, что я скажу, довольно фрагментарно.

Творить, выдумывать и пробовать, как говорил поэт, нужно не только в науке, внушаю я детям, но где угодно и, может быть, больше всего в собственной жизни. Я привожу им всякие цитаты и мнения. Например, отбор космонавтов и отбор велосипедистов-гонщиков в команду необходимо включает в себя проверку на поведение в нестандартной ситуации. Призыв древних — познать самого себя — невозможно реализовать человеку в футляре. Ну и так далее. Если я хочу на своих уроках пробудить в ребёнке творческое начало, а затем всячески его развивать, то такая часть моей учительской установки должна найти отражение и в системе работы, и в той атмосфере, которую я создаю на уроке. Главное здесь, конечно, не призывы и благие намерения. И не эпизодическое решение более или менее творческих задач. Я полагаю, что на каждом уроке можно организовать такую математическую деятельность учеников, в которой они вынуждены творить, быть может, не замечая этого. Обычно, говоря о воспитании творческих способностей, имеют в виду проблемное обучение, эвристические приёмы в работе и даже исследовательский метод, когда ученики чуть ли не всё должны открыть самостоятельно. Это прекрасно, но, как все прекрасное, редко. Я же веду речь о том, что можно делать практически на каждом уроке.

Приведу удачную метафору. Известна задача: «Как накормить человека?» И разные способы её решения.

1. Дать ему жареную рыбу.
2. Дать ему сырую рыбу.
3. Дать ему удочку.
4. Дать ему учебник по рыбной ловле.
5. Привести его на берег реки.

Теперь уйдем от метафоры. В реальном преподавании важны все пять способов. Акценты делаются учителем в зависимости как раз от собственной установки. Почти в каждой работе, в домашнем задании предлагаю задачи, не имевшие аналога в классе, чтобы дети сами думали.

Но говорить я буду о двух возможностях в работе учителя и условно назову первую из них «Придумай задачу», а вторую — «Сделай выбор». Каждая из этих возможностей, как я понимаю, ставит ученика в такое положение, когда репродуктивная деятельность ничего не даёт. И придумать, и выбрать — акт творческий. При этом придумывание задачи – несомненное проявление креативности личности.

Посмотрим, как реализуется первая возможность. Естественно, задачу на ровном месте не придумать. Иначе может получиться нечто вроде того, что сочинила одна малышка, а именно: «По одной стороне улицы бежало 10 зайцев, а по другой — все остальные. Сколько зайцев бежало по улице?» А когда её спросили, как же тут можно получить ответ, она ответила: «Но я-то знаю, сколько бежало зайцев!» Новая задача придумывается в процессе размышления над чем-то. Для ученика таким «чем-то» может быть почти любая конкретная задача. Здесь я хочу обратить внимание именно на акт придумывания, а не решения придуманной задачи, которое может быть и непростым. Мне не раз приходилось видеть задачи, придуманные отнюдь не сильными учениками. А один разочек было даже такое – ученица 7 класса, весьма далёкая от математики, принесла мне целую тетрадь с придуманными ею задачами.

Перейду к таким ситуациям, в которых посыл к придумыванию задачи весьма силён.

Предположим, мы доказали в классе неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ \ (a \geq 0, b \geq 0).$$

Далее традиционен переход к решению примеров, в которых оно может быть использовано. Их можно взять и из учебника. Но можно предложить ученикам самим придумать новые задачи, исходя из этой. Каким же образом они могут это сделать?

1) Рассмотреть частные случаи. Например, взять $b = (1/a)$ и получить

такое неравенство: $a + (1/a) > 2 (a>0)$.

2) Обобщить на 3, 4, ... любое число неотрицательных слагаемых. Здесь уместно сказать ученикам, что доказательство такого обобщения трудное, значит, мы придумали вполне достойную задачу.

3) Рассмотреть «крайние» случаи. Здесь появляется такая задача: «В каком случае достигается знак равенства?».

4) Найти какое-либо применение полученному результату. Задачи на нестрогие неравенства легко перевести в разряд задач на поиски экстремума. Здесь естественно появляются две задачи, которые хорошо известны. Первая: из двух положительных чисел, сумма которых постоянна, найти такие, произведение которых является наибольшим. Вторая: из двух положительных чисел,

произведение которых постоянно, найти такие, сумма которых является наименьшей.

Один несложный пример. Пусть требуется найти наибольший по объёму прямоугольный параллелепипед, вписанный в данную сферу. Тут требуется найти наибольшее значение функции от трёх переменных, и производная не помогает. А выручает как раз неравенство Коши для трёх переменных.

5) Дать другое истолкование задаче.

Если задача аналитическая, то найти геометрическую иллюстрацию. И наоборот. В данной задаче возможна такая интерпретация: a и b — отрезки, на которые высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу, $\sqrt{ab}$ — длина этой высоты, $\frac{a+b}{2}$ - медиана на гипотенузу

Условие можно дополнить и и подключить другие средние. На рисунке 113 AC - это диаметр полуокружности с центром O; проведем OD - радиус этой полуокружности, перпендикулярный AC. Соединим точку B_1 с точкой D и проведём перпендикуляр B_1K на OB. (Рис. 105)

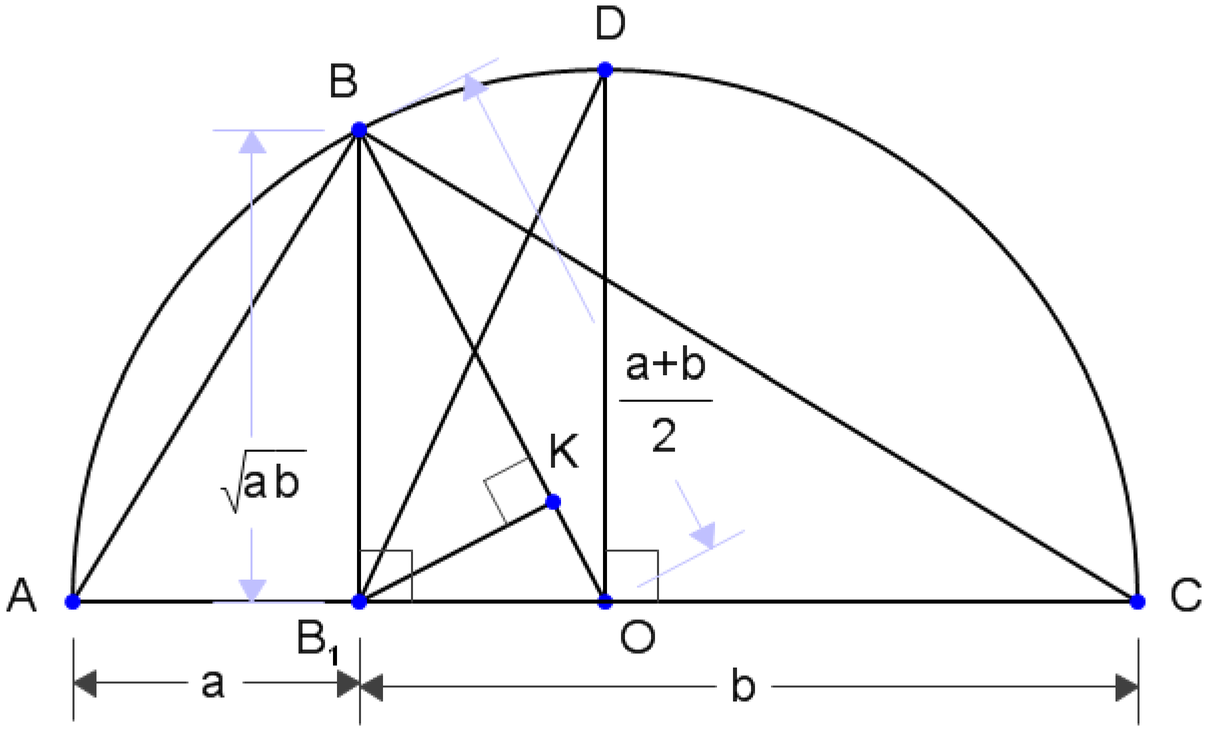


Рис. 105.

Несложно вычислить:

$$OB = \frac{a+b}{2}, BB_1 = \sqrt{ab}, B_1D = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, BK = \frac{2ab}{a+b}.$$

И теперь видна известная цепочка неравенств:

$$BK \le BB_1 \le OB \le B_1D.$$

Стоит заметить, что все эти средние получаются из общей формулы: $S_p = \left(\frac{\sum_{i=1}^{2} a_i^2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ при p = -1, 0, 1, 2, а полученные неравенства свидетельствуют о монотонности функции S_p. (Необходима только некоторая техническая возня по правилу Лопиталя при $p = 0$.)

Наконец, на этом же рисунке в прямоугольном треугольнике BB_1O выполняется равенство $BB_1^2 = BO \cdot BK$, откуда видим такое соотношение между средними: $(\sqrt{ab})^2 = \frac{a+b}{2} \bullet \frac{2ab}{a+b}$.

Покинем неравенство Коши.

6) Составить обратное утверждение.

Пусть мы составили квадратное уравнение с корнями 1 и i: (x - 1) (x - i) = 0. (Такой пример стоит разобрать, чтобы ученики верно понимали утверждение о сопряжённых комплексных корнях многочлена с вещественными коэффициентами.) Приведём это уравнение к обычному виду: x^2 - (i + 1) x + i = 0. А теперь будем действовать в обратном направлении и решим это уравнение по формуле для корней квадратного уравнения. Получим такое равенство: $x = \frac{(i+1) \pm \sqrt{-2i}}{2}$. И где же тут корень, равный 1? Вот мы и приходим вполне естественно к проблеме извлечения корня из комплексного числа, да ещё в слегка загадочной форме.

7) Найти аналогичное утверждение.

Любопытна, например, такая аналогия между векторами и треугольниками: трёхмерный вектор задается тремя своими проекциями, и треугольник задается тремя независимыми его элементами. Продолжается ли эта аналогия дальше? И вообще, насколько такое сходство можно считать аналогией?

8) «Пойти обратной дорогой». Точку с координатами (1,1,1) можно в координатном пространстве задать уравнением $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$. Несложными преобразованиями этого уравнения можно придти к такой системе: $x^2 = 2y - 1$, $y^2 = 2z - 1$, $z^2 = 2x - 1$ или к такой $x = (z^2 + 1)/2$, $y = (x^2 + 1)/2$, $z = (y^2 + 1)/2$. Решение каждой из этих систем приведёт нас обратно к исходной точке (1,1,1).

9) Если мы имеем дело с формулой, имеет смысл зафиксировать одну из величин и посмотреть, что из этого можно «выжать».

Запишем теорему Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$ и зафиксируем гипотенузу. Тогда сумма квадратов катетов окажется постоянной. Наибольшее значение выражения a^2b^2 будет достигаться при равенстве сомножителей. Тогда же станет наибольшим произведение ab , которое есть удвоенная площадь прямоугольного треугольника с катетами a,b. Отсюда вывод: из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

10) Рассмотреть предельные случаи. Известна задача Аполлония – построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей. Предельным случаем окружности является как точка (условно - при нулевом радиусе), так и прямая (условно - при бесконечном радиусе). Поэтому в предельном случае задача Аполлония превращается в задачу построения окружности, проходящей через три точки, также в задачу построения окружности, касающейся трёх данных прямых. Возможны дальнейшие комбинации предельных случаев – например, построение окружности, проходящей через две точки и касающиеся прямой.

Перейдем теперь к рассмотрению второй возможности — выбору. Я хочу ученикам показать разные подходы к понятию, к задаче, чтобы они выбирали. Сам выбор примеров для работы в классе или дома уже в какой-то степени творческая процедура. Поэтому даже в задании «на 3» по уровню трудности можно предложить ученику примеров больше, чем нужно ,—пусть выбирает сам!

Приведу примеры разных подходов к одному и тому же понятию. В основе этого приёма лежат разные определения одного и того же объекта. По-разному, как известно, можно определить почти всё. Вопрос в том, давать ли эти разные определения ученикам или ограничиться только одним определением — и пусть выучат хотя бы его! Ну, скажем, параллелограмм — его определением может быть любое его характерное свойство, а кроме того, его можно определить и конструктивно. Так вот, я считаю, что полезно привести детям несколько определений (ещё лучше, если они найдут их самостоятельно), с тем чтобы они могли выбрать для себя такое, которое им лично нравится больше. И если этого нельзя сделать на первых уроках о параллелограмме, то вполне возможно при повторении. Иногда, впрочем, несколько определений одного и того же объекта может появиться и при начальном систематическом изучении. Например, все дети к началу курса геометрии знают квадрат. Так что такое квадрат? Появится несколько определений, все запишем на доске, и пусть каждый выбирает то, что хочет.

Интересный разговор случился у меня с одним из учеников, Сашей А., когда я рассказал о двух вариантах возникновения натурального логарифма: традиционном и через интеграл. Как всегда, предложил им выбрать тот подход, который им понятнее. Саша выбрал интегральный подход. «Почему?» — поинтересовался я.

— Первый вариант чересчур зависит от количества пальцев на руках,— последовал совсем неожиданный для меня ответ.

А вот разные подходы к решению вполне заурядных примеров.

Пусть надо решить уравнение $\lg x(x\text{-}1) = \lg x$. Рассмотрим такие способы:

1) Найдем ОДЗ: $x>1$. Тогда

$\lg x(x\text{-}1) = \lg x \Leftrightarrow x\,(x\text{-}1) = x \Leftrightarrow (x\text{-}1) = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

2) $\lg x(x\text{-}1) = \lg x \Leftrightarrow x = (x\text{-}1) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x=2.$

Затем подстановка.

3) $\lg x(x\text{-}1) = \lg x \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x(x-1) = x \\ x > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x\text{-}1) = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

4) $\lg x(x\text{-}1) = \lg x \Leftrightarrow \lg x(x\text{-}1) - \lg x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg \dfrac{x(x-1)}{x} = 0 \\ x(x-1) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{x} = 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2.$

5) Найдем ОДЗ: $x>1$. Тогда

$\lg x(x\text{-}1) = \lg x \Leftrightarrow \lg (x\text{-}1) + \lg x = \lg x \Leftrightarrow \lg (x\text{-}1) = 0 \Leftrightarrow (x\text{-}1) = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

6) $\lg x(x\text{-}1) = \lg x \Leftrightarrow \lg |x\text{-}1| + \lg |x| = \lg x$, а далее — метод интервалов.

Разумеется, эти решения комментируются. Ну а что делать дальше, после того как они все показаны? Очень просто — в домашнем задании ученики в аналогичном примере выбирают тот способ решения, который им доступнее.

Ещё пример на эту же тему. Уравнение $\sin x + \cos x = 0$ я решаю в классе чуть ли не десятком способов. А выбор за детьми.

Иногда по ходу письменной работы ученик находит второе решение уже написанной задачи. Я в таких случаях говорил: " Если оно не похоже на уже приведённое вами, то напишите в работе и его - я зачту как ещё одну сделанную задачу."

Вот пример тому, насколько различными могут быть решения даже совсем простецкой задачи. Маша и Даша, работая совместно, могут прополоть грядку за 12 минут. Одна Маша смогла бы это сделать за 20 минут. За какое время смогла бы это сделать одна Даша?

У этой задачи мои ученики нашли более десятка решений. Перечислю конспективно различные по идее.

1. «*Логическое*» решение. Ту часть грядки, которую Даша пропалывает за 12 минут, Маша пропалывает за 8 минут. Значит, Даша работает в полтора раза медленнее Маши, а потому на всю грядку затратит времени в полтора раза больше, чем Маша, то есть 30 минут

2. «*Арифметическое*» решение. Оно не требует составления уравнений и вполне традиционно. Принимаем всю работу за 1, находим скорость работы Маши, скорость совместной работы, затем скорость работы Даши и, наконец, время работы Даши. Причём скорость работы можно находить за 1 минуту или за 1 час.

3. «*Алгебраическое*» решение. За неизвестное принимается время работы Даши (или скорость её работы). После этого составляется уравнение, решение которого приводит к ответу. Классический способ, указанный ещё Ньютоном в его «Всеобщей арифметике». Всю работу можно принять за (безразмерную) 1, но лучше ввести переменную, что позволит осуществлять проверку плученного результата по размерности

4. «*Психологическое*» решение. Названо мной так потому, что ещё в середине прошлого века психологи из школы Гальперина исследовали начальное знакомство учеников с задачами на равномерные процессы, не конкретизируя их. Ими была предложена общая формула $A = VT$, где A – объём процесса, V – скорость процесса, T – время процесса. Далее ученики должны были раскрыть содержание этих величин, после чего решить задачу. В нашем случае A – длина всей грядки, V – скорость совместной работы, равная сумме скоростей Маши и Даши, T – время совместной работы.

Так как скорости двух равномерных процессов пропорциональны, то можно обойтись введением скорости только одного участника процесса, а потому запишем такое уравнение:

$A = (V + kV) T = (k + 1) VT$, где k – коэффициент пропорциональности. Теперь внимание решателя сосредоточивается на поисках коэффициента k . Обычно он находится из заданного в условии соотношения времён.

5. «*Физическое*» решение. По мере продвижения по условию задачи каждую величину обозначаем буквой. Затем выписываем все соотношения между этими величинами. Получается система уравнений, из которой постепенно исключаем переменные, пока не остаётся одна из них, затем решаем полученное уравнение. Так обычно решают задачу в физике.

6. *Переход в другую систему отсчёта*. Считаем , что Даша неподвижна, а Маша движется относительно грядки со скоростью, равной сумме скоростей своей и Даши. Метод также привычный для физики. Тут же проясняется аналогия и даже сходство этой задачи с задачей о движении катера в реке по течению. Относительно берега он движется со скоростью, равной сумме собственной скорости и скорости течения.

7. «*Координатное*» решение. Вводится система координат *Oxy*. Записываются уравнения движений Маши и Даши и строятся графики этих уравнений. Находятся координаты точки пересечения этих графиков. Полученный результат осмысливается в соответствии с условием задачи.

8. Используя гиперболу (Рис. 106)

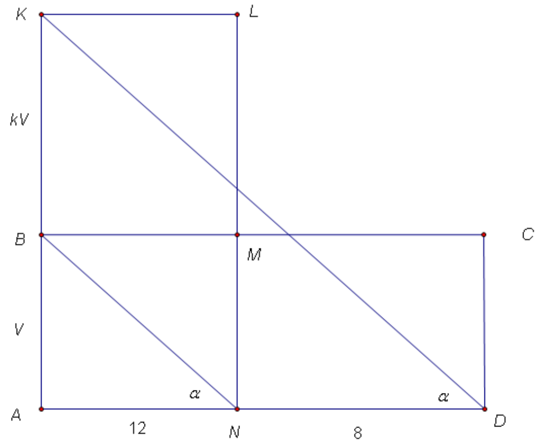


Рис.106

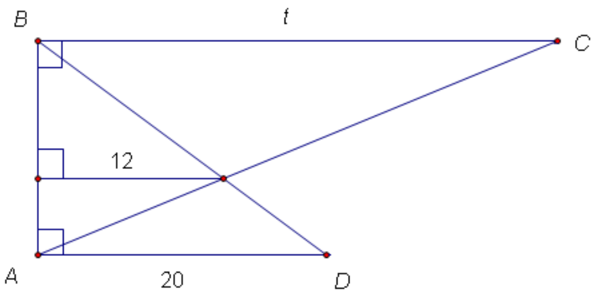
На этом рисунке два прямоугольника *ABCD* и *AKLN*, каждый из которых представляет весь объём работы. Отрезок *AD* изображает время, за которое Маша пропалывает грядку. Согласно условию *AD* = 20. Отрезок *AN* изображает время, за которое Маша пропалывает грядку, если бы она работала одна со скоростью, равной сумме скоростей своей и Даши. Согласно условию *AN* = 12. Отрезок *AB* = *V* изображает скорость Маши, отрезок *BK* = *kV* изображает скорость Даши. Используя свойства гиперболы, получаем параллельность прямых *BN* и *KD*, следовательно, равны углы *BNA* и *KDA*. Тогда имеем:

tgα = $\frac{AB}{12} = \frac{AK}{AD} \Leftrightarrow \frac{V}{12} = \frac{V + kV}{20}$, откуда получаем отношение скоростей $k = \frac{2}{3}$, затем соответствующее отношение временных затрат 3 : 2 и ответ – 30 мин.

Разумеется, можно использовать другую пару параллельных хорд гиперболы.

9. «Среднее гармоническое». Используя ранее рассмотренную задачу о нахождении расстояния (как пример «хорошей задачи) , обозначив время работы Даши, затраченное ею на прополку всей грядки как *t*, получаем такое уравнение

$$12 = \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{1}{20}} \Leftrightarrow t = 30.$$ (Рис.107)



(Рис. 107)

11. «Подобие»

Один из вариантов использования подобия таков.

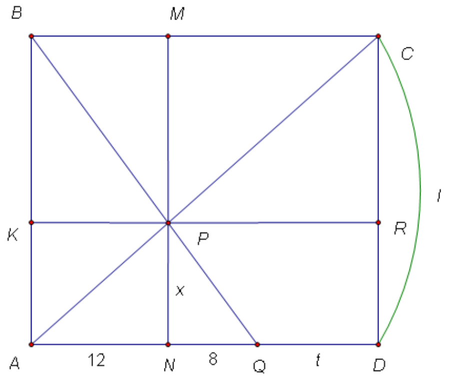
Введём обозначения. На этом рисунке **(** рис. 108 **)**

l - длина всей грядки,

x – расстояние, пройденное Дашей до места встречи с Машей,

t - разность времён Даши и Маши на прополку всей грядки.

Рис. 108



На этом рисунке подобны треугольники:
APN и *ACD*, *APN* и *PCR* , *APN* и *CMP*, *PNQ* и *BAQ* ,
PNQ и *BKP* , *PNQ* и *PMB.*
Выбрав две подходящие пары подобных треугольников, решим задачу. Например,
из подобия треугольников первой пары имеем такую пропорцию:

$$\frac{PN}{CD} = \frac{AN}{AD} \Leftrightarrow \frac{x}{L} = \frac{12}{t+20}.$$

Из подобия треугольников четвёртой пары имеем такую пропорцию:

$$\frac{PN}{AB} = \frac{NQ}{AQ} \Leftrightarrow \frac{x}{L} = \frac{8}{20}.$$

Сравнивая правые части этих пропорций, получаем

$$\frac{12}{t+20} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow t+20=30 \Leftrightarrow T=30.$$

12. «Тангенсы»

Во многих задачах такого рода эффективно работает решение прямоугольного треугольника с помощью тангенса.

На рисунке 109 *PN* – часть грядки, которую прополола Даша до встречи с Машей, потратив на это 12 минут. Эту же часть грядки Маша в одиночку пропалывает за 8 минут.

Рассмотрим треугольник *APQ*, в котором проведена высота *PN* = *x* . Тогда скорость работы Маши равна tgβ, а скорость работы Даши равна tgα.

Из этого рисунка видно, что *x* = 12 tgα = 8 tgβ. Отсюда следует, что отношение тангенсов $\frac{tg\beta}{tg\partial}$ равно $\frac{2}{3}$, то есть скорость Даши составляет $\frac{2}{3}$ скорости Маши. Поэтому время работы Даши в полтора раза больше времени Маши, то есть равно 20·1,5 = 30.

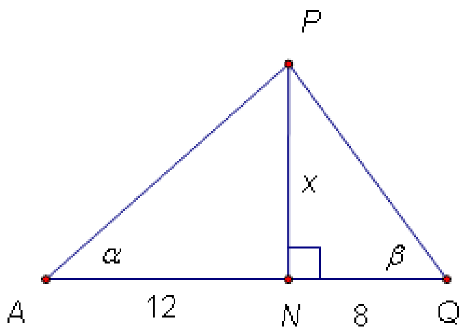


Рис. 109

Я ищу любую возможность (в пределах разумного) показать ученикам вариативность подходов к изучению математики. Прекрасно, если есть доступное для детей изложение, отличное от того, что приведено в учебнике. И вовсе не потому, что в учебнике плохо. Но именно для того, чтобы дать возможность выбора. Очевидно, что, пробуждая творческую активность школьника, мы должны быть готовы и к некоторым издержкам в работе. Хуже становится со временем—ведь все идеи и способы надо постараться выслушать и как-то оценить. Иногда рушится весь план урока и остаётся только импровизация, что очень интересно, но требует порой больше того, на что я в данный момент способен. Очень много приходится выслушивать предложения «в порядке бреда» и надо чрезвычайно терпимо относиться к любым ошибкам. Если дети будут бояться ошибиться, то атмосфера подлинного творчества вряд ли возможна.

Нельзя не сказать, что такой атмосфере чрезвычайно способствует коллективный поиск решения. Задача в классе порой решается так же, как забивается гол в футбольные ворота: кто-то наносит решающий удар, но работала на него вся команда.

В таком же коллективном духе можно строить теорию — не изучать, а именно строить. Вот пример такого коллективного творчества — изучение параллельности плоскостей в пространстве. Основной приём — аналогия. Сначала мы вместе вспоминаем всё, что известно о двух параллельных прямых на плоскости: определение, свойства, признаки. Затем в той же последовательности появляются определение, свойства и признаки параллельных плоскостей. Конкретно:

Утверждение 1. *Свойство параллельных прямых*.

Если две прямые параллельны и одна из них пересекает третью прямую, то и вторая пересекает её.

Утверждение 1′. *Свойство параллельных плоскостей*.

Если две плоскости параллельны и одна из них пересекает третью плоскость, то и вторая пересекает её.

Утверждение 2. *Свойство параллельных прямых*.

Если две прямые параллельны и одна из них перпендикулярна третьей прямой, то и вторая перпендикулярна ей.

Утверждение 2'. *Свойство параллельных плоскостей*.

Если две плоскости параллельны и одна из них перпендикулярна третьей плоскости, то и вторая перпендикулярна ей.

Утверждение 3. *Свойство параллельных прямых*.

Если две прямые параллельны и одна из них пересекает третью прямую под углом φ, то и вторая пересекает её под углом φ.

Утверждение 3'. *Свойство параллельных плоскостей*.

Если две плоскости параллельны и одна из них пересекает третью плоскость под углом φ, то и вторая пересекает её под углом φ. (Аналогия здесь не совсем полная.) При таком подходе, как видно, возможно «забегание вперёд», но это не страшно, доказательства никуда не денутся, но зато появляется набор теорем, которые надо доказывать.

Придумывая задачи, можно быстро оказаться в чём-то неведомом. Вот простенький пример. Пусть заданы некие границы для каждой стороны прямоугольника и угла между его диагоналями, точнее, указаны границы, за которые эти величины не могут заходить. Требуется найти границы его площади.

Идея решения такова. Ограничения на угол переводим в ограничения на отношение смежных сторон x и y прямоугольника. Полученные три ограничения определят некоторую область в системе координат: ограничения на стороны — это ограничения по осям координат, ограничения на отношение сторон задают угол с вершиной в начале координат. И окажется эта область многоугольником. Наибольшую (наименьшую) площадь, т. е. границы произведения xy сторон, мы сможем найти, проводя линии уровня, представляющие собой гиперболы из семейства $xy = c$. Результат дадут те гиперболы, которые пройдут через вершины многоугольника,— это становится видно из рисунка или несложных вычислений. В целом всё это вместе похоже на задачу динамического программирования.

IУ.7. С ОДНОЙ СТОРОНЫ. С ДРУГОЙ СТОРОНЫ...

О воспитании в целом написано огромное число книг, о воспитании в процессе математического образования нет почти ничего. Известны отдельные выступления учёных (Н. Лобачевский, А. Хинчин, А. Александров). Есть некая методическая литература. Читать её надо очень придирчиво, отделяя зёрна от плевел. Часто встречались грустные стереотипы: воспитывать — это повесить в классе портрет, например, С. Ковалевской или решать задачи о трудовых достижениях земляков.

Говоря о воспитании, о системе воспитания, хочется выйти за пределы эмпирики, опыта, особенно собственного опыта, значение которого так часто раздувается . Перемалывая литературу по проблемам воспитания, очень легко сбиться на эклектизм: один сказал этак, другой — так, мне нравится, что сказали они оба, давай-ка я соединю их точки зрения.

Ох, как аккуратно надо прикасаться к этим проблемам!

Вроде бы проблемы нет: любая совместная деятельность взрослого и ребёнка так или иначе воспитывает, так зачем, спрашивается, городить огород? Но уж подозрительно просто получается — провёл урок, значит, воспитал! Увы, урок — это не совместная деятельность: учитель учит, а ученик учится. Есть ещё один подозрительный стереотип в воспитательной работе — вера в то, что воспитание — это говорение, воспитательский час, например. Сколько раз я чувствовал себя в роли крыловского повара!

Закончив этот небольшой пассаж о воспитании в целом, снова перейду к его возможным направлениям. О развитии интеллекта, о воздействии на творческое начало в ребёнке, причём именно на математическом материале, известно довольно много. Хуже обстоят дела с прочими направлениями в воспитании, например с мировоззрением. Обычно здесь на первое' место выводят физику, другие естественные науки, историю. Тому, понятно, есть причины: в этих науках имеешь дело с реалиями, в математике же только с тем, что написано на бумаге. И тем не менее.

Одна из линий — развитие диалектического мышления. Отличается оно от формального и тем, что работает с противоречием, перед которым последнее останавливается как перед стенкой. В математике противоречия невозможны, часто они конец рассуждения. Любимое наше слово — «следовательно» — и говорит о том, что противоречий не может быть. Вне математики, как известно, все иначе. Вот несколько примеров;

1) Фраза «Я лгу» содержит противоречие.

2) Как может быть такое: «Речка движется и не движется»? Так всё-таки движется или не движется? (Если речка, то движется, но так медленно, что движение это не заметно с берега. Я видел такую речку именно в Подмосковье, как и сказано в песне – речка Рожайка)

3) Кто – то написал: «Дурак — это всякий инакомыслящий».

4) А как понимать такое высказывание: «В каждой шутке есть доля шутки»?

5) «Это правильно, но это неверно» (А. Платонов).

Что-то странное, на первый взгляд. Но если подумать: правильно - это безупречно с точки зрения логики; верно - это годится реально. Ясно, что может и не быть совпадений.

Нечто похожее есть у Р.Фейнмана: «Это верно и неверно.»

То есть где – то верно, а где – то нет.

Ещё пример. Вот отрывок из книги В. Арнольда « Что такое математика?». Он цитирует М. Лидова: «Как и все математики…ты учишь студентов теореме единственности, согласно которой интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений не пересекаются. Но это утверждение (хотя вы его и доказываете безукоризненно правильно) совершенно неверно. Например, уравнение $dx / dt = -x$….имеет решение $x = e^{-t}$. … например, при $t = 10$ между этими двумя интегральными кривыми не просунешь и атома.» И приводит реальный пример тому – заключительную часть причаливания корабля к пристани, которая происходит вручную.

6) «На самом деле всё не так, как на самом деле». Это не только каламбур.

7) Универсальный совет - не следовать никаким советам.

Я полагаю, что именно противоречие часто является основой иронии, анекдота и вообще юмора.

Есть и более серьёзные примеры. Научные дискуссии о природе света, бесконечности Вселенной, обратимости времени, даже знаменитый спор о том, что было раньше: курица или яйцо (шутливый ответ: «раньше всё было») , так или иначе приводили к осмысливанию возникающих при этом противоречий. Я уже не говорю о квантовой механике, некоторые положения которой противоречат «нормальной» логике. В принципе любой спор говорит о противоречии.

Методика преподавания математики как бы консервирует эту разницу между математической наукой и реальностью. В процессе обучения ею на главное место часто выдвигается развитие именно логического мышления. С какой стати? Любая наука развивает таковое, но ведь не то в ней главное! И почему математика должна быть здесь исключением?

Не очень я понимаю и сам термин «логическое мышление», мне яснее, когда говорят о логической культуре мышления. Мышление по природе своей вряд ли входит в рамки чистой логики, оно гораздо богаче. Да и поступки человека идут не от знаний формальной логики.

Вот что пишут В. Дружинин и Д. Конторов: «Если сопоставить и проанализировать поступки любого человека, то выясняется, что: 1) очень многие из них, если не большинство, не могут быть признаны наилучшими; 2) они бывают ошибочными; 3) отдельные поступки просто нелепы. Неосведомлённость, недостаток времени, неумелость, порыв, упрямство толкают на решения и действия, которые невозможно не только оправдать, но и объяснить с позиций хотя бы того же здравого смысла. Вся военная история изобилует фактами такого поведения людей».

Л. Млодинов в своей книге «Несовершенная случайность», описывая роль случая в жизни общества пишет: «… поведение людей не только непредсказуемо, но и зачастую просто иррационально (в том смысле, что мы иной раз действуем в ущерб нашим кровным интересам…» и далее « не представляется никакой возможности точно описать или взять под полный контроль все жизненные обстоятельства.» «Последовательно дедуктивное мышление, уверование в детерминизм и попытки объяснять происшедшее на рельсах логики создают иллюзию ясности, там, где царит случайность.»

Так можно ли в преподавание хоть в какой-то степени ввести освоение противоположности, даже противоречия? Полагаю, что да, хотя прекрасно понимаю условность этого заявления. О каком бы противоречии мы ни говорили, оно не должно быть логическим противоречием.

Прежде всего для этого надо отказаться по возможности от единственной точки зрения. Сюда годится многое: разные способы изложения теории, разные решения задач, разные точки зрения на одно и то же, даже на решение уравнения $x^x=x$, на необходимость ОДЗ и т. п.

Детям порой хочется, чтобы учитель математики раз и навсегда рассказал, как надо делать. А я говорю: можно так, а можно этак. Выбирайте. (Без крайностей, конечно. Вообще я сформулировал для себя «аксиому 0». Вот она: «Всякое содержательное утверждение имеет естественные границы применимости». С учётом этой «аксиомы» я толкую любое категорическое высказывание.)

Далее, я ищу всякие возможности для разрушения однозначности как обязательного элемента в работе. Вот примеры:

1) Что больше: $.x^2$ или x?
2) Какой прогрессией является последовательность из одних только единиц?
3) Сколько здесь прогрессий: 1, 2, 4, 8, 16?

А здесь: $a^2x^2 + ax + 1$ — квадратных трёхчленов? «Три»,— выдал мне однажды закоренелый троечник. Я слегка обалдел от неожиданности — а где же третий? — и потом, поняв, что он увидел, выдал ему «пятерку».

4) Функция, равная константе, является возрастающей или убывающей?

5)Что стоит за равенством $x + y = 0$?

6) Площадь - это интеграл от ординаты, но и производная от объёма. Последнее - весьма занятно, наливая воду в графин вы словно видите эту производную, глядя на поверхность поднимающейся воды.

Важно разрушить сложившиеся стереотипы: касательная не обязательно должна иметь с кривой одну общую точку, объём может равняться нулю, а площадь может быть отрицательной (в некотором расширенном понимании), объект существует, а построить его невозможно.

Чуть ли не самое важное значение комплексных чисел для среднего образования - они меняют годами устоявшуюся точку зрения на решение квадратных уравнений.

Выигрышно здесь выглядят задачи, не имеющие решения. Я спрашиваю: «Можно ли?», а оказывается, нельзя. Я предлагаю вычислить значение некоторой величины, а условие задачи противоречиво. Я говорю: «Докажите...», а для доказательства нужны ещё какие-то данные. Я предлагаю найти максимум, а на самом деле есть минимум. (Это очень любопытное зрелище. Ученики фактически находят минимум, а в ответ пишут максимум, ибо так спрашивали.) Вопрос о курице и яйце забавным образом можно перенести на урок математики. «Так всё-таки,— говорю я,— где причина, а где следствие в таком вопросе: две прямые на плоскости могут находиться в трех разных положениях: совпадать, пересекаться или быть параллельными, так как система из их уравнений может иметь бесконечное множество решений, одно решение, ни одного решения или, наоборот, различные случаи в решении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными обусловлены взаимным положением двух прямых на плоскости?»

Очень хороши парадоксы. Формула Симпсона дает по происхождению своему точный результат, если исходная функция — многочлен не выше второй степени. Однако если по этой формуле сосчитать интеграл $\int_0^1 x^3dx$, то результат будет верным. Как же так? Ещё пример. Вычисляя корни кубического уравнения x^3-15x - 4 = 0 по формуле Кардано, мы приходим к извлечению корня квадратного из отрицательного числа, что до знакомства с комплексными числами является делом невозможным. Однако несложно получить, что числа 4, $-2 \pm \sqrt{3}$ являются его корнями. И я уже не говорю о логических парадоксах, приведенных в книгах Р. Смаллиана.

Разговор о преодолении формального мышления на уроках математики кажется важным ещё и потому, что мне довелось видеть школьников, как бы это помягче сказать, «деформированных математикой». Способные ученики переносили сугубо специальные приёмы мышления, свойственные математике, на другие предметы и даже на окружающую жизнь. Порой это приводило к полному неприятию ими гуманитарных предметов, к трудностям в общении со своими сверстниками.

От диалектического мышления перейдем к самой диалектике. Не причисляя себя к знатокам в этой части, но пытаясь ответить на возникающие передо мной вопросы, я опять же залез в литературу. Многое оказалось не таким уж сложным, а кое-какие сочинения философов были просто интересными. Нужное для себя в практическом отношении я нашёл у А. Шептулина (см. также статьи А. Александрова: Математика в школе.—1972.— № 1, 2; 1986.—№ 1), у него приведено 12 принципов диалектического метода познания. Примем их за данность и посмотрим, как они могут быть реализованы в преподавании. Итак, вот эти принципы:

1) отражения;
2) активности;
3) всесторонности;
4) восхождения от единичного к общему и обратно;
5) взаимосвязи качественных и количественных характеристик;
6) детерминизма;
7) историзма;
8) противоречия;
9) диалектического отрицания;
10) восхождения от абстрактного к конкретному;
11) единства исторического и логического;
12) единства анализа и синтеза.

Перейдём к рассмотрению каждого из этих принципов, не вдаваясь подробно в содержание, но только стараясь, не исказив его, найти этим принципам примеры в математическом образовании.

1) Принцип отражения призывает нас быть объективными и при исследовании объекта исходить не из мышления, а из самого объекта, из его свойств и его отношений.

Это требование существенно, когда мы строим математические модели, в частности, когда решаем прикладные задачи. Пример с «концом света», который я приводил, подходит и здесь. Человечеству в этом примере была «навязана» некая модель в виде дифференциального уравнения. Любопытно вернуться и к текстовым задачам. Если мы воспринимаем их как отражение реальности, как прикладные задачи, то приходится считаться не только с математикой, но и со здравым смыслом. Со скоростью 15/17 км/ч автомобили всё-таки не ездят. Ещё пример. Изначально параллельны все-таки отрезки, а не прямые. Прямая — из мышления, а не от реалии.

2) Принцип активности требует изменения объекта (а также идеального образа изучаемого объекта) с целью выявления присущих ему свойств и связей.

Примером тому, как это можно проделать в математике, является варьирование параметров в формуле, в частности рассмотрение ситуации в пределе. Пусть мы решаем квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$. Запишем формулу его корней: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Интересно посмотреть, что будет происходить при стремлении к нулю коэффициентов уравнения, особенно *a.* Уравнение будет все меньше отличаться от линейного. А что будет с формулой корней? Согласно ей один из корней уйдет в бесконечность, а для нахождения другого нам потребуется раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Мы должны в итоге получить корень линейного уравнения, к которому «стремится» квадратное.

Так же интересно понаблюдать зависимость одного из коней от другого, хотя бы в простейших случаях.

Ещё пример: посмотрим, во что переходит формула для объёма усеченного конуса с радиусами оснований R и r $(R>r)$, когда $r \to 0$ и $r \to R$.

Содержательный пример любопытного предельного перехода можно найти в курсе стереометрии – об этом говорилось выше на примере теоремы Пифагора.

И некоторые другие формулы планиметрии можно получить, рассматривая предельные случаи формул сферической геометрии (формулу теоремы косинуса, формулу суммы углов треугольника …).

3) Согласно принципу всесторонности, объект изучения должен рассматриваться (по возможности) во всех его связях и отношениях. Впоследствии надо выделить какое-то одно основное свойство, а все остальные увязать с основным.

Так естественно поступать, когда мы знакомим детей с новым понятием. Вот перед нами правильная пирамида. Какие её свойства видны непосредственно? Набираются разные. Из них и выделяется то, которое принимаем за определение. Все другие замеченные свойства стараемся вывести из определения. Кстати, а «за что» пирамиду назвали правильной? И вообще, какие свойства фигуры говорят о её «правильности»? Тут мы выходим на симметрию фигуры: чем больше элементов симметрии у фигуры, тем она «правильнее». Итак, определяя правильную пирамиду, приходится забегать очень далеко от её определения.

И вопросы к ученикам могут стать чуточку иными. Не «Что такое перпендикуляр к плоскости?», а «Какие свойства перпендикуляра к плоскости тебе известны?». И далее: «Какое из них можно принять за определение перпендикуляра?»

Когда мы изучаем перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей в пространстве, упорядочивание большого списка теорем как системы связей между объектами и есть реализация принципа всесторонности. При этом одно и то же утверждение можно трактовать и как свойство, и как признак. Например, такое: «Если две параллельные плоскости пересечь третьей, то полученные прямые пересечения параллельны между собой». Его можно подать как свойство параллельных плоскостей: «Если две плоскости параллельны, то они пересекают третью плоскость по параллельным прямым». Но можно подать и как признак параллельности двух прямых, а именно: «Две прямые параллельны, если они получены в результате пересечения плоскости с двумя параллельными плоскостями».

Принцип всесторонности пронизывает содержание математического образования настолько, что мы порой и не замечаем, как его используем. Вот два примера: 1) комплексное число предстаёт в разнообразных формах — алгебраической, тригонометрической, геометрической и показательной; 2) многочлен с одной переменной рассматривается с собственно алгебраической точки зрения, когда мы, к примеру, приводим его к стандартному виду; вместе с тем мы находим от него производную т. е. рассматриваем его как функцию; наконец, его можно понимать как кортеж (упорядоченный набор коэффициентов — чисел, когда сама переменная не играет никакой роли), сводя его, по сути, к понятию вектора.

Этот принцип на практике упрятан в самые расхожие ситуации. Вот возьмем число 1 — уж чего проще? Эту самую единицу – я уже говорил об этом - можно расписать чуть ли не двадцатью различными способами. А затем использовать полученное представление в конкретной ситуации. Приведу немного примеров;

1) 1 —это нейтральный элемент операции умножения. Когда мы говорим, что выражение $x^2 + x+1$ является неполным квадратом, то мы молчаливо полагаем его в виде $x^2+x \cdot 1 + 1$. Аналогичное представление используется, когда мы видим в выражении $\sin x + \cos x$ скалярное произведение двух векторов, что ясно, если записать это выражение в виде $1\cdot\sin x + 1 \cdot\cos x$.

. Что с этим можно делать, я уже упоминал,

Похожую роль играет число 1 при действиях с векторами. Известно равенство $1\vec{a} = \vec{a}$. Когда векторное пространство вводится аксиоматически, оно фигурирует в списке аксиом умножения вектора на число. В традиционном школьном курсе, когда операции с векторами задаются не аксиоматически, а содержательно, мы его выделяем специально. Я уже упоминал, зачем нужна специальная аксиома и зачем нужно этому тривиальному равенству специальное объяснение, например: требуется упростить выражение: $2\vec{a} + \vec{a}$. Можно «вынести вектор $\vec{a}$ за скобку», т. е. воспользоваться известным свойством умножения вектора на число. Что останется при таком «вынесении» от второго слагаемого? Ясно, что число 1. Но каким образом оно появится в скобках? А вот из этого самого равенства $1\vec{a} = \vec{a}$.

2) 1 — это произведение двух взаимно обратных чисел. Пусть требуется доказать неравенство $a + (1/a) > 2$ для положительных чисел. Запишем: $2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$ и перенесём полученное выражение в левую часть. Тогда всё сведется к очевидному неравенству

$$(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 \geq 0.$$

3) 1 — это тригонометрическая единица, т. е. сумма квадратов синуса и косинуса одного аргумента. Пусть требуется доказать неравенство $\sin^3 x + \cos^3 x \geq -1$. Перепишем это неравенство в таком виде: $\sin^3 x + \cos^3 x \geq -(\sin^2 x + \cos^2 x)$. После переноса выражения из правой части в левую приходим к неравенству $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^2 x + \cos^2 x \geq 0$, а затем к такому:

$\sin^2 x(\sin x + 1) + \cos^2 x(\cos x + 1) \geq 0$. Оно уже очевидно.

Рассматривая геометрическую фигуру — пусть это будет треугольник,— мы можем заниматься им как объектом с какими-то свойствами, и мы возимся с ним, не выходя за его пределы. Так, например, можно доказать теорему о точке пересечения его медиан. Но тот же самый треугольник мы можем увидеть с другой стороны, как часть другой фигуры. И даже как образ другого треугольника, о котором мы уже что-то знаем, например, равностороннего. Как пересекаются медианы в равностороннем треугольнике узнать несложно, после чего аффинным преобразованием переведём его в заданный треугольник.

Так, например, выйдя за пределы треугольника, может быть доказана теорема о точке пересечения его высот.

Замечу, что выход за пределы фигуры для учеников куда менее привычен.

Ещё пример. Требуется нарисовать ортогональную проекцию правильного тетраэдра на плоскость его сечения, являющегося квадратом. Не сразу понятно, что получается. Но если представить себе этот тетраэдр как часть куба (рёбра тетраэдра являются диагоналями соответствующих граней куба), то результат проектирования очевиден - получится квадрат.

Небольшая история по этому поводу из жизни первых христиан,

Авва Евлогий был однажды так грустен, что не мог этого скрыть.

— Почему ты грустишь, отче? — спросил его один старец.

— Потому, что я усомнился в способности братьев познавать великие истины Божьи. Трижды я показывал им льняной лоскуток с нарисованной на нём красной точкой и спрашивал, что они видят, и трижды они отвечали: «Маленькую красную точку». И никто не сказал: «Лоскуток льна».

4) Восхождение от единичного к общему и обратный переход, иными словами, единство индукции и дедукции,—- традиционные приемы методики. Не буду о них распространяться, но стоит подчеркнуть, что переход от единичного к общему часто предполагает наблюдение. Например, наблюдая различные геометрические фигуры, мы приходим к таким понятиям, как: выпуклость, симметричность, многогранник, геометрическое тело и т. д. Известна триада: «От живого созерцания к абстрактному мышлению, а от него к практике». Только сделать бы созерцание «живым». Движение от общего к частному зависит от педагогической интуиции самого учителя. Так, мне кажется, естественно определять призму как частный случай цилиндра и неким перехлёстом

считать, что функция — частный случай отношения. Но возможны ведь и другие взгляды на это же.

5) Взаимосвязь качественных и количественных свойств объекта я понимаю так. Есть такие свойства объекта, которые можно измерить, и такие, которые измерить нельзя. При этом измерение — это такое сравнение данного свойства, которое допускает введение численной характеристики. Например, есть свойство протяжённости объекта, и его можно сравнивать, в результате чего мы приходим к понятию длины.

Примеры применения этого принципа появляются всякий раз, когда мы хотим какое-либо свойство объекта выразить числом. Яркий пример: крутизна графика функции и производная. Ещё ряд примеров: выпуклость функции и вторая производная, «правильность» ограниченной фигуры и число элементов в её группе симметрии. Как-то я прочитал на банке с огурцами, что они имеют неправильную форму. Можно ли неправильную форму огурца охарактеризовать численно? Любопытен известный перегиб по этой части: средний балл аттестата. Можно ли считать, что он точно отражает какое-то свойство ученика? Какое же? То же можно отнести и к идее оценки интеллекта школьника по результатам стандартного тестирования

Говоря о наибольшем круге (шаре), который умещается в данной фигуре, я говорю о «пузатости» этой фигуры (шутливый термин — позже я узнал, что его употреблял ещё И.Кеплер) — чем больше радиус круга (шара) , тем «пузатее» фигура.

Я знаю хороший пример перехода количества в качество: свойства сложения, верные для конечного числа слагаемых, перестают выполняться, когда их число становится бесконечным, и мы имеем дело с расходящимся рядом – там в результате перестановки слагаемых можно получить что угодно.. Вообще сравнение конечного и бесконечного даёт много материала на эту тему, чего стоит один только рассказ об аксиоме выбора и её использовании. К сожалению, все это далековато от школьного курса и годится только на уровне рассказов.

6) Принцип детерминизма богат содержанием. Согласно ему необходимо искать причины возникновения любого объекта изучения, его функционирования и развития. Математические понятия создаются, развиваются, уточняются, как и во всякой другой науке.

Я плохо представляю себе, как можно начать объяснение нового понятия непосредственно с определения. Скажем, речь должна идти о скалярном умножении двух векторов. Откуда появилась такая операция? Зачем она нужна? Почему её определение именно такое?

Или разговор о чётной или нечётной функции. Я рассказываю следующее. Построение графика функции облегчается, если известна его симметрия — осевая или центральная. Тогда мы строим его только при $x \geq 0$ (если осевая симметрия относительно оси y, а центральная относительно начала координат), а затем используем симметрию. Но как её установить, не построив самого графика? Для этого и вводятся специальные понятия чётности и нечётности функции. Работая с аналитической записью согласно определениям этих свойств, мы получаем возможность говорить о симметричности графика функции до того, как он построен.

После этого можно говорить о других возможных симметриях графика, в том числе о переносной симметрии, которая приводит к понятию периодичности функции.

Мы начинаем решать тригонометрические уравнения. Зачем? Ещё одна задача из головы? Но можно привести простые примеры тому, откуда они могут появиться. Скажем, надо построить треугольник со сторонами 4, 5, 6. Так вычислим угол между сторонами, равными 4 и 5, при котором третья сторона равна 6. Для этого можно, используя теорему косинуса, искать угол, зная его косинус. Так мы приходим к тригонометрическому уравнению.

Известно, что функция может задаваться не одним аналитическим выражением, а несколькими. Как это получить? Вот пример. Перпендикулярно какой-либо диагонали квадрата проводим отрезок между его сторонами. Известна длина стороны квадрата. Требуется найти длину проведенного отрезка, зная расстояние от него до фиксированного конца взятой диагонали.

Источником многих математических понятий является практическая деятельность, понимаемая достаточно широко. Я стараюсь всячески подчеркнуть именно эту сторону их происхождения.

Конкретно, к производной можно подойти по-разному: искать скорость движения, охарактеризовать крутизну графика функции или сразу же искать наилучшее приближение функции. Все эти подходы существенны, и только разговор о касательной для произвольной кривой не представляется мне убедительным в начальном знакомстве с производной. В последние годы я рассказываю о производной до начала систематического курса начал анализа (этого требует физика). Говорить здесь о пределах неуместно.

Отсюда и становится ясно, почему мне не нужна касательная - ведь она определяется при помощи предела функции в точке, весьма сложного для чёткого понимания.

Тут же ещё одна заковыка - понятие касательной как таковой почти не используется в школьном курсе, разве что решаем задачи на составление уравнения касательной к графику функции, а зачем мы их решаем - сие известно только автору такой задачи. В серьёзном курсе анализа с понятием касательной связаны, к примеру, такие понятия как нормаль к кривой, угол между кривыми, выпуклость функции; там это оправдано, Итак, понятие касательной и сложно, и по существу дела в школьном курсе математики не является необходимым.

Потому начинаю с понятия мгновенной скорости (что же показывает спидометр?) — здесь я (немного) отхожу от конкретики и объясняю, что в этом понятии упрятано противоречие: с одной стороны, её как бы нет, ибо нет необходимого для нахождения скорости промежутка времени, а с другой стороны, есть движение, а значит, есть скорость движения. Но математика преодолевает это противоречие, вводя идеальные понятия, как-то «момент времени» и «мгновенная скорость». (Вообще, что такое момент времени? Обычно я говорил ученикам нечто туманное – это такой временной промежуток, длительностью которого в нашей проблеме мы пренебрегаем. От ученицы Полины В. я получил замечательный ответ – это точка на числовой оси.)

Внедрять идеальные понятия в детские головы всегда трудно, и потому я здесь прибегаю к надежному помощнику — наглядной интуиции. Я начинаю разговор о крутизне графика функции — наглядно ясному свойству, имеющему хорошую практическую основу. Все поднимались по лестницам или катались с горок на лыжах.

Поэтому, глядя, к примеру, на рисунок параболы $y = x^2$ при $x > 0$, ученики сразу видят, что, чем больше x, тем круче идет кривая — без всякого формального определения крутизны. Столь же ясно, что крутизна любой прямой (не перпендикулярной оси абсцисс) постоянна. Её естественно принять равной угловому коэффициенту прямой, т. е. тангенсу угла наклона к оси x . (Можно было бы взять и сам угол, но безразмерная величина лучше. Тангенс же удобен тем, что он напрямую связан с уравнением прямой.)

Теперь начинаются основные рассуждения. Ход мысли таков. Наша общая задача — качественное понятие крутизны кривой свести к её вычислению, к какой-нибудь формуле. При этом вычисления должны подтверждать то, что нам ясно из наглядных соображений, в частности и для прямой. Попытаемся решить эту задачу в простом частном случае — вычислить крутизну параболы

$y = x^2$ в точке x=1. Сделаем рисунок параболы $y = x^2$ и рассматривать будем только правую окрестность этой точки (рис. 110).

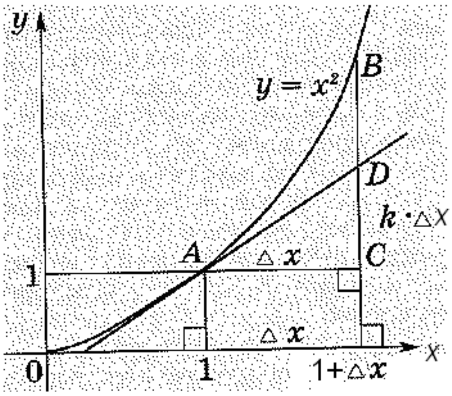


Рис. 110.

Крутизна любой прямой, проходящей через эту точку, известна, как только известно её уравнение, а крутизна параболы — пока нет. Нельзя ли свести крутизну параболы к крутизне прямой каким-либо образом? Но о какой прямой может идти речь — ведь через точку *A* (1; 1) проходит много разных прямых? Из всех прямых, проходящих через точку *A,* надо выбрать ту единственную, крутизну которой мы и примем за крутизну параболы в этой точке. Из каких же соображений выбрать такую прямую?

На нашем рисунке мы видим, что при x=1 парабола и прямая совпадают, а при $x = 1+\Delta x$ отличаются. На какую же величину?

Из рисунка видно, что отличие между ними равно разности между приращением функции $y = x^2$ и приращением прямой $y = кx + 1$. Эта разность выражается так: $BD=BC- CD =$ $(1+\Delta x)^2 - 1 - к\Delta x = 2\Delta x + (\Delta x)^2 - к\Delta x = (2-к)\,\Delta x + (\Delta x)^2$.

Из этой формулы видно, что отличие параболы от прямой состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое пропорционально Δx, а второе становится пренебрежимо мало при достаточно малых Δx (сие легко иллюстрируется численно). И так как мы хотим добиться в некотором смысле «совпадения» параболы и прямой, то в качестве углового коэффициента $к$ подходящей нам прямой имеет смысл выбрать такое число, при котором первое слагаемое исчезает вообще, т. е. обращается в нуль. А это происходит при $к$=2.

Итак, крутизну параболы $y = x^2$ в точке x=1 имеет смысл считать равной 2. Аналогично решается задача и для произвольной точки x, в которой крутизна оказывается равной $2x$. После этого можно убедиться в том, что наш способ вычисления крутизны «хороший», т. е. соответствует нашему интуитивному представлению о крутизне. Далее можно переходить к другим кривым, а затем и к определению крутизны.

Вот такая «легенда» о крутизне и подводит нас к определению производной.

Прямая, найденная нами в поисках крутизны кривой в данной точке, и есть касательная, но здесь нам важно не существование одной общей точки у прямой и кривой, а то, насколько хорошо прямая приближает кривую. Это обстоятельство напрямую выводит на разговор о линеаризации функции с целью нахождения её приближённого значения. Практическое значение этой идеи не требует комментариев.

Следуя этой идее, можно прекрасно выстроить всю теорию дифференцирования, не используя понятие предела. Но уж если и вводить пределы, то удобнее это делать через бесконечно малые (лучше бы – исчезающе малые, ибо в этом слове подразумевается процесс). Понятие бесконечно малой (величины, функции, последовательности, переменной) наглядно — каждый видел воду, выливающуюся из бутылки, результаты действий с бесконечно малыми легко предугадываются и доказываются в случае сложения, вычитания и умножения.

Число A естественно определить как предел величины a в данной точке, если в достаточно малой окрестности данной точки выполняется равенство $a=A + \alpha$, где α — бесконечно малая, и проиллюстрировать это равенство реальным процессом нахождения или измерения какой-либо величины (скажем, отношения длины окружности к радиусу) с всё возрастающей точностью. Бесконечно малая здесь фигурирует как погрешность. Исходя из такого определения предела, несложно получить теоремы о пределах.

Нелишне сказать, что термин «математический анализ» предполагает вопрос: «Анализ чего?» И по своему происхождению это как раз и был анализ бесконечно малых, что и отразилось в названиях первых учебников по этому предмету, начиная с учебника Г. де Лопиталя.

Анализировать в мире бесконечно малых есть что. Вот один элементарный пример. Возьмём теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд одной окружности. Представим себе диаметр AB некоторой окружности с центром O и хорду CD , перпендикулярную этому диаметру в точке K. Тогда имеем такое равенство: $AK \cdot KB = CK \cdot KD$. Если взять точку K очень близко к концу диаметра, например, к точке B, то ученики видят довольно странную картину. Имеется один большой отрезок AK , почти равный диаметру, и три "очень маленьких отрезочка: KB ,CK, KD. А диаметр можно взять очень большим, скажем 1 км. А каждый из "очень маленьких отрезочков" можно сделать меньше 1 мм. И как же тут получаются равные произведения? (Рис. 111)

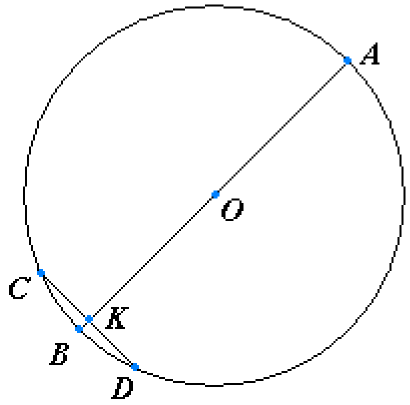


Рис.111

Чтобы прояснить эту ситуацию, перейдем к вычислениям. Пусть R - радиус окружности, а $\angle COK = \varphi$. Тогда $CK = R \sin\varphi$, $KB = R(1 - \cos\varphi) = 2R \sin^2(\varphi / 2)$. Известно, что при малых φ синус эквивалентен углу. Поэтому длина CK пропорциональна углу φ, а длина KB пропорциональна квадрату угла φ. Таким образом, бесконечно малые KB и CK имеют "разный характер", разную скорость убывания: KB убывает быстрее, чем CK. Существенно быстрее. Далее можно перейти к общепринятой терминологии и говорить уже о сравнении порядков малости для бесконечно малых функций.

Дальнейшие ходы — эскизно — таковы. Исходя из приближённого равенства для дифференцируемой функции $y(x) \approx kx + l$ в достаточно малой окрестности точки x выводим формулы для производных суммы функций, разности функций, произведения функции на константу и сложной функции. Далее выводим формулу для производной произведения двух функций, исходя из формулы $yz = 0{,}25\,((y+z)^2 - (y-z)^2)$. Затем методом математической индукции получаем формулу для производной от x^n (n — натуральное, большее чем 2). Исходя из равенства $1=x(1/x)$, выводим формулу для производной функции $y = 1/x$, а затем частного двух функций. И наконец, производная обратной функции выводится из формулы производной сложной функции и соотношения $z(y(x)) = x$, если функции y и z взаимно - обратны. Впрочем, эту формулу можно получить из геометрических соображений.

Всё это не слишком сложно. Тем не менее мне все время хочется перейти к работе с и вывести, например, формулу производной произведения из равенства $d(yz) = (y + dy)(z + dz) - yz$. Наглядный смысл этого равенства очень прост: рассматриваются два прямоугольника — один со сторонами y и z, а другой со сторонами $y + dy$ и $z + dz$. Немного о дифференциале. Для начала замечу, что это понятие отразилось в таких названиях, как «дифференцирование», «дифференциальное исчисление», то есть исчисление дифференциалов. Он удобен для преподавания уже тем, что его можно показать на рисунке отрезком, потому он нагляднее, чем производная Задача дифференцирования в том, чтобы найти длину этого отрезка. Задача интегрирования обратная – зная длину этого отрезка, найти саму функцию. Всё перед глазами.

Исчисление дифференциалов в начале курса – пугающее название для вычисления длин отрезков – и только. Исчислять дифференциалы – это искать соответствующие длины отрезков для суммы функций, их разности, произведения.

Вместе с тем, дифференциал показывает эффективную работу математической символики (в записи интеграла, при интегрировании, решении дифференциальных уравнений…). Эффектно выглядит эта работа при нахождении производной от функции, заданной параметрически. Пусть функция задаётся равенствами $x = x(t)$, $y = y(t)$. Далее для нахождения производной одна строчка, именно:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}\,.$$

Симпатично выглядит «взаимное уничтожение» символов двух процедур: дифференцирования и интегрирования в таких записях $d\int f = f$ и $\int df = f$ (с оговоркой о константе).

Дифференциал интересен и тем, что он многосторонен. С его помощью можно находить приближённое значение функции, и тогда символ dx трактуется как приращение аргумента и может быть конкретным числом. Вместе с тем в других приложениях, в частности, в физике символ dx трактуется как бесконечно малая. Отмечу также его куда большую роль, нежели производной, в дальнейшей математической теории, например, для функции двух переменных или в нестандартном анализе.

Не могу удержаться, чтобы не привести фразу Г. Фрейденталя: « Среди математиков, которые в состоянии обучать математике так, как физики её применяют, есть лишь немногие, которые считают желательным, чтобы студент познакомился с этим, и ещё меньше тех, кто имеет мужество так преподавать.» Любопытно, что Г. Фрейденталь в своём сочинении «Математика как педагогическая задача» (откуда и взята эта фраза) избегает термина «производная», употребляя вместо него «дифференциальное отношение». Более того, М. Выгодский в своём учебнике основ исчисления бесконечных малых не только так называет производную, но даже определяет её как отношение дифференциалов, то есть у него дифференциал «первее» производной.

Из дальнейшей теории, излагаемой уже систематично, отмечу введение числа e . Оно появляется как основание показательной функции, притом такой, что касательная к её графику в точке (0,1) образует с осью абсцисс угол 45^0. Существование такой ситуации обеспечивается соображениями непрерывности – рассматривается угол между касательной к графику показательной функции с основанием, большим 1,- видно из графиков, что он может быть и меньше 45^0, и больше 45^0, а его непрерывность поясняется наглядными соображениями. Тем самым найдена производная в точке 0 от функции $y = e^x$. Затем выводится (согласно каноническому определению) производная от функции $y = e^x$ в произвольной точке. После чего не составляет труда получить производную для любой степенной и показательной функции, производную от натурального логарифма, от логарифма с произвольным снованием, а также использовать логарифмическое дифференцирование для получения производной от функции $y = x^x$.

Завершает этот фрагмент теории доказательство традиционной формулы: $\lim\limits_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Идея линеаризации хорошо работает, если нам понадобится начальное представление экспоненты в виде ряда. Начнём с равенства $y \approx k_1x + l_1$. В этом приближённом равенстве k_1 – производная, которую также можно трактовать как функцию и представить в виде $k_1 \approx k_2x + l_2$. После этого исходное равенство запишем так: $y \approx k_1x + l_1 = (k_2x + l_2)\,x + l_1 = (k_2x + l_2)\,x + l_1 = k_2x^2 + l_2 x + l_1$. Этот процесс продолжается и мы приходим (сменив некоторые обозначения) к такому равенству

$y \approx c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \ldots$ коэффициенты c_i можно выразить, взяв последовательно значения исходной функции и её производных в нуле. Получим $c_0 = y(0)$, $c_1 = y'(0)$, $c_2 = y''(0)/2$,

$c_3 = y'''(0)/6$ и т.д . Для экспоненты получаем известное разложение по степеням x :

$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots$

Аналогично можно получить разложение для синуса, косинуса, других функций.

В начальном примере можно сказать: производная была у нас перед глазами в совершенно конкретной ситуации. Вместе с тем надо понимать, что такой ясной практической ситуации может и не быть. Теория групп и алгебра логики возникли из решения чисто теоретических проблем.

Но, говоря о принципе детерминизма, не надо сводить дело только к рассмотрению причинно-следственных связей. Сюда же можно отнести взаимосвязь содержания и формы, элемента и структуры, структуры и функции, элемента и системы, части и целого.

Отыскание этих взаимосвязей пронизывает весь курс математики, что может быть отражено и в преподавании. Вот несколько примеров:

а) Число и его запись отражают связь содержания и формы.

б) Беседа об аксиоматике геометрии предполагает обсуждение вопросов о связи элемента и структуры. Точка определяется не сама по себе, а как элемент пространства. Пространство, в свою очередь, множество точек, обладающее некоторой структурой.

в) Взаимосвязь структуры и функции можно увидеть на определённых математических структурах.

Иначе говоря, если мы имеем дело со структурой некоторого вида, например структурой порядка, то тем самым уже заданы и некоторые свойства элементов этой структуры.

г) Взаимосвязь элемента и системы хорошо видна на примере многогранника. Мы говорим об элементах многогранника, который в данном контексте можно трактовать как целостное образование. Взаимосвязь части и целого можно иллюстрировать на том же многограннике, говоря о его плоских углах. Те же плоские углы в многоугольнике имеют иные свойства.

Соотношение части и целого подспудно лежит во многих геометрических задачах. Типичный пример — задачи на построение. Чаще всего в таких задачах фигура восстанавливается по каким-то её деталям благодаря связям между ними. Например, построить треугольник по трём его медианам. Надо знать, что они все имеют общую точку и делятся ею в отношении 2:1. Более интересная ситуация выявляется, когда для решения задачи используется дополнительное построение. Здесь возможны два случая. Первый — данная фигура разбивается на какие-то части. Второй — данная фигура является частью какой-то другой. Задачу решает найденная связь между данной фигурой и вновь созданными (замечу, что выйти за пределы фигуры в определённом смысле труднее для учеников). Оба этих случая реализуются, к примеру, при выводе формулы площади треугольника общего вида (притом что формула для площади прямоугольного треугольника считается известной). Для вывода формулы площади из вершины треугольника проводится высота на противоположную сторону. Она может попасть на сторону или на её продолжение. Если высота попадает во внутреннюю точку стороны, то исходный треугольник является «суммой» двух прямоугольных треугольников. Если высота попадает на продолжение стороны, то треугольник является «разностью» двух прямоугольных треугольников. Связь площадей всех этих треугольников обеспечивается свойствами площадей.

А вот пример из алгебры. Требуется найти все корни на множестве комплексных чисел уравнения $x^4 + x^2 + 1 = 0$. Стандартный путь хорошо известен. Но это уравнение "входит" в уравнение, полученное из данного умножением на $x^2 - 1$. После такого умножения приходим к уравнению $x^6 - 1 = 0$. Его корни находятся как $\sqrt[6]{1}$ по известной формуле и после исключения из множества этих корней ± 1 получаем корни данного уравнения. Аналогичный прием выручает, когда решаешь и менее очевидное уравнение, например, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Срабатывает умножение этого уравнения на $(x - 1)$.

7) Принцип историзма ставит задачу рассмотрения объекта в его развитии, выявляя необходимые связи между последовательными его состояниями.

К сожалению, в школьном преподавании математики этот принцип практически не реализуется, хотя возможностей предостаточно. История понятия числа, функции — самые яркие примеры. Мне не раз доводилось рассказывать ученикам историю о том, как пифагорейцы «не открыли» вещественные числа, а закончилась эта история только век назад в связи с пересмотром основ математического анализа. И только она закончилась, как появились совсем другие числа, приведшие к нестандартному анализу.

А как мучительно создавалась теория комплексных чисел! Как непросто было разобраться с тем, что такое вообще число! Говоря о производной, как не сказать о законах Кеплера, где явно фигурировало понятие скорости неравномерного движения? И почему надо скрывать те трудности, которые возникли в математике после введения бесконечно малых?

Можно, к примеру, просто сказать о правиле Лопиталя и быстренько перейти к решению примеров, можно доказать его как некую теорему. Но как его доказывал сам Лопиталь? И даже ещё лучше: как, находясь на уровне его знаний о бесконечно малых, прийти к этому результату, пользуясь современными понятиями,— вот ведь задача. А урок получается прекрасным.

Я не могу взять в толк, почему история математики не может быть сама по себе элементом общего математического образования, почему она в таком жалком положении в учебниках. Не говорю уже о том, что объект может быть по-настоящему понят только тогда, когда известна его история.

8) Принцип противоречия предполагает раздвоение единого объекта для отыскания в нём противоречия. Обнаружение такого противоречия позволяет воспроизвести в логике понятий реальную логику самого объекта. Ясно, что противоречие должно быть не формальным, а диалектическим.

Примером такого раздвоения является геометрическая фигура, которая предстаёт перед нами и как абстрактное понятие, и как наглядный образ.

С противоречием, как я уже говорил, работает диалектическое мышление. В противовес ему мышление метафизическое знать не хочет ни о каких противоречиях. Как мучительны бывают для детской головы эти вот «с одной стороны» и «с другой стороны». Я до сих пор помню, как один мой ученик в сердцах аж ручку бросил на парту, чуть не закричав: «Опять две точки зрения!»

Выявление противоречия может начинаться с усмотрения противоположных тенденций в объекте. Простой пример: дробь a/b , в которой числитель и знаменатель положительны. Увеличение каждого из них приводит к разным следствиям, если говорить о величине дроби. (Вспомни сравнение Л. Толстого: человек как дробь — числитель —- это то, что он собой представляет, знаменатель — то, что он о себе думает.)

9) Диалектическое отрицание есть момент развития. Отрицая одно другим, необходимо удерживать связи между ними.

В нашем деле примером такого отрицания является решение прикладной задачи. В процессе решения появляется модель, которая совершенно не напоминает об исходной задаче, но удерживает все существенное из неё для получения решения. А затем происходит возврат к исходной задаче, при котором результат, полученный в модели, отрицается, т. е. сопрягается с условиями исходной задачи.

10) Принцип восхождения от абстрактного к конкретному состоит в том, что от абстрактных и

менее богатых по содержанию понятий переходят к конкретным и более богатым содержанием. (Много об этом писал В. Давыдов.)

Здесь хорошим примером из школьной практики является изучение множеств, отношений на множестве в самом общем виде. Или – от аксиом поля – к бесконечным десятичным дробям. Но, как показывает опыт, использование этого принципа должно быть очень осторожным.

11) Принцип единства исторического и логического требует соответствия логического историческому, т. е. логика изучения объекта должна соответствовать логике его становления.

Ярчайший пример — преподавание геометрии в нашей школе. Дело не в том, чтобы демонстрировать детям все тупики человеческой мысли, когда она работала над созданием науки. Нет, конечно. Но этот принцип требует точной передачи общего хода развития науки. Конкретно: оправдано ли, строя курс элементарной геометрии, доказывать, например, теорему о сечении шара плоскостью аналитическими методами, во всяком случае при первом её предъявлении? Аналитические и векторные методы возникли для совсем других целей.

Я вспоминаю вопрос, заданный мне профессиональным математиком.

— Почему вы называете функцию $y = кx + l$ линейной? Ведь общее определение линейности предполагает аддитивность и однородность. Иначе говоря, функция линейна, если при любых x_1 и x_2 и любых вещественных α и β выполняется равенство

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

А ваша функция такими свойствами не обладает! Такое определение противоречит математике!

С испугу я полез в «Математическую энциклопедию» — нет, не противоречит. Но не в этом дело. А в том, что преподавание предполагает развитие знаний. А развитие знаний вовсе не исключает уточнение имеющихся понятий и даже смену точки зрения из других, более общих соображений.

Трактовка этого принципа для преподавания требует оговорок. Общедидактические соображения состоят как раз в том, что войти в голову ребёнка можно не только через историю, но и через логику математики. Особенно популярной стала эта точка зрения после работ Ж. Пиаже. И кроме того, следовать истории — это долго. Было даже заявлено, что известен «царский путь» в геометрию — через изучение векторных пространств.

12) Принцип единства анализа и синтеза хорошо известен в преподавании. Классический пример — решение задач на построение. В мои ученические годы анализ в задаче на построение начинался стандартной фразой: «Предположим, что задача решена и искомый треугольник (квадрат, окружность и т. п.) построен». Анализ этот считался даже обязательной частью решения, хотя если вдуматься, то с какой же стати? Решение задачи можно увидеть и сразу, не проводя анализа. А синтезом было само решение. Разумеется, этот принцип, хорошо соответствующий таким же мыслительным операциям, проявляет себя не только в решении задач на построение, но и вообще при решении любой содержательной задачи. Прекрасный пример — доказательство теоремы Эйлера для многогранников разрезанием их на тетраэдры.

Вот и закончен очень краткий разговор о принципах диалектического познания. Их реализация может идти только в рамках некоторого контекста, заложенного в установку учителя.

Всё преподавание математики можно вести как погружение учеников в живую, развивающуюся науку, а не в мир мёртвых схем и готовых ответов. В самой науке уточняются уже сформировавшиеся понятия (прекрасный пример этому —уточнение понятия многогранника в связи с доказательством теоремы Эйлера — приведен в книге И. Лакатоса, см. также статью А. Александрова в «Математике в школе» за 1981 г., № 1, 2); уточняется и выглядит неоднозначным само понятие доказательства; меняются критерии строгости рассуждения; меняются вообще точки зрения; нерешённые задачи буквально рядом (они могут быть поняты даже школьниками, например комбинаторные задачи в геометрии или задачи из теории чисел); всё время идут разного рода обобщения.

Поучителен показ и ошибок учёных. Известная ошибка: производная суммы равна. сумме производных, для разности аналогично, значит, аналогично будет для произведения и частного.

Но ведь вначале о произведении так и думал, например, Г. Лейбниц! (Об этом можно почитать у В. а.)

Практически всё это богатство можно демонстрировать и в средней школе. Приведу некоторые примеры.

В школьной математике развивается понятие числа, функции; повышается строгость доказательства по мере взросления учеников; появляются всё новые методы решения уже известных задач (экстремум квадратного трёхчлена может быть найден элементарно и с помощью производной, аналитический и векторный методы в геометрии); меняются точки зрения (решение уравнений по мере знакомства с новыми числами).

А о нерешённых задачах и говорить нечего. Всегда можно предложить детям задачу на месяц, четверть, год. И не беда, если не решат. Главное, чтобы была такая задача!

В общем, есть много возможностей. Короче, «не проходите мимо»!

И в нашем деле, в преподавании, всегда что-нибудь переделываешь. Одна из последних моих маленьких «переделок» — схема исследования функции. Теперь я стал делить свойства на две большие группы; «глобальные» и «локальные» (названия условны). «Локальные» свойства связаны с точками из области определения, в которых с функцией что-то происходит: это точки разрыва, экстремума, граничного (наибольшего или наименьшего) значения, перегиба, «нуления» (где она равна нулю). «Глобальные» свойства так или иначе связаны в первую очередь с некими прямыми или их частями: область определения, симметричность, знакопостоянство, монотонность, выпуклость (вверх или вниз), асимптотичность, множество значений, ограниченность.

Я постарался рассказать, как понимаю воспитание мировоззрения посредством математики. Я вполне сознаю, что рассказ этот выглядит беглым и даже поверхностным. Быть может, в том, что написано мной о воспитании мировоззрения, есть ошибки, вульгаризаторство. Я готов заранее принять эти упрёки. Но я хочу выйти на другой уровень такого разговора, а не обсуждать общие места и банальные рекомендации. Сама эта проблема столь глубока и разностороння, что её разрешение требует многих усилий разных специалистов, в том числе, конечно, и философов, причем хорошо знакомых с математикой. Мои весьма скромные усилия в этом направлении говорят мне только об одном: в этом направлении можно работать, в математике есть достаточно возможностей для его реализации. Причём возможностей чуть ли не на каждом уроке. В принципе ведь можно поговорить один раз о природе математических абстракций и считать, что вопрос закрыт. (Кстати, и с этим куцым разговором не всё благополучно. Разберём одну, хорошо если две задачи, приводящие к образованию важного понятия, например интеграла, и считаем, что материал для абстракции уже готов. Очень сомнительный подход!)

Но я хочу не этого. Я хочу чуть ли не ежедневной сознательной работы в этом направлении.

IУ.8. НЕ РАВНА НУЛЮ

Заканчивая разговор о воспитании, хочу ещё сказать о воспитании характера и нравственном воспитании. Я понимаю, сколь деликатная тема оказалась предметом разговора, и выскажу довольно слабые утверждения, причем числом поменьше.

Педагогика, как я её понимаю, наука экспериментальная по сути своей. Жизнеспособность педагогических теорий проверяется только тем, что сделано на их основе с детьми, пусть в эксперименте, но достаточно представительном. Непротиворечивость теоретических конструкций в педагогике ещё не означает, как в математике, их существования. Нужны реальные доказательства, которые можно получить только в живом деле.

Если стоять на такой позиции, то разговоры о воспитании в процессе преподавания математики (да и вообще) имеют мало отношения к педагогической теории. Во всяком случае мне неясно, что и как тут можно доказывать. Особенно — как. Никакого чистого опыта не провести в принципе, и поэтому мы переходим иа почву спекулятивных рассуждений. На ней можно строить любые сооружения, насколько хватит фантазии, но сколь они прочны? И какова их цена?

Особенно я хочу это подчеркнуть именно сейчас, в завершающем разговоре о воспитании. И характер, и нравственные свойства личности столь разнообразны и зависят от столь многих причин, что доля математического образования в их становлении и развитии близка к нулю. Но отлична от него! И вот это-то отличие и дает мне некую надежду сказать: «И моя капля мёду...»

Сначала о характере. Одна из существенных его черт — волевые свойства человека. По П.Симонову, воля— это потребность в преодолении трудностей. Воспитание, опять же по П.Симонову, предполагает, что воспитанника нужно вооружить знанием о способах удовлетворения своих потребностей, в частности, и этой. Тут нам, учителям математики, явно повезло. Трудности в обучений математике общеизвестны, их можно расположить в некотором порядке, дидактически препарировать и преподнести детям. Я бы сказал так: трудности в математике естественны, не надо ничего придумывать, они в природе предмета. И главная трудность — самостоятельное решение задач. Я не знаю ничего тяжелее в интеллектуальной деятельности, чем долгое самостоятельное размышление над задачей, которую обязательно надо решить, над вопросом, в котором обязательно надо разобраться для понимания сути дела.

Сделать обучение лёгким, как призывают некоторые, можно, но как придётся расплачиваться за эту лёгкость? *Я* могу отменить домашние задания, можно убрать из них трудные задачи, но к чему мы придём, удаляя на детском пути все новые и разумно поставленные препятствия?

Сложные вопросы возникают о нравственном воспитании. По сути мы прикасаемся здесь к вековым проблемам человека, Я позволю себе только несколько соображений.

1) Воспитание вообще действует не столько на сознание, сколько на подсознание (по П.Симонову). Всякие разговоры о пользе нравственных поступков малополезны, ибо они не оказывают серьёзного воздействия на потребности человека и на их иерархию. Гораздо существенней здесь та атмосфера, которая создана вокруг ребёнка. Вот я и стараюсь в этом направлении. Один частный пример. Почти идеальная атмосфера создаётся в такой модели: «Дети, наш класс сегодня — небольшая научная лаборатория. Нам поручено решить такую задачу (набор задач). Я — руководитель лаборатории. Вы можете работать сами, можете работать в небольших группах, только тихо, можете в любой момент обратиться ко мне за консультацией. В конце урока разберёмся, что у нас получилось». Разумеется, это очень грубая схема работы класса. Есть одно «но» — лучше всего действует эта модель во время эпидемии гриппа, когда от класса остается человек 15—20.

2) Хорошо известна связь науки и нравственности. Об этом писали А. Пуанкаре, А. Александров, об этой связи размышляли многие учёные. Если в установку учителя входит образование именно научное, то отражённым светом эта связь проявляет себя и в реалии. Один пример; зачем в школьной математике нужно доказывать всё? И дети так хорошо относятся к утверждениям без доказательства — учить не надо. (Б. Нушич и его сокашники чрезвычайно радовались фразе в учебнике о том, что история некоего древнего государства «покрыта мраком неизвестности».) Доказывать всё и есть научный метод познания. Пожалуйста, можно и опускать доказательства, и вообще обходиться без доказательств, но тогда мы уходим от науки во что-то другое. Но зачем нужно доказывать в жизни?

К счастью, есть много сфер человеческой деятельности, где без доказательств не обойтись. Деятельность юриста в суде, врача-диагноста тому примеры. И доказательства необходимы даже в очевидных случаях. Я рассказываю детям, например, о суде над фашистскими преступниками. Но можно подойти поближе и к детской жизни. Одна из социальных потребностей человека — потребность в справедливости. А справедливость, по крайней мере в поступках воспитателя, всегда предполагает некое их обоснование, что иными словами и означает доказательство.

Мне хочется верить, что дети, поняв необходимость доказательства в математике, в науке в целом, легче придут к идее аргументации своих поступков. «Самое главное в доказательстве,— говорю я детям,— то, что оно есть. Какое оно — важно куда меньше». И не так важна пресловутая строгость, сколь важна степень убедительности.

Вот пример. Из равенства производной нулю на некотором промежутке следует, что функция на этом промежутке равна константе. Можно, разумеется, ждать, когда будет доказана теорема Лагранжа, из которой данное утверждение является следствием. Вполне достаточно произнести фразу вроде « Производная – это крутизна графика, а если она нулевая, то график параллелен оси абсцисс.» Или увязать производную с тангенсом угла наклона касательной и, коль скоро тангенс нулевой, то и угол этот нулевой. Или даже так: «Если скорость объекта равна нулю, то объект неподвижен.»

Учителю математики ещё повезло в этом отношении — математические доказательства проще, чем в прочих предметах. Не позавидуешь, к примеру, учителю литературы, когда он убеждает в чём-либо своих учеников. Мало ведь сказать, что Пушкин — великий поэт, в этом же надо как-то убеждать!

Всё это хорошо, но почему имеет смысл один и тот же факт доказывать по-разному? (Или, возвращаясь к математике, как спросил некий школьник, «Зачем нам доказывать то, что уже было доказано раньше?») Есть несколько соображений. Соображения, идущие от предмета: тем самым устанавливаются новые связи в имеющейся совокупности фактов, что способствует более полному видению картины в целом, т. е. лучшему пониманию теории. Соображения, идущие от психологии: для развития гибкости мышления. Соображения, идущие от начал философии: так прививаются первоосновы гносеологии — у познания много начал.

3) Ответственность за сделанную работу явно имеет нравственную окраску. Стараюсь всячески

подчеркнуть, что любая задача, решение которой подано учителю,— это работа. За неё, за её качество ученик должен отвечать. Терпеть не могу корявых мыслей, небрежного оформления (не о почерке речь, конечно), бездумных результатов. Подгонкой под ответ искренне и публично возмущаюсь. Считаю, что ответы к задачам в школьных задачниках — вредная традиция. А списывание считаю делом недостойным, ученику, не проверяя, ставлю оценку, какую он хочет.

К безответственности ведут поверхностные знания, которыми мы вооружаем учеников в огромном количестве. Знания неглубокие, отрывочные могут навредить людям и потому безнравственны. Примеры нам хорошо известны, таковы трагические события, вызванные профессиональной некомпетентностью.

Безнравственно быть плохим специалистом вообще. Хорошо бы нам прийти в обществе к пониманию того, что в том же смысле безнравственно быть и плохим учеником, не сводя, конечно, это понимание сугубо к отметкам. Перегрузка программ почти автоматически лишает знания учеников основательности, глубины и вредна ещё и поэтому. «Лучше меньше, да лучше!» — это же аксиома. Нарушая её, надо ли удивляться последствиям?

4) Есть такое понятие — моральная задача. Классический пример — «задача Гамлета». «Быть или не быть?» — есть ситуация морального выбора, который повлечёт за собой целую серию поступков нравственного содержания. Но вся история и литература изобилуют такими задачами. В истории: Понтий Пилат («умывать руки или нет?»), Сократ (бежать от смерти или выпить яд?), Г.Галилей (что же сказать судьям?). В литературе вообще пропасть примеров, и приводить не буду ничего, кроме Гамлета. В жизни — на каждом шагу. Одна из частых задач: вмешиваться или нет? Помню поступок одного нейрохирурга, который ждал в аэропорту самолёта для вылета на операцию. А у него на глазах хулиганская сцена. Вмешаться? А кто будет оперировать? И решать надо быстро. Впрочем, фактор времени в таких задачах не всегда важен.

Некий герой романа Дж. Хеллера «Поправка-22» так решал задачи выбора поступка. Он делил лист бумаги пополам, на одной части ставил заголовок «Пироги и пышки», а на другой половине — «Синяки и шишки». Потом он заполнял обе половины предполагаемыми последствиями намеченного поступка, после чего принимал окончательное решение. И действительно, многое в моральном выборе имеет рациональное содержание. Что конкретно можно увидеть?

В ситуации выбора необходимо принимать решение со знанием дела, а не просто по некоторому нравственному наитию. Сколько раз мы слышали в оправдание своего поступка: «Я так не хотел. Я хотел как лучше». Но почему же получилось «как всегда»?

А что значат слова «со знанием дела»? Необходимы анализ ситуации, учет объективных условий, осознание проблемности ситуации (а может быть, всё это уже встречалось?), рассмотрение всевозможных вариантов решения, оценка возможных следствий при учёте реакций отдельных людей (а они плохо предсказуемы, появляется элемент вероятностного прогнозирования), поиски оптимального или хотя бы удовлетворительного решения, доказательство своей правоты, оценка собственного поступка. Средства решения задачи надо сопоставлять с целью и упорядочивать. Как саму задачу, так и средства ее решения требуется постоянно корректировать.

Такой перечень вдохновляет меня в работе. В самом деле, можно найти много общего в нем и в деятельности по решению математических задач. Не это ли имел в виду Г. Лихтенберг, когда советовал в своих «Афоризмах» житейские задачи решать как уравнения, приводя их к простейшему виду?

Но кто знает, как оно на самом деле? И действительно ли учёные-математики легче других смертных справляются со своими земными проблемами?

1У.9. «ВРЕМЕНА ТЕПЕРЕШНИЕ»

Мы дожили до «теперешних времён», как охнула одна бабуля... Времён жёстких — как бы нам всем выжить, да ещё чтобы уважение осталось хотя бы к себе самим.

Настала пора переосмысления всего, что знал, о чём думал, к чему пришёл, пришло время «вылезать из собственной шкуры». Пришло время гамбургского счёта: если ты такой умный да ретивый, а тебе все только мешали —действуй! Перефразируя древних греков: «Родос — сейчас и здесь — так прыгай!»

И впрямь «попрыгали»... За последние годы в нашем деле столько навылезало всякого... как грибов после дождя. Отделить бы теперь зёрна от плевел.

Считать деньги, и в образовании тоже, разумно. Но где же мера? Сейчас уже платят чуть ли не за каждый шаг: и за обучение детей в школе, и за возможность пойти к коллеге на урок. Но что же тогда будет завтра? Начнем платить пословно, как за телеграмму?

Вольные педагогические мысли — прекрасно. Но ведь они бывают всякие. Субъект с горящими глазами может начать исповедовать всё, что угодно, и добро бы он это делал в пустом своем жилище, ну а если перед детьми и учителями? Мне уже довелось выслушивать таких. Ну, например, о том, что детей надо сортировать по общим интеллектуальным способностям лет в 10—11 и тех, кто не выдержал испытания, отворачивать от полноценного образования. Дать им элементарный минимум полезных знаний, что-то вроде умения считать в пределах сотни и читать тексты на уровне правил уличного движения, да научить труду как можно быстрее — и хватит с них. «Но ведь это примерно то то, что предлагал Й.Геббельс для славянских детей во всемирном Третьем рейхе»,— не выдержал я. «А что, Й.Геббельс был умный человек»,— услышал в ответ не только я от небезызвестного автора многих книжек о воспитании детей.

И что самое жуткое — у этих «теоретиков» с горящими глазами есть учителя-единомышленники, есть школы, в которых система обучения в той или иной степени исповедует эти принципы, и они ведь ещё делятся опытом в почтенных аудиториях.

Однако же все эти реформы вольнодумства и катавасии в образовании вообще вроде бы не имеют отношения к преподаванию математики. Как-то у нас, в Питере, был небольшой семинар учителей, поднаторевших в деле. И весьма уважаемые в городе мастера, безо всякого сомнения стояли на своём: школьная математика — вещь, так сказать, в себе и решение квадратных уравнений совершенно не зависит от того, какое сейчас «тысячелетье на дворе». Позиция чёткая и даже привлекательная: в любые времена - диктатуры или застоя, или ещё какие — учитель математики спокойно жил среди иксов и игреков. И более того, нёс в сознание учеников свет окончательной истины.

Но всё-таки, всё-таки...

Всё ж таки нет былого мощного идеологического пресса, давившего в образовании новых поколений всякое инакомыслие. Сейчас я могу спокойно думать не только о методах преподавания, но и о глубинном смысле собственных устремлений, о стремлении к вековым культурным ценностям. Движение к мировой культуре меняет ценности образования и при этом вовсе необязательно отменяет всё предыдущее, но по-иному ставит акцент. И ещё острее, чем раньше, спрашиваю себя: так кого же я хочу видеть в сидящем передо мной ребёнке — инженера, физика, артиста? Компетентного индивида, вооружённого знаниями и умениями, чтобы выжить и достичь успеха в предстоящей борьбе за место под солнцем, или ещё кого-то?

Нынешние беды российского образования, в том числе и математического, наводят на грустные мысли. Но совершенно нелепо искать виноватых, а тем более обнаруживать таковых. Нелепо, ибо такого рода поиски — удел примитивного сознания. Любителей найти «врагов народа» всегда было предостаточно — это трагическая часть нашей истории. Да и сейчас их хватает. Однако я всегда полагал, что отыскание «вредителей» далеко от нашего профессионального круга, и с тем большим изумлением прочитал в книге Ю. Колягина — академика РАО (!), что «виновники» нынешнего состояния дел — это «западники», зачинатели перестройки, «демократы» и сомнительные типы с нерусскими именами.

И. Шарыгин, напротив, искал супостатов на стороне.

Как говорится, приехали...

Нелепо идеализировать математическое образование в первые послевоенные годы. Мы были винтиками в государственной машине, пропитанной идеологией, а потому и дети потихоньку превращались в такие же винтики.

Но так ли уж торопиться выбрасывать старое? Традиционная советская педагогика, говоря о воспитании ученика, на первое место выдвигала задачу формирования у него мировоззрения. Это казалось малоинтересным, оно ведь было у всех одинаковое, единственное и правильное. А теперь, когда прокрустово ложе классового подхода уничтожено, что оказалось? Что мировоззрения бывают очень даже разные, и даже не научные, а религиозные. И тут же хлынуло великое наступление подспудного, откуда-то пробились и астрология, и всякого рода магия, какие-то специалисты по связям с потусторонним миром и галактическим сверхсознанием. Но всё это было, было... Ещё Диоген Синопский, видя толкователей снов, прорицателей и тех, кто им верит, считал, что нет никого глупее человека.

Прекрасно проехался на эту тему ещё А. Аверченко: «Спиритизмом называется искусство довести деревянный стол до такого состояния, чтобы он заговорил»; «Магнетизмом называется такое состояние, когда от совершенно постороннего человека внезапно начинают исходить магнетические лучи и волны. Лучи и волны очень схожи между собой, совершенно незаметны для непосвященного глаза и наблюдаются на слово».

Хорошо известно даже из новейшей истории: всплеск этой галиматьи всегда сопутствует временам тёмным и даже трагическим. И не потому ли я должен изо всех сил держаться за самую суть дела, которое делаю, за то, что прихожу в класс как человек от науки, от научного мировоззрения, а не как специалист по таблице умножения или решатель конкурсных задач?

Очень точно надо разобраться: я даю финальное или промежуточное математическое образование? Если финальное — можно выкинуть 90% математической техники, но долго и тщательно формировать общее представление о математике, доведённое, конечно, до простейших умений. Если промежуточное, то доля техники возрастает и приходится думать и о вступительных экзаменах, и о дальнейшей высшей математике.

Особенно остро встаёт вопрос о месте математики в общем среднем образовании. Острота эта подчёркивается тенденцией к гуманитаризации и — в практическом аспекте — резким уменьшением числа часов, отводимых на изучение математики. Эта проблема заслуживает более подробного разговора.

Здесь же замечу вот что. Многие реформаторы среднего образования, уничтожая математику в школе, «не видят очевидного»: элементарная математика даёт ничем не заменимую возможность для естественной и регулярной деятельности преодоления интеллектуальных трудностей, связанных с абстрактным мышлением; тем самым она удовлетворяет двум важнейшим потребностям развивающегося ребёнка: потребности в компетентности (по П. Симонову – вооружённости») и потребности в преодолении трудностей.

1У.10 ФТШ

Последние десятилетия я работаю в физико-технической школе (ФТШ) . Школа получила статус лицея, но всем удобнее называть её так, как было при создании,— ФТШ. Школа, баккалавриат в Техническом университете на базовых кафедрах Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе, затем магистратура в недавно созданном Академическом физико – технологическом университете , затем профессиональная работа физика – таковы ступени становления. Так реализовалась исходная задумка академика, лауреата Нобелевской премии Ж.Алфёрова – соединить образование (среднее и высшее) с наукой.

За прошедшие четверть века с момента создания ФТШ добилась многого. Она занимает первое место в России по числу победителей всякого рода олимпиад по физике, входит в лучшую пятёрку школ России по постановке научного образования. В городе она первая или среди первых по физике, математике и информатике. ФТШ проводит громадную внеклассную и внешкольную работу. Учителя школы знакомили с нашим опытом специалистов Петербурга, России. А также зарубежных - США (конференции, университеты, школы более, чем в 10 штатах, включая Гарвард, Принстон, Нью-Йорк - Колумбийский университет), Европы (Великобритания, Франция, Германия, Италия, Польша, Венгрия Чехия, Швеция, бывшая Югославия), Азии (Ю.Корея, Сингапур, Гонконг, Таиланд) , Канады, Израиля. И везде нас слушали , как говорится, « с открытым ртом».

Ясное дело, ФТШ имеет громадную поддержку учёных, аспирантов, студентов Академического университета, среди них есть наши выпускники.

У ФТШ есть две принципиальные особенности: она находится в составе РАН (Российской Академии наук) — это раз и наши ученики проходят практику в научных лабораториях, принимая участие, разумеется очень скромное, в реальных научных исследованиях,— это два. Начав это делать в школе, кое-кто застревает в лаборатории на все студенческие годы, затем аспирантура там же — такой путь уже проторен.

Мне работать в ФТШ не только интересно, но и приятно: среди коллег более десятка моих бывших учеников, а среди школьников есть дети тех, кого я учил когда-то. На одном из выпускных вечеров получили аттестат четверо, у которых я учил и папу, и маму.

Школа элитарная — мы уже не боимся этого термина, потребовалось только его уточнить, и в неё всегда большой конкурс, несмотря на то что образовательные приоритеты в обществе заметно качнулись — о всех бедах, свалившихся на российскую науку, достаточно хорошо известно.

Происхождение школы, её статус, элитарность накладывают серьёзные обязательства на всех, кто тут работает. Прежде всего надо было хорошо понять, кого мы хотим видеть в «фэтэшёнке».

Хорошо подготовленного абитуриента? Как это делается, известно и малоинтересно по содержанию. Деятельность учителя тут сводится к репетиторской, и в этой скучной работе тонет чудо развития ребёнка. К сожалению, на эту дорогу очень легко сбиться даже в хорошей школе.

Сугубо олимпиадника? Этакого бойкого решателя заковыристых задач? Тупиковая дорога, как я думаю. Из разумного дела всего общества по обнаружению способных детей олимпиады превратились в спортивное мероприятие престижного свойства на государственном уровне. Но тогда тренировки, сборы, отборы, натаскивание на использование в решении задач разного рода «фокусов», да ещё в лимитированное время,— всё это далековато от приобщения к основам подлинной науки. Уж если конкурсы, так типа конкурса юных физиков, когда задача даётся этак на полгода размышления.

Будущего студента? Уже интереснее — появляются серьёзные задачи, например обучение самостоятельной деятельности. Здесь работа с учебником, с первоисточником, семинары, курсовые работы, публичные выступления реферативного характера, участие в конференциях... Но всё-таки студент в основном потребитель знаний.

Так что же — готовить будущего специалиста, в нашем случае физика? Цель большая и почётная. Но меня что-то настораживает — что? Известно ведь: «Планету погубят специалисты». В каком смысле? А в том, что «специалист» в контексте последней фразы — человек только одного видения мира, чисто профессионального, а потому одноцветного. С таким видением мы сталкиваемся на каждом шагу. Послушать таких профессионалов — так главное дело в жизни общества как раз то, чем именно они и занимаются: война, искусство, образование, экология, животноводство...

Ещё интереснее — и это уже настоящая работа — готовить будущего исследователя, путника, ползущего вверх по узенькой тропочке между неизвестным и знакомым, будущего первопроходителя. (Элитарность я бы толковал как способность индивида чувствовать себя комфортно в такой ситуации.) А исследователя я бы сравнил с интеллектуальным авантюристом.

Осмысленное продвижение при достижении этой цели требует двух вещей: организации учебно-исследовательской и критической деятельности школьника на уроке и его хотя бы минимального участия в реальном научном исследовании.

Сейчас основная цель школы: формирование исследователя. Теперь во главу угла ставится личность и начинается непрерывный процесс, который продолжается в высшей школе и окончательно оформляется только в профессиональной деятельности.

Так сформулированная образовательная ценность предполагает рассмотрение всей педагогической системы, в рамках которой она формируется. В первую очередь необходимо организовать соответствующую ежедневную деятельность ученика. Увы, традиционно понимаемая учебная деятельность практически не в состоянии далеко продвинуть школьника в этом направлении. Необходим переход к исследовательской деятельности. Она достаточно хорошо изучена, её характерные черты легко трансформируются применительно к среднему образованию, но в рамках такового её лучше называть всё же учебно-исследовательской.

Принятие этой точки зрения порождает множество инноваций в методике, дидактике, педагогике, в реальной работе учителя. На авансцену выходят не знания и умения, а понимание, знания и умения — только предпосылки понимания. Знания (точнее, информация, отнесённая к знаниям) весьма часто находятся в учебниках, справочниках, и специалист просто должен знать, куда посмотреть, (Кстати, я плохо понимаю, почему ученик не может всегда пользоваться справочниками — даже на экзамене — умнее от этого не становишься, а память от волнения, чрезмерной мотивации может отказать.) Но если в рамках учебной деятельности я всё же обязан «нажимать» на приобретение громадной массы фактических знаний, то в рамках учебно-исследовательской деятельности я могу быть куда менее «жёстким». Точно такой же разговор можно повести и про умения. Многие умения сейчас отнесены к компьютеру и даже к микрокалькулятору. И, грубо говоря, если ученик не может решить какое-то уравнение, не беда, ибо его всегда «решит» компьютер. Не беда, если мы говорим не про учебную деятельность, а про учебно-исследовательскую.

(Впрочем, даже в рамках учебной деятельности нелепо абсолютное запрещение пользования калькулятором. Я знаю детей, которые затруднялись в вычислениях, у них были проблемы даже с таблицей умножения — по причинам скорее физиологическим, они чуть ли не наследовали эту особенность. Это не мешает им быть весьма способными в живописи, музыке. Помочь таким детям, дав в руки калькулятор,— святое дело.)

Далее, меняются процессы, с помощью которых ведётся преподавание, упор делается на максимально возможную самостоятельность ученика даже при изучении теории. Оказывается, что этой линии больше соответствует работа не с учебником, а со справочником: в нём есть все результаты, а доказательства надо придумывать самим. Так я обучал основам анализа.

Многое меняется в организации образовательного процесса. Иначе проводятся уроки, самостоятельные работы, экзамены, иначе оцениваются ответы и т. д. Меняется содержание упражнений, домашних заданий...

Всё более индивидуализируется работа ученика. Он выполняет не только общее домашнее задание, но и то, которое выбрал сам. В результате растёт его самооценка.

В общем, преобразуется вся наработанная система работы учителя.

И, разумеется, меняется атмосфера урока.

Учитывая потребности физики и использование компьютера, я составил программу четырёхлетнего обучения по курсу алгебры и начал анализа. Приведу её фрагменты.

Первый фрагмент — из пояснительной записки.

Четырёхлетнему математическому образованию в физико-технической школе соответствуют несколько важных целей и ценностей. Вот их перечень (не по степени важности):

1. Способствовать верному пониманию математики как науки, в частности, - пониманию взаимосвязей её различных разделов.
2. Подготовить выпускников школы к продолжению математического образования в высшей школе, причем на уровне, достаточном для получения профессионального образования в области физики и математики..
3. Сформировать основы исследовательской деятельности.
4. Сформировать основы критической деятельности.
5. Способствовать развитию ученика во всех отношениях (интеллект, характер, мировоззрение, эмоции, способности, мотивация).

В соответствии с этими целями в программе необходимо было учесть следующее:

1. Математика как наука имеет своим содержанием:

а) изучение имеющихся математических моделей и получение новых;

б) использование готовых моделей;

в) обоснование имеющихся математических методов.

Поэтому в программе отражены и собственно математические методы, и их применение в прикладной ситуации, также и аксиоматический метод.

2. Чрезвычайно важно в математическом образовании довести до сознания учеников мировоззренческие идеи:

а) детерминистский и стохастический подходы к действительности (поэтому в программе важное значение придается дифференциальным уравнениям — их составлению, а также элементам теории вероятностей);

б) идею бесконечности (поэтому в программе введены основные понятия теории множеств и некоторые факты, связанные с понятием мощности множества); подчёркивается значимость и возможность сведения бесконечного к конечному.

в) идею непрерывного и дискретного (поэтому в программе находятся, наряду с анализом бесконечно малых, элементы конечной математики).

Большое, если не решающее значение при составлении программы имели следующие соображения:

1. Для изучения физики весь необходимый математический аппарат должен быть готов в надлежащее время, причем в первую очередь на оперативном уровне. Реально это означает, к примеру, что ученики обучаются дифференцировать простейшие функции раньше, чем они познакомятся с обоснованием операции дифференцирования на достаточно высоком уровне строгости.

2. Использование компьютерных инструментов (имеющихся программных средств) не только позволяет сократить время при выполнении чисто технической части математической деятельности, но и наполняет эту деятельность новым содержанием. В частности, появляются разнообразные возможности соединения интеллекта и компьютерных технологий.

3. В любом случае курс математики должен в главном мажорировать стандартный курс, который имеется в специализированной математической школе.

Четырёхлетнее математическое образование разбивается на два этапа. На первом этапе (8—9 классы) основное внимание уделяется «оперативной математике», иначе говоря, технической стороне дела.

На втором этапе (10—11 классы) основное внимание уделяется обоснованию, расширению и углублению полученных знаний, дальнейшему совершенствованию умений.

Об одной детали чуть подробнее. Состояние исследования возбуждает интерес, мобилизует волю, творческие потенции. Учёный тем и отличается, что у него в голове всегда «сидит задача». Помню, как давно ещё В. Болтянский, выступая перед моими учениками, удивил их высказыванием,, что учёному-теоретику не надо каждый день ходить на работу, ибо его голова всегда работает над решением задачи — даже когда он спит. Любопытно, что потом об этом мне говорили и дети — только задача должна «зацепить» .

Как создать эту ситуацию в обыденных учебных условиях? Ключевой для неё я вижу куда большую степень неопределённости, чем обычно. И потому стараюсь неопределённость, как таковую, почаще вставлять в образовательный процесс. Неопределённость весьма разнообразна в проявлениях. Вот несколько примеров.

Полезно предлагать задачи с неоднозначными и даже неполными условиями, и ответ в них может не быть единственно возможным. В таких задачах всегда можно задаться вопросом: « Ответ получен. А что дальше…?» Срок исполнения задач не всегда фиксирован — их можно представить и не к следующему уроку, а когда получится.

И домашние, и прочие самостоятельные работы, и даже экзамен можно провести, включив неопределённость, например предложив задачи на выбор.

А вот как я проводил некогда устный экзамен по геометрии. Билетов в традиционном понимании не было, было нечто другое. Каждый ученик получал персональное задание. В этом задании описан какой-то конкретный, не вполне стандартный многогранник, ну, например, многогранник, состоящий из двух правильных треугольных пирамид, совмещенных основаниями. Другие их грани каким-то образом фиксированы. И в течение двух часов экзаменующийся должен был сам установить свойства этого многогранника, а о наиболее интересных рассказать экзаменаторам. По желанию последних ученик должен показать и выкладки, подтверждающие полученные результаты. При этом ученик может высказывать и гипотетические предположения, обязательно это оговорив.

Аналогично был устроен экзамен по геометрии в 9 классе.

|В результате оказалось, что включение в образовательный процесс исследовательской деятельности (плюс критической) делает образование гораздо более содержательным и куда более интересным.

Однако «теперешние времена» вносят новые коррективы в так понятую цель существования ФТШ. Появилась воистину ЦЕЛЬ — готовить не просто первопроходителя, а исследователя «культурного».

И тут я переключаюсь на другие сферы, и разговор потребуется как бы заново.

1У.11. ГУМАНИТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Разговор о культуре может быть бесконечным (по ширине и глубине) и происходить на сколь угодно высоком уровне. Моя цель гораздо скромнее — попытаться что-то понять для себя и довести это понимание до приложений в реальной работе.

Культура человека предполагает, как я думаю, широту его взглядов на свою профессию, на её смысл и положение в обществе. Предпосылкой так понятой культуре является готовность к пониманию мира во всех его проявлениях, готовность к преодолению специализированного взгляда на жизнь. (Это школа может быть специализированной, но не ученики в ней!) Вот эту готовность хотелось бы сформировать, оставаясь в рамках чуть ли не ежедневной учительской деятельности. Как же это сделать?

Немного о терминологии. Иногда говорят о многих культурах — технократической, гуманитарной, религиозной... Мне сдаётся, однако, что культура - понятие неразрывное и можно говорить только о разных её сторонах. И только для удобства речи я буду говорить, к примеру, «гуманитарная культура» вместо «гуманитарная сторона культуры».

Широта проблемы вынуждает меня резко сузить тематику разговора. Из всевозможных обозримых направлений я выберу только два (по-моему, увязанных): противопоставление технократической и гуманитарной культуры и гуманитаризация преподавания математики. Последняя тема стала довольно живо обсуждаться в нашей педагогической и даже методической прессе. Мои размышления носят в какой-то степени дискуссионный отпечаток.

Разрыв технократической и гуманитарной культуры, точнее разрыв понимания между людьми разных профессий (учёные - естественники, математики, инженеры, компьютерщики и др.— с одной стороны; люди искусства, общественные деятели, философы и др.— с другой), давно уже стал явственным. Подтверждений такого разрыва — пруд пруди, начиная с времён оных. И писали об этих двух культурах много... укажу только: О. Шпенглера, Ч. Сноу, И. Пригожина, А. Александрова и Е. Фейнберга. Сразу оговорюсь, что гуманитарная культура многолика и меня будет интересовать в первую очередь культура художественная и та научная (гуманитарная), которая связана с феноменом человека и его деятельностью.

Я процитирую по случаю А. Чехова — два отрывка из его повести «Дуэль»:

«Он [Лаевский — В.Р.] был совершенно незнаком с естественными науками и поэтому никогда не мог помириться с авторитетным тоном и учёным, глубокомысленным видом людей, которые занимаются муравьиными усиками и тараканьими лапками, и ему всегда было досадно, что эти люди на основании усиков, лапок и какой-то протоплазмы (он почему-то воображал её в виде устрицы) берутся решать вопросы, охватывающие собой происхождение и жизнь человека».

«Гуманитарные науки тогда только будут удовлетворять человеческую мысль, когда в движении своём они встретятся с точными науками и пойдут с ними рядом... думаю, что земля покроется ледяной корой раньше, чем это случится» (фраза фон Корена, зоолога).

Напомню, далее, общественную дискуссию, начатую в 70-х годах, о «физиках» и «лириках» —с неё и началось моё знакомство с проблемой. Осталась она в памяти ещё и благодаря Б. Слуцкому с его ставшим знаменитым стихотворением, где есть такие строчки:«Что-то физики в почёте/Что-то лирики в загоне». Я буду использовать более уместную здесь аналогичную метафору: «математики» и «поэты». Основание — одно из высказываний К. Вейерштрасса: «Математик, который вместе с тем не несёт в себе частицы поэта, никогда не станет совершенным математиком» (эту мысль Г. Штейнгауз приписывает Л. Кронекеру).

Проявления разрыва этих двух культур встречаются постоянно.

И сто лет назад, и сейчас поражает беспомощность иных «математиков» в толковании общественных явлений. Вспомним упрощённые и доходящие порой до нелепостей претенциозные рассуждения «математиков», к примеру, о тенденциях общественно-исторического процесса или даже о ценностях математического образования. Вот что писал французский физиолог К. Бернар о природе этих нелепостей: «...преувеличенная вера в рассуждение зависит от чутья сложности естественных явлений... иногда чистые математики, умы в других отношениях весьма большие, впадают в ошибки. Они слишком упрощают и рассуждают о явлениях, как они их себе создали в уме, а не о тех, каковы они в природе». О. Хайям одно из четверостиший начал так: «Рабы застывших формул осмыслить жизнь хотят...», и Ш.Монтескье: «Если человек — хороший геометр и известен именно в этом качестве, он ещё должен доказать, что он человек умный». Дадим под конец слово мадам де Помпадур: «У всех геометров глупый вид». (Геометрами в те времена называли всех математиков.)

Но также известна анекдотическая, однако воинствующая безграмотность «поэтов» и в самом элементарном научном знании, и в понимании научного метода, как такового. Порой, и это уже совсем смешно, она перемешивается с желанием выказать свою «образованность». Были же та кие стишки: «Площадь круга, площадь круга, $2\pi r$"...» Не могу даже сосчитать, сколько раз было написано о том, что параллельные прямые пересекаются — мол, в геометрии Лобачевского. Гиперболоид инженера Гарина следовало А.Толстому заменить на параболоид, ту же «ляпу» допустил А. Чудаков, говоря о конструкции из зеркал, созданной Архимедом.

В одном серьёзном литературоведческом исследовании о творчестве Е. Замятина написано:«...главная геометрическая фигура двумерного пространства... это квадрат». В недавно опубликованной повести я прочитал: «...многоугольник, похожий на шар».

В одной из заметок в «Учительской газете» было сказано о кубе размером 3 х 3 х 2 м. Опять же в «Учительской газете» учитель истории ошарашивает читателя так: «современная геометрия признала несуществующими перпендикуляры с параллелями, на основе которых построены стены наших домов». Недавно диктор телевидения объявил с экрана, что задача о «семи кенигсбергских мостах» была поставлена Л.Эйлером (!) 150 (!!) лет тому назад и до сих пор не решена (!!!). Довелось мне прочитать, что «...согласно теореме Гёделя конечные причины бытия... могут оказаться до конца непознаваемыми» (Ю. Борев).

Весьма трудно было объяснить «поэтам» в 2000 году, что новый век (и новое тысячелетие) ещё не начался. Помогал шутливый пример — двадцатой бутылкой заканчивается первый ящик пива, а второй ящик начинается с двадцать первой бутылки.

Некий журналист призывал увеличить долю зарубежных инвестиций (во что-то), уже близкую к 50%, в два и даже в три раза.

В одном из прогнозов погоды на зимний день диктор объявил, что (– 8) градусов будет максимальной температурой, считая её самой низкой температурой.

Я уже не говорю о многозначительной велеречивости в речах «поэтов». Вот как проехался по этому поводу А. Уайтхед: «Если философствующий автор начинает говорить с туманной утончённостью, то он, как правило, говорит бессмыслицу».

Ещё более желчно выразился С. Моэм: «Впору было подумать, что единственное назначение культуры — это научить людей болтать глупости с важным видом».

«О, насколько же невежественны люди, получившие классическое образование!»— вот резюме Р. Фейнмана.

Но с тем, что «пятидесятые годы» — это годы с 50-го по 59-й (а не с 41-го по 50-й, как должно понимать годы пятого десятка), видимо, придётся смириться — тут «поэты» победили «математиков».

(Впрочем, даже учёный народ может порой "выдать" перл, как, например, два автора - химика, у которых я прочитал: « …описана лишь меньшая половина" видов и растений Южной Америки».

Но вот как пишет тот же Е. Замятин, «технарь» по образованию: «Математика —~ это прежде всего философия, которую можно применять для разъяснения современных проблем». Много ли «поэтов» понимают так нашу науку?

Противостояние этих двух культур вполне обыденно, и необязательно отыскивать тому примеры в литературе или в биографиях известных личностей. Тут и житейское понимание математики моими коллегами — гуманитариями (на профсоюзных собраниях меня обычно выбирали председателем счётной комиссии): для них математики — это те, кто считает. Мы же никак не можем принять произвольность иных толкований в речах гуманитариев и видим логические ляпсусы там, где они более всего напирают на якобы «свободный полёт мысли». Но окончательно могут доконать «математика» этакие меандры в писаниях «поэта», занимающие несколько страниц, когда хватило бы двух строк.

Вот примерчики из моей учительской жизни. Однажды я был на открытом уроке литературы популярной тогда учительницы. В классе обсуждались «Отцы и дети» И. Тургенева. Ученики лихо отвечали на поставленные вопросы и выдавали одну оригинальную — на их уровне — мысль за другой. Гости были в восторге, а я никак не мог понять, почему эти самые мысли никак не аргументировались.

"Вместе с тем, однако…" Точность необходима, если хочешь докопаться до истины, если готов нести ответственность за результат, за свои речи… Сколько раз я видел и слышал дискуссии, когда их участники обсуждают нечто важное для себя, и спорят, и спорят аж переходя на личности ("А ты кто такой?"), не удосужившись даже понять, о чём они говорят, я у же не говорю - согласовать. Спорить об определениях, скажет математик, бессмысленно, лишь бы они не были внутренне противоречивы, они могут быть произвольны. "Финтифлюшкой называется расфуфыренная блямба " - говорю я детям по случаю. "Вы хотите дать финтифлюшке другое определение - пожалуйста. " Но если не спорить об определениях, тогда о чём же? Определения выводят математику из «громадной тавтологии», если поразмышлять над мнением, что всё богатство математики выводится из аксиом. Пожалуй, спорить остаётся только о вкусах, хотя, согласно известной поговорке, это и вовсе бессмысленно.

Довольно часто неоднозначность языка эксплуатируется говорящим в лукавых целях. Не раз я слышал подобное о вере - но вера в завтрашний восход солнца и в загробный мир не одно и то же.

Итак, стремление к точности, идущее от математики, имеет чёткую основу. Но везде ли и всегда ли оно необходимо? В том - то и дело, что нет, и вот тут математика должна отступить. Например, в книге «Абстракция в математике и физике» (М. Каганов, Г.Любарский) я прочитал такое: « …тело – макроскопическая система, заключённая в определенный объём…». Чушь написана, сказал бы математик, ибо тело – это фигура, а объём – это величина. Но физики это пишут.

Ещё. Как-то я в аудитории учителей-гуманитариев спросил о разнице между двумя фразами. Первая: «Вася гуляет тогда, когда ему разрешили родители». Вторая: «Вася гуляет только тогда, когда ему разрешили родители». И оказалось, что для них они были равнозначны, А «математик» среагирует моментально.

А помните «дырку от бублика» у Маяковского? И когда я как-то заметил в обществе литераторов, что у бублика дырки нет, наоборот, сам бублик можно считать «дыркой в пространстве», то они долго хохотали.

Однако и мы, «математики», хороши. Дословное понимание фраз, оторванное от контекста, отсутствие каких бы то ни было ассоциаций, неуместное стремление к абсолютизации и наивысшей чёткости мысли калечат разговор моментально.

Некий крупный математик даже теоретическую физику считал «туманной болтовней».

И уж говорить нечего об игре слов и смыслов, о подтексте — гипертрофия словесной точности, присущая «математикам», уже давно стала темой для анекдотов. «Что ты делаешь?» — спрашиваю я, позвонив своему приятелю-математику по телефону. Ответ: «Говорю с тобой».

Это противостояние видно и в учениках. Один из них — чистый «математик» в выпускном сочинении написал только одну страницу — её хватило, чтобы чётко ответить на поставленный в теме сочинения вопрос: «За что я люблю Маяковского?» А сколько «поэтов» буквально мучилось математикой! В одном из ученических опусов — я читал его, кажется, у Я. Перельмана — в поэтической форме утверждалось, что после нового Всемирного потопа сухим останется только учебник геометрии.

Различие двух культур порой перерастает в скрытую недоброжелательность. Чего стоит стабильное в обиходе отношение к культуре, как таковой, только как к гуманитарной культуре, напрочь игнорируя технократическую. Творческая интеллигенция — это писатели и артисты, а не ботаники и кибернетики. Именно «поэты» — хранители духовного наследия, именно они (тут я ссылаюсь на ироничное замечание Г. Вейля) «владеют истиной в последней инстанции». Расхожее мнение: если некто, скажем, не имеет понятия об импрессионизме, то — «фи!»... а если тот же некто не знает, почему бывают зима и лето,— подумаешь... Напомню диалог Дымова с женой из «Попрыгуньи» А. Чехова:

«— Я всю жизнь занимался естественными науками и медициной, и мне некогда было интересоваться искусством.

— Но ведь это ужасно, Дымов!

— Почему же? Твои знакомые не знают естественных наук и медицины, однако же ты не ставишь им этого в упрёк».

Или вот такие строки Н. Гумилёва в стихотворении «Девушке»: «Никогда ничему не поверите, прежде чем не сочтёте, не смерите».

Довелось мне как-то прочитать о стычке двух поэтов:

— Да ты — математик!

— Нет, это ты — математик!

Похоже, что они этим словом ругались.

Различие в толкованиях налицо, но ценнее осмыслить не только различие их позиций, но и объединение. Мне не нравится противостояние, неинтересно, мне гораздо ближе их соединение, слияние. И в деятельности «поэта», и в деятельности «математика» я предпочитаю отыскивать общее. Читаем У. Фолкнера: «Я убеждён, что писать человека заставляет открытие какой-либо истины». Думаю, что любой учёный подпишется под этими словами, если их отнести к его профессии. В.Белинский (вслед за Г.Гегелем) пишет: «Искусство - это мышление образами.» Под этим мнением, если заменить первое слово на « геометрия» подпишется математик.

«Верьте в тождество Истины, Красоты и Добра»,— написал М. Уэльбек — современный французский писатель и поэт.

А вот высказывание П. Валери: «Если бы логик всегда должен был оставаться логически мыслящей личностью, он бы не стал и не мог бы стать логиком; и если поэт всегда будет только поэтом, без малейшей склонности абстрагировать и рассуждать, никакого следа в поэзии он не оставит». И даже такое С. Бэккета: «Поразительно, как математика помогает познать себя».

Послушаем Анатоля Франса. «Геометрия лежит в основе всего, она присутствует всюду так же, как скелет в животном. Она есть отвлечение и она же реальность. Видимый мир прикрывает её. Но в бесконечно многообразной игре форм, в которой вселенная является нашему удивлённому духу, законы геометрии, всегда достоверные, господствуют над материей спящей и пробуждающейся, над кристаллом и человеком, Землей и созвездиями. Она царит в женской красоте, в музыкальной гармонии и поэтическом ритме, в движении мыслей. Геометрия есть мера всего. В ней – движение, в ней же и неподвижность. Счастлив тот, кто следит за прекрасным строем её чертежей, кто открывает присущие ей и неотъемлемые свойства.» Замечательно, ни один геометр не сказал так.

И ещё, его же. « В математике есть точность, достаточно согласующаяся с абсолютной истиной. Числа представляют опасность лишь потому, что разум, увлечённый поисками своего собственного закона, начинает, заблуждаясь, представлять себе Вселенную в виде системы чисел.»

Мыслей такого рода предостаточно, и среди них очень глубокие. Одна из них, весьма радикальная, принадлежит Н.Винеру: «.„математика — один из видов искусства».

Тут же замечу, что В. Арнольд считает математику, напротив, наукой естественной. Он пишет: «Основной вклад математики в естествознание состоит вовсе не в формальных вычислениях (или других применениях готовых математических достижений), а в исследовании тех неформальных вопросов, где точное выражение постановки вопроса (того, что именно следует искать и какие именно модели использовать) составляет обычно полдела.»

Как бы мне соединить эти взгляды?

И я с особым пиэтетом отношусь к тем личностям в мировой истории, чей след многолик. «Математик — поэт» —таков образ. Примеры хорошо известны: Пифагор, Леонардо, О.Хайям, А.Дюрер, И.Гёте, А.Бородин, Б.Рассел, А.Пуанкаре...

Если бы противостояние двух культур приводило разве что к светскому пикированию, то и пусть. Но боюсь, что не так. Жизнь человека и общества постоянно требует сложных решений, выходящих за рамки любой профессии. Если для примера взять хотя бы образование, то открывается просто бездна — сколько о нём было высказано выдающимися мыслителями и представителями разных культур за минувшие столетия! Хочется помянуть из наших Т. Грановского и Н. Пирогова — профессиональных деятелей науки, но близких к народному просвещению. Читать их — чистое удовольствие и цитировать можно долго. Если бы реформаторы образования — прошлые и будущие — осознали нетривиальность проблематики, связанной с образованием, то их инновационной прыти заметно поубавилось бы. О нынешних реформаторах я не говорю, давно видно их необузданное прожектёрство.

От небольшого экскурса в литературу и общие разговоры подойдём поближе к нашей работе. Что принципиально? А то, что в профессиональной деятельности учителя математики собираются обе культуры: технократическая — через предметное содержание и гуманитарная — через образовательную деятельность. Учитель математики влияет на формирование в сознании ребёнка иерархии общечеловеческих ценностей, и поэтому «гуманитарная математика» — это то, что происходит на каждом уроке, хотим мы этого или не хотим. Бывало, в молодые годы, преисполненный восхищения перед математикой и её методом, я пытался формализовать преподавание изо всех сил, расписать всю учебную деятельность ребёнка, сообразуя её с некими правилами, алгоритмами и предписаниями. Убрать из живого процесса образования, следуя духу науки, самого человека настолько, насколько это возможно.

Прошло всё это. Более того, обнаружил я, что невозможно это даже в самой математике. В самом деле, в школьном преподавании невозможна и неуместна формализация таких понятий, как «задача», «решение задачи», «доказательство»... Вряд ли стоит определять (в общеобразовательной школе), что такое функция — иногда в этом определении употребляют термин «правило», но что такое правило? Совсем интересно получается с определением уравнения. Приходилось читать (у очень квалифицированных авторов), что уравнение — это равенство $f(x)=g(x)$, если хотят (или надо) найти такой x что... А если не хотят? А если не надо? Я уже писал выше, что проблемы есть и с понятием тождества.Далее, проверка в текстовой задаче, оказывается, зависит от того, как воспринимает такую задачу сам учитель: как пропедевтику прикладной задачи или как некий жанр в элементарной математике. Если первое, то проверка необходима, а если второе, то на неё можно рукой махнуть. Запросто мы используем всякие вольности речи: например, говорим «вектор лежит на прямой» — если вспомнить точный смысл этих понятий, говорим полную чушь.

Нет, никуда нам не деться ни от себя, ни от «человеческого фактора». Именно потому, что гуманитарная математика (я позволю себе даже опустить кавычки) и есть наша учительская реальность, нынешний звон колоколов по этому поводу может восприниматься достаточно скептически. Этот скепсис только поддерживается путаницей в развернувшихся теоретических дискуссиях и сумятицей в конкретных действиях.

Мне уже довелось прочитать, что гуманитаризацию образования в целом можно понимать как гуманизацию, но тогда проблема переносится совсем в другие дали: что есть гуманизм по отношению к ребёнку? Придать образованию, как говорят, «человеческое лицо»? Хорошо, предположим, но «человеческое лицо» в школе должна иметь не только математика, и прочие предметы тоже, скажем история. Получается, что гуманитаризировать придётся и гуманитарные дисциплины — как-то это странно... Другая крайность — математика - наука гуманитарная. Возможно и такое понимание, но тогда вообще нет проблемы!

Но дела делаются, и появились учебники математики для гуманитарных классов, в которых вполне традиционное содержание передаётся с помощью персонажей типа Петрушки. В них частенько приводятся сказки с математическим содержанием, но понимают ли их авторы, что это уже не математика, а литература (замечу — почти всегда плохого качества и точнее говорить об антигуманитарном образовании)? Возникли гуманитарные школы, в которых математика сведена чуть ли не к вычислениям, а потому фактически уничтожена. (Разумеется, на так понятую математику достаточно и двух часов в неделю.) Стали проводиться экзамены по математике специально для гуманитарных классов. Содержание этих экзаменов показывает, что проблема решается не содержательно, а лишь изъятием из стандартного курса задач повышенной трудности и упражнений, требующих специфической техники. Но проблема эта решается скорее прагматически, нежели концептуально. Скорее для тех, у кого всего три часа математики в неделю, а не для тех, кто хочет получить полноценное математическое образование (хотя бы и среднее), но без того, чтобы его продолжать. И выходит согласно поговорке «Тех же щей, но пожиже влей».

Если же говорить о существенном в интеллекте, именно о мыслительных процессах, об их специфике в голове «гуманитария», то на чём сделать акцент? Информация в голове идет в четырех ипостасях: фигуративной (наглядно-образной), символической, семантической и поведенческой (по

Д. Гилфорду). К математике имеют отношение первые три. Какие же оставить для «гуманитариев»? Полагаю, что упор надо сделать на первые две. Иначе говоря, разумно сделать акцент на развитие пространственного мышления и вербальных идей. Побольше чисто геометрической работы с фигурами, побольше неформальных рассуждений в постижении смыслов и поменьше формул и уравнений. Плюс повышенное внимание к логике. Объяснять, убеждать, доказывать, опровергать — это ведь всем может пригодиться и в самой обычной жизни, не только в профессиональной.

И всё это реализовать в рамках деятельностного подхода.

Думая о гуманитаризации образования в целом, не хочется открывать Америк. Не таковое ли оно ныне в США, о чём я знаю и по личным впечатлениям, не таким ли оно было в России прошлого века, о чём можно судить по статьям публицистов тех времён? Но тогда стоит хорошо подумать о тенденции более глобального характера. И в России тогда, и ныне в США появились призывы к «реализации» — если так можно сказать — образования. К смещению гуманитарных акцентов в сторону технократических. В России так и случилось, и появились реальные училища. И нынче в США, ежегодно выкачивающих со всего мира лучшие мозги, поняли, что головами и собственной нации надо интересоваться. Известно, глобальной тенденцией в обществе являются колебания в системе ценностей, инвариантные относительно общественных катаклизмов, и тогда, естественно, колеблются приоритеты в системе народного образования.

Быть может, гуманитаризацию общего образования в целом — у нас и сейчас — и нужно понимать как поиски точки равновесия между технократическим и гуманитарным образованием? Эту точку ищет система образования в целом, но её может искать и конкретный учитель.

А что могу лично я?

Попытаюсь довести понятие гуманитаризации до операционального уровня — ответить в конечном счётё на два вопроса:

1. Может ли школьная математика способствовать гуманитаризации общего образования и если да, то как?

2. Каким образом можно внести гуманитарное начало в математическое образование?

Сначала о художественной культуре, точнее, о той части гумаиитарного образования, которая связана с искусством, вообще с эстетикой. По этому поводу пассаж будет вполне очевидным.
Ещё А. Пуанкаре писал о том, что эстетический критерий является руководящим, когда математик из множества приходящих в голову идей выбирает одну-единственную. О красивом решении задачи, о красивой теории может вспомнить каждый «математик». Вот мнение А. Гротендика, одного из бурбакистов: «...едва ли человек вообще может сделать что-нибудь полезное в математике, если он не чувствует её красоты». И помяну огромное число популярных сочинений о красоте науки и математики. Однако напомню: красота - в глазах смотрящего.

Другой аспект — анализ произведения искусства с помощью математики (мне известно таковое в архитектуре, живописи, стихосложении, музыке и даже прозе). Осталось всё это как-то отобразить в школьных учебниках и задачниках. Про эстетику — всё.

Вспомним далее соединение математики с гуманитарными науками. В Древней Греции связь философии и математики была нормой. То же в Средние века, достаточно посмотреть, чему тогда обучали в университетах. Часто обращаются к философии и современные математики (А. Пуанкаре, Б. Рассел, А. Уайтхед, Г. Вейль, Н. Винер, Д. Мордухай-Болтовской, А. Александров, Н. Моисеев). А также и к психологии (Ж. Адамар, Г. Биркгоф, Р.Пенроуз). Математическая логика возникла в результате анализа законов правильного мышления, наука об искусственном интеллекте — порождение математики и психологии, появилась математическая лингвистика. Язык для общения с внеземной цивилизацией (коль скоро она объявится) уже разработан, и сделал это математик — X. Фрейденталь. Мне очевидно, что на уроках математики нужно говорить и об истории науки вообще и математики в частности, о тенденциях к интеграции научных знаний, о личностях учёных-математиков и даже (немного) о вкладе математики в философию. Говорить-то можно, но в ежедневную учебную деятельность ребёнка это не переплавить. А потому приходится думать дальше.

И можно увидеть нечто общее между математикой и литературой. И та, и другая «работают» с идеальными объектами. В реальной жизни нет ни точек, ни чисел, равно как нет Дон Кихота или Анны Карениной. И там, и там можно говорить как о типичных объектах, так и об уникальных. В этом направлении можно двигаться и дальше, но идея уже ясна.

Ещё одно — неисчерпаемость того и другого, создаваемая из весьма ограниченного круга исходных возможностей. В математике это бесконечность (потенциальная) теорем на основе небольшого числа аксиом. В литературе — бесконечность сюжетов, получаемых из достаточно небогатого набора исходных ситуаций.

Без сомнения, тезис об их общности можно развивать и шире, и глубже...

Из всех различий между математикой и гуманитарной наукой я обращаю особое внимание на резкое различие в степени формализации. Предмет математики формализован очень сильно — аксиоматика, исключительно дедуктивные доказательства. Предмет гуманитарной науки, т. е. науки о человеке и его деятельности, формализован очень мало — аксиоматика отсутствует вовсе или весьма условна («Этика» Б. Спинозы), доказательства многообразны, а не только дедуктивны. И проникновение гуманитарии в математику кажется невозможным. Однако не будем торопиться и посмотрим на проблему с другого конца. Представим себе общую (не полную) картину образования и место, занимаемое в ней математикой, на рис. 112

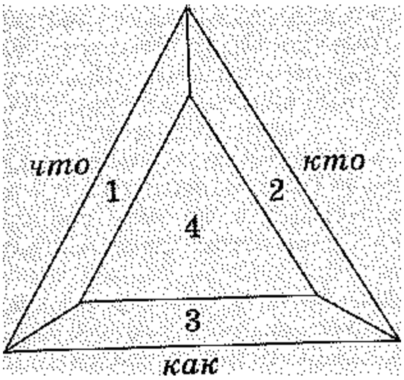


Рис. 112

Цифры на этом рисунке означают следующее:

1— естественное образование (оно раскрывает нам природу);

2— гуманитарное образование (оно раскрывает нам самих себя);

3—технологическое образование (оно раскрывает нам те способы, с помощью которых мы в этой природе существуем);

4— математическое образование. Математика обособлена, ибо предмет её не вписывается ни в одну из трёх других составляющих образования. Вместе с тем каждая из них может быть отражена в процессе преподавания математики.

Размышляя над этой незатейливой картинкой, можно сразу же сделать несколько выводов:

1. В идеале в общем образовании все эти четыре составляющие должны быть представлены равномерно. Точка равновесия — в балансе четырех.

2. Противоречия между этими составляющими должны быть по возможности сглажены — голова у ребёнка одна и мир вокруг него тоже один.

3. Связи гуманитарных наук и математики могут обсуждаться специально. При этом возможны два неразрывных аспекта этих связей: а) проникновение математики в преподавание гуманитарных дисциплин — математизация; б) проникновение гуманитарных дисциплин в преподавание математики — гуманитаризация.

Теперь я утверждаю следующее:

1. Школьная математика может способствовать гуманитаризации общего образования.

2. Математика может быть гуманитаризирована. Точный смысл этой фразы таков: некоторые черты гуманитарных наук могут быть внедрены в преподавание школьной математики.

Разберёмся вначале с первым утверждением (изложение мыслей конспективно).

1. Математика, отражая в себе прочие составляющие, переплавляет их в нечто единое. Знакомство учеников с «всеприменимым» математическим методом позволяет сгладить противоречия между прочими составляющими.

2. Возьмём технологическую составляющую. В ответ на вопрос «как?» необходимо входит и ответ на вопрос «кто?». Ответ на вопрос «кто?» уже сам по себе имеет гуманитарный аспект, так как предполагает набор средств, которыми этот самый «кто?» владеет. Методология математики и математическая техника являются такими средствами.

3. Таким образом математика способствует гуманитаризации общего образования и через его технологическую составляющую. При этом технологическая составляющая входит в математику непосредственно — через практические задачи (прикладная математика) и опосредованно — через естественные науки (физика в первую очередь).

Как вывод из положений в этих трёх пунктах получаем, что гуманитаризация общего образования может осуществляться — косвенно — посредством математики. Для этого в математике есть две возможности: использование имеющихся методов для решения практических задач, а также изучение новых методов, которые могут иметь прикладное значение.

Итак, вычленяется роль математики — косвенная — для гуманитаризации образования в целом. Роль, которая испокон веку была известна учителю. Сами того не ведая, мы, если согласиться с тем, что сказано выше, уподобились г. Журдену, вдруг узнавшему, что он всю жизнь говорил прозой. Именно не уничтожением математики или выхолащиванием её содержания, а используя методологию математики и математические модели для решения практических задач, всё более полно используя прикладной аспект математики, мы и способствуем гуманитаризации общего образования.

Теперь о непосредственной гуманитаризации преподавания математики. Я вижу одно направление движения в эту сторону. Среди прочих очевидно такое ясное отличие гуманитарной науки от математики — ее неоднозначность. Не бывает принципиально разных точек зрения на понятие, скажем, многогранника или на алгебру. Но есть уйма теорий, например, о том, что такое личность. Поэтому если ввести элементы неоднозначности в школьный курс математики, то это и будет элемент гуманитаризации. Где и как эту неоднозначность можно ввести в преподавание, я уже говорил. Осталось только делать это почаще. Разумеется, это легче сказать, чем внедрить. Представьте себе, что вы хотите ввести хотя бы толику неопределённости в курс анализа Э. Ландау (в нем доказано почти все без единого лишнего слова, а иногда совсем без слов) или в учебники геометрии А. Погорелова!

Закончить я хочу удивительной и прекрасной мыслью Ф. Ницше: «Мы хотим внести тонкость и строгость математики во все науки, поскольку это вообще возможно; мы желаем этого не потому, что рассчитываем таким путём познавать вещи, но для того, чтобы *установить* этим наше человеческое отношение к вещам. Математика есть лишь средство общего и высшего человековедения».

И опять хочется что-то додумать...

1У.12. Компьютер. Смена парадигмы?

Поначалу я (и многие мои коллеги) скептически относился к идее внедрения компьютера в школьное математическое образование. Такое отношение имеет «исторические корни». Когда я ещё учился в вузе, меня обучали показывать кинофильмы. Потом была волна учебного телевидения – несколько раз мне довелось рассказывать телезрителям – абитуриентам о решении конкурсных задач. Когда – то внедрялись в школу «суперметоды» образования – ростовский метод, липецкий метод… Давно забытые веяния….

Для меня всё переменилось в одночасье, когда я увидел на дисплее моментальное разложение на множители выражения n^4+4. (Эта задача встречается в олимпиадных сборниках как теорема Софи Жермен). На меня этот случай произвёл очень сильное впечатление - что-то надо делать с курсом математики. Появилась даже идея создать курс «компьютерной математики». Замысел был таков: подобрать задачи, которые не могут быть решены только компьютерными средствами, но без них решения весьма затруднительны.

Тут-то я и начал думать – что и как можно сделать в школе с помощью компьютера. (Сразу оговорюсь – речь идёт, конечно, о программном обеспечении. Говорить « компьютер» мне привычнее).

Шапочное знакомство с компьютером у меня произошло достаточно давно. В 1962 году я начал работать в 239 школе, в которой стали готовить программистов, для чего использовали ЭВМ «Урал», затем «Минск-22». И нас, учителей математики, немного просвещали. Довелось затем вести в массовой школе курс информатики, когда его только ввели, даже обучал школьников языку «Basic» – кто сейчас помнит такой язык начального программирования? Мои ученики ходили на практику в Технический университет (тогда Политехнический институт), на экскурсию – в вычислительный центр Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе. Видел, как школьникам всё это было интересно.

Пытался сам программировать, освоил редактор «ChiWriter», в нём можно было набирать математические символы. На машинке больше не печатал.

А потом – пошло, поехало.

Так что мой путь к использованию компьютера для преподавания математики был не прямой и долгий. На первых порах было непросто, помогали бывшие ученики. И по сию пору они учат меня компьютерным премудростям.

За прошедшие годы довелось участвовать в разных проектах, связанных с компьютером, как - то: тестовая проверка; электронный учебник геометрии и сопутствующих к нему материалов;

дистанционный курс геометрии; геометрические преобразования графиков функций; экспериментальное преподавание математики с использованием различного программного обеспечения.

Я остановлюсь подробнее на программах, которые были использованы (используются) в реальном преподавании.

Первая программа, с которой я имел дело в школьном курсе математики – Derive. Приведу некоторые задачи, которые я предлагал старшеклассникам на специальных уроках, проводившихся в компьютерном классе.

1) Каково влияние параметра на график функции? К примеру, что происходит с графиком $y = x^2 + x + 1$, когда второй коэффициент будет изменяться? То есть, что происходит с графиком $y = x^2 + ax + 1$ при изменении a?

2) Как изменяют известный график некоторые «добавки»? Например, что будет, если вместо функции $y = \sin(1/x)$ рассматривать такие: $y = x\sin(1/x)$, $y = x^2\sin(1/x)$?

3) Каковы свойства кривых (циклоида, астроида, лемниската, трактриса….)?

Расскажу чуть подробнее, что происходило, например, при изучении декартова листа. Его уравнение: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (рис. 113)

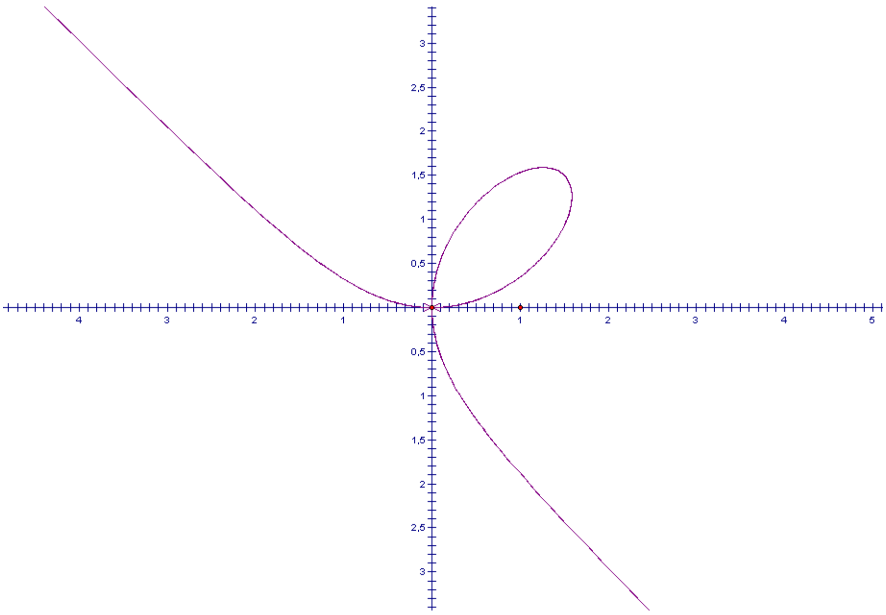


Рис. 113

Вначале учёные полагали, что кривая представляет собой только петлю (в первой четверти), затем Х. Гюйгенс и И. Бернулли « нашли» у неё два «хвоста». Разумеется, на дисплее видна
Кривая и за пределами первой четверти.

Итак, ученики на дисплее видят эту кривую, и я спрашиваю: какие свойства кривой вы увидели? Можно увидеть симметрию относительно прямой $y = x$, наклонную асимптоту, существование в первой четверти точки, которая более всего удалена от начала координат.

Наблюдение - только начало работы. Затем начинались поиски доказательств. Например, как можно из уравнения вывести, что у декартова листа есть асимптота?

Дальше я предлагал ввести параметр и понаблюдать за кривой $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ при изменении параметра *a:* какие свойства сохраняются, какие – нет.

В результате этих занятий я поменял обычную методику изучения функции. Традиционно мы, исследуя функцию и глядя на формулу, начинаем выяснять: какова область определения, что там с симметрией, пределами, экстремумами… И в конце появляется график. Работая с компьютером, мы начинаем «с конца», идя от графика функции к её свойствам.

Ученики по итогам своей работы над конкретной задачей писали отчёт. Некоторые отчёты был столь впечатляющи, что я до сих пор храню их, рука не поднимается выкинуть.

Я разрешил ученикам использовать Derive и на уроках математики, и дома для выполнения домашних заданий, и на контрольных работах, и даже на переводных экзаменах.

Некая американская благотворительная организация подарила нашей школе 10 микрокомпьютеров TI-92. На первом же занятии я попросил учеников ввести в компьютер условия задач тогдашнего государственного экзамена по алгебре за девятилетку; из шести этих задач верный ответ был выдан в пяти! (Шестая задача была текстовой).

Было несколько вариантов использования TI-92. Покажу на примере.

Скажем, предлагается функция $y = \dfrac{2}{x^2 + 12x + 36} - \dfrac{12}{x^2 - 36}$, про которую задавался ряд вопросов.

Один такой: при каких значениях *x* выполняется равенство $y(x) = \dfrac{1}{x-6}$?

И упрощение исходного выражения, и решение полученного уравнения можно проделать на компьютере, поэтому возможны разные пути. Работая над заданием, ученики могли найти ответ с помощью компьютера, затем его обосновать в письменном решении; могли сами вначале найти ответ, а затем проверить его на компьютере.

*****

Теперь перейду к среде «Живая математика». Раньше я был знаком только с американским вариантом этой среды (The Geometer's Sketchpad), сейчас она переведена на русский язык .

Основное применение этой среды – геометрия. Три основных направления в преподавании геометрии, согласно тому, как это сформулировал А.Александров – развитие пространственного мышления, логическое обоснование и прослеживание её связи с практикой.

Я подбирал соответствующие этому пониманию задачи. Вначале (в совместном российско-американском проекте) их было чуть больше 20. В дальнейшем мной было подобрано ещё около 20 задач. Было важно включить работу с компьютерной технологией в общую дидактическую схему работы. В основу схемы положена организация исследовательской и проектной деятельности ученика.

В каждой задачной ситуации предлагается следующий примерный (не жёсткий) порядок (сценарий) действий.

1. Наличие сюжетной, внематематической части.
2. Создание геометрической модели сюжетной части задачи.
3. Наводящие соображения для поиска решения или появления гипотезы о возможном результате.
4. Формулировка гипотезы.
5. Компьютерный эксперимент.
6. Корректировка гипотезы по итогам эксперимента.
7. Неформальное подтверждение справедливости гипотезы.
8. Доказательство истинности гипотезы.
9. Поиск альтернативного решения.
10. Расширение задачи (обобщение, частные случаи).

Остановлюсь на этом списке подробнее.

Коль скоро мы включаем ученика в исследовательскую деятельность, предлагаемая ему задача не может быть взята «с потолка». Либо она отражает какую-то прикладную проблему, либо она является развитием уже имеющихся результатов. Для создания прикладного оттенка задачи мы предлагаем в начальной её формулировке нечто вроде "сказочки".

Геометрическая задача появляется в результате анализа прикладной ситуации. Создание геометрической формулировки стоит предоставить ученикам. Формулировка геометрической задачи, самостоятельно найденная учеником, способствует более полному её пониманию, по необходимости – её корректировке.

Прежде чем перейти к работе с компьютером, чрезвычайно полезны предположения относительно ответа. Ученикам предлагается (по возможности) мысленно представить ситуацию и предугадать возможный результат. Эти предположения могут возникнуть в результате правдоподобных рассуждений (наводящих соображений), как это советует делать Д. Пойа. Таковыми наводящими соображениями являются аналогия, разбор частных случаев, проверка обратного утверждения, и т.д.

В некоторых случаях к наводящим соображениям отнесены рекомендации по решению задачи.

Результатом использования наводящих соображений может являться появление гипотезы относительно ответа на поставленный вопрос.

1. Компьютерный эксперимент либо опровергает возникшую гипотезу, либо корректирует её, либо подтверждает. Если гипотеза уже возникла после наводящих соображений, то компьютер выступает как средство её проверки. Если же гипотеза не появилась, то компьютер выступает как средство её генерирования.

Использование компьютера в геометрии особенно эффективно для:

а) поиска и конструирования объекта, удовлетворяющего условию;

б) наблюдения за изменяющимися геометрическими объектами и за величинами, с ними связанными.

2. Если мы доверяем интуиции, использованию наводящих соображений и подтверждающей работе компьютера, то можем считать, что гипотеза доказана.

Предположим, однако, что и после компьютерного эксперимента остаются сомнения в справедливости гипотезы. Тогда переходим к поиску неформальных соображений (рациональных рассуждений), подтверждающих гипотезу. Рациональное рассуждение использует наглядность, симметрию, непрерывность, постоянство, движение, а также соображения, взятые из механики.

А если и этого недостаточно, наши сомнения не исчезли, то воспользуемся традиционным геометрическим доказательством.

3. Желателен поиск альтернативного решения.

4. В исследовательской деятельности решённая задача порождает новые вопросы, поэтому предлагается «расширение» исходной задачи. Эту часть исследования относим к проектной деятельности. В проекте ученику предлагается пройти все перечисленные выше этапы, за исключением формулировки собственно геометрической задачи – она является отправной точкой проекта. Ученику предлагается сочинить исходный сюжет, предложить наводящие соображения, сформулировать гипотезу, продумать компьютерный эксперимент, подтвердить его результаты рациональными рассуждениями и дедуктивным доказательством, искать альтернативные решения. Затем предложить дальнейшие расширения.

Первое расширение показывает, что исследование не заканчивается с получением ответа на поставленный вопрос – можно поставить новый вопрос. Второе расширение (которое в большинстве задач сложнее первого) показывает, что и с первым расширением исследовательская деятельность не заканчивается, а продолжается.

По поводу расширений рассказываю ученикам историю с Резерфордом, который своим студентам, аспирантам, работникам давал задачу, и если этот человек приходил со словами: «Я решил задачу, какая будет следующая задача?», Резерфорд этого человека просто увольнял, из простых соображений: если это настоящий исследователь по духу своему, то у него в процессе исследования уже должны возникать задачи, которые являются продолжением того, что он сделал.

Приведу несложный пример одной из предложенных задач - «о лестнице».

Задача. Лестница вертикально стоит возле стены. На середину лестницы забрался котёнок, и вдруг нижняя точка лестницы начала скользить по полу, а верхняя точка – по стене. Найдите траекторию котёнка, если он всё это время будет сидеть на той же ступеньке.

Вот развёрнутый вариант работы с этой задачей.

К формулировке геометрической задачи можно подойти, преобразовав исходный текст. Игнорируем трение лестницы, движение лестницы будем считать непрерывным и без отклонений от вертикальной плоскости (при всей условности последнего предположения). Будем считать лестницу отрезком постоянной длины, котёнка – точкой. Стену и пол комнаты считаем двумя взаимно перпендикулярными лучами с общим началом.

В результате должна получиться линия конечной длины, концы которой фиксированы на этих лучах верхней и нижней точкой лестницы.

Геометрическая формулировка

Дан прямой угол. Найдите множество точек, являющихся серединами отрезка данной длины, концы которого лежат на различных сторонах этого прямого угла (рис. 114).

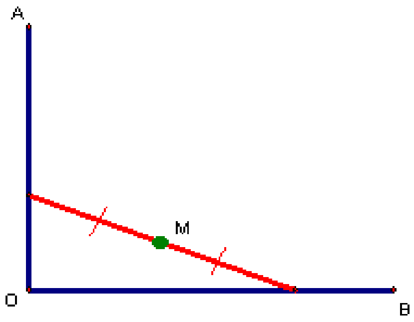


Рис. 114

.

Редко кто видит «сходу» верную траекторию.

Наводящие соображения

Если взять отрезок длины 2, то в двух крайних положениях, когда он лежит на сторонах угла, расстояние от его середины до вершины угла равно 1. Такое же расстояние мы получим, когда концы отрезка равноудалены от вершины угла (рис. 115).

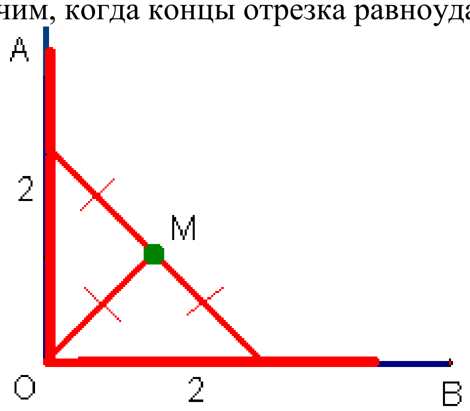


Рис. 115

Возникает предположение, что при любом положении этого отрезка расстояние до вершины угла будет одним и тем же, то есть траекторией будет дуга окружности. Это предположение основано на такой практической идее: в геометрии зависимости часто выражаются линейной либо квадратичной функцией. И если в трёх точках значения этой функции совпадают, то она является константой.

Для доказательства можно ввести систему координат, оси которой совпадают со сторонами угла.

Компьютерный эксперимент

Постройте прямой угол, затем произвольный отрезок *XY*. Постройте отрезок *CD* с концами на сторонах угла, длина которого равна выбранному отрезку *XY*.

В динамическом рисунке перемещая один из концов отрезка *CD*, проследите за траекторией точки *M* – середины отрезка *CD*. Кроме того, измеряйте расстояние *OM*
(рис. 116).

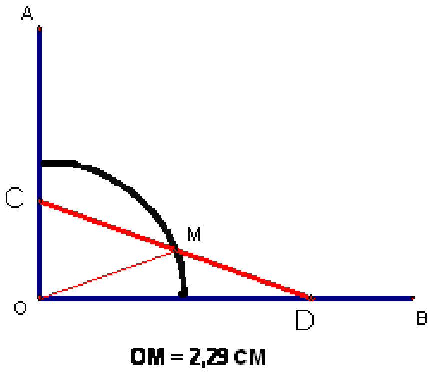


Рис. 116.

Рациональное рассуждение

Если рассмотреть прямоугольник, стороны которого находятся на сторонах данного прямого угла, а диагональю является переменный отрезок постоянной длины, то его середина является также серединой другой его диагонали, то есть она удалена от вершины *O* угла на одно и то же расстояние (рис. 117).

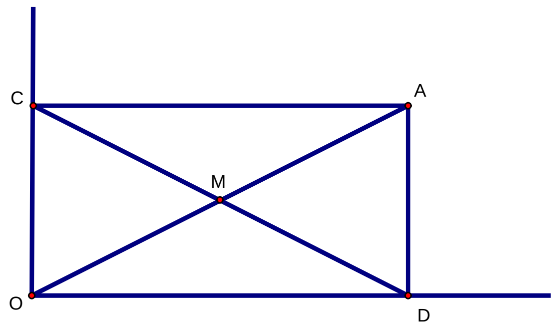


Рис. 117.

Решение

Докажем, что *OM* – константа. На рисунке 118 точка *M* имеет координаты (x, y), точка *A* имеет координаты (0, 2y), точка *B* имеет координаты (2x, 0).

По формуле для расстояния между двумя точками имеем:

$$\mathrm{OM}^2 = x^2 + y^2. \qquad (1)$$

Далее, из треугольника *AOB* по теореме Пифагора имеем: $AB^2 = OA^2 + OB^2$.

Отсюда $AB^2 = (2y)^2 + (2x)^2 = 4(y^2 + x^2)$ (2)

Из равенств (1) и (2) получаем: $OM^2 = 0{,}25\,AB^2$.

А так как *AB* постоянно, то *OM* – константа.

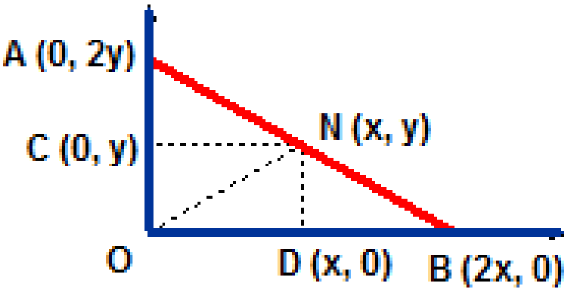


Рис. 118

Другое решение

Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы. Согласно условию, гипотенуза постоянна.

Следовательно, и медиана является постоянной. Это означает, что переменная точка M удалена от точки O на одно и то же расстояние. Поэтому, искомое множество точек – это четверть окружности с центром O и радиусом $AB/2$.

Возможные расширения таковы.

1. Середину отрезка можно трактовать как его центр масс. Возникает вопрос – какова будет траектория центра масс отрезка, если он не совпадает с его серединой?

2. Пусть исходный отрезок является стороной прямоугольника, находящегося в данном прямом угле. Какова будет траектория центра масс прямоугольника?

3. Найдите геометрическое место вершин равносторонних треугольников ABC притом, что его сторона AB скользит своими концами по сторонам прямого угла. При этом вершина C и вершина данного прямого угла расположены по разные стороны от прямой AB.

Вот вкратце выразительный пример ещё одной задачи – она произвела хорошее впечатление на американских коллег.

В 1785 году на маленьком острове в Карибском море пираты закопали клад. Для того, чтобы впоследствии найти клад, они в качестве ориентиров заметили две высокие горы и пальмовое дерево. Впоследствии записка с описанием поиска клада попала к историкам. Текст записки гласил:

"От пальмы идите к Соколиной горе и считайте шаги. Затем поверните под прямым углом направо, сделайте такое же количество шагов, и воткните в землю палку.

Вернитесь к пальме и идите к Орлиной горе, считая шаги. Поверните под прямым углом налево и сделайте такое же количество шагов. Воткните в землю другую палку.

В этом случае клад будет точно посередине между двумя палками".

(Рис.119)

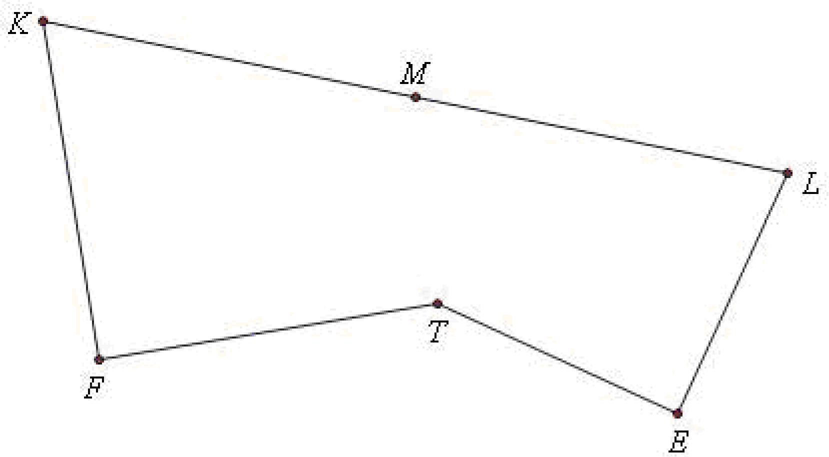


Рис. 119

Историки нашли обе горы, но пальмы на месте уже не было. Можно ли им теперь найти клад?

То, что задача может быть решена, поначалу не кажется возможным.

Компьютерный эксперимент (перемещение на дисплее точки, соответствующей пальме) показывает, что точка, обозначающая клад, не перемещается!

Геометрическая формулировка. Два равнобедренных прямоугольных треугольника KFT ($KF=FT$) и LET ($TE=EL$) имеют единственную общую точку T. Точка M – середина отрезка KL (рис. 120). Зависит ли положение точки M от точки T?

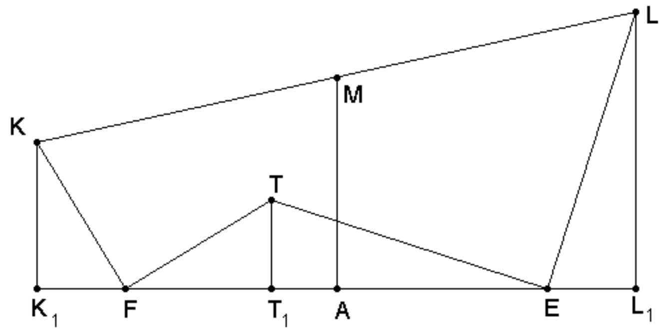


Рис. 120

Рациональное рассуждение. Пусть точка T движется в восточном направлении. Поскольку точка K получена поворотом точки T на 90° против часовой стрелки, точка K будет двигаться с той же постоянной скоростью в северном направлении. Поскольку точка L получена поворотом точки T на 90° по часовой стрелке, она будет двигаться с той же скоростью в южном направлении. Поскольку скорости точек K и L равны по модулю но противоположно направлены, скорость точки M – середины отрезка KL, равна нулю, и положение середины отрезка не зависит от положения точки T.

Решение.

Построим прямую EF, проведём к ней перпендикуляры из точек K, M, T и L. (Полагаем, что точки K, L и T расположены по одну сторону от прямой EF (рис. 116).

Поскольку $KK_1 \perp EF$, $MA \perp EF$, $LL_1 \perp EF$, то $KK_1 \| LL_1$, поэтому K_1KLL_1 – трапеция. (В случае $KK_1=LL_1$ трапеция становится прямоугольником). $MA \perp EF$ и

$KM=ML$, следовательно, MA – средняя линия трапеции, поэтому $MA=(KK_1+LL_1)/2$. Треугольники FKK_1 и FTT_1 – прямоугольные с равными гипотенузами, поскольку $FK=FT$ по построению. Поскольку $KK_1 \perp FT_1$ и $KF \perp FT$, получаем: $\angle K_1KF=\angle TFT_1$, следовательно, $\Delta FKK_1=\Delta TFT_1$ и $KK_1=FT_1$. Аналогично можно доказать, что $\Delta ELL_1=\Delta TET_1$ и $LL_1=ET_1$.

Далее, $MA=(KK_1+LL_1)/2=(FT_1+ET_1)/2=EF/2$. Поскольку расстояние EF постоянно, длина отрезка MA также постоянна. Кроме того, поскольку MA – средняя линия трапеции, $K_1A=AL_1$. Из равенства треугольников, доказанного выше, следует, что $TT_1=K_1F=EL_1$. Следовательно, $FA=AE$, то есть A – середина отрезка EF.

Таким образом, точка M лежит на серединном перпендикуляре отрезка EF на расстоянии половины длины EF от этого отрезка.

Поскольку расположение точки M не зависит от расположения точки T, можно выбрать произвольную точку T, отличную от точек F и E, не только середину отрезка EF, и следовать указанному выше алгоритму построения точки M. Так как положение клада не зависит от расположения пальмы, будем считать, что точка - пальма, например, совпадает с точкой – горой (одной из гор), после чего клад находится моментально.

Проект, включающий первые 20 задач, был экспериментально проверен в России и США. Эксперимент показал, что такое изучение геометрии позволяет одновременно достичь нескольких педагогических целей и помогает школьникам открывать для себя математику. Кроме того, студенты в США, принимавшие участие в данном проекте, показали заметно лучшие результаты на стандартизированных экзаменах, таких, например, как New York City Regents (выпускные экзамены необходимые для получения аттестата зрелости) and SATs (вступительные в ВУЗ), по сравнению с контрольной группой студентов, не использовавших эти учебные материалы.

Любопытны детали проведённого эксперимента. В качестве неформального подтверждения возникшей гипотезы ученики проводили порой реальный эксперимент, используя чертёжные инструменты, и даже реальные объекты. Например, одна девятиклассница, решая задачу о пиратах, испекла торт с кольцом, спрятанным внутри. Её одноклассники, чтобы найти местоположение кольца, использовали на поверхности торта рассмотренный в задаче метод построения. Другие при решении задачи раскладывали верёвки на полу.

Учителя, проводившие этот эксперимент отметили, что

1) повышается мотивация учеников;

2) при помощи компьютерных инструментов решение задач становится доступно более широкому кругу учащихся;

3) экономится много времени по сравнению с построением циркулем и линейкой, поэтому остаётся больше времени на обсуждение, анализ, доказательство;

4) возросшие успехи при решении задач с помощью компьютера улучшают отношение к математике в целом;

5) методику, разработанную в этом эксперименте для решения задач, можно использовать в других курсах математики.

Учителя отмечали также, что использование программы эффективнее, если работать со специальными классами задач – на оптимизацию, на геометрическое место точек, а также предполагающими исследование большого количества случаев перед тем, как можно будет сделать вывод.

****

Программа Geometry Expressions в России пока неизвестна. Её важная особенность – работа с символьными выражениями. Например, если задать стороны треугольника в буквенном виде, программа выведет аналитическое выражение неизвестной величины – скажем, медианы треугольника (рис. 121).

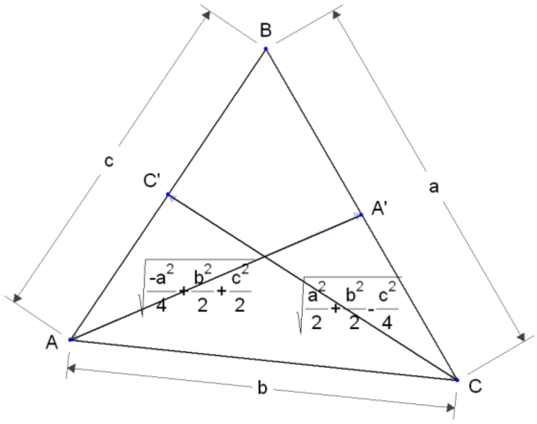


Рис. 121

Мне довелось (вместе с американскими коллегами) принять участие в разработке учебных материалов по алгебре, геометрии и началам анализа, соответствующих этой программе. Экспериментальная проверка этих материалов проводилась в двух школах США и в одной школе

России – на моих (вместе с Дворкиным М.Э.) уроках геометрии в 9 классе и на уроках анализа в11классе.

В приведённой задаче, используя полученные выражения для двух медиан, можно доказать равенство двух соответствующих сторон треугольника, если эти медианы равны. Тем самым программа приобщает школьников к использованию алгебраического метода доказательства геометрического утверждения. Кроме того, вид полученного выражения для медианы помогает найти само доказательство формулы медианы.

Ещё пример. В треугольнике даны три стороны, надо найти длину биссектрисы. Компьютер выдавал формулу длины, но непонятно, откуда она взялось. И тогда ученики начинали искать дополнительную информацию на рисунке. Они запросили у компьютера длины отрезков, на которые биссектриса разбивает сторону. Компьютер выдал длины этих отрезков, и стало видно, что эти длины относятся так же, как соответствующие стороны. Это был ключ к получению формулы длины биссектрисы, в итоге школьники с задачей справились. То есть компьютер работает как источник получения новой информации, которая есть на этом рисунке, причём в общем виде.

Вот ещё пример задачи, решаемой с помощью этой программы. (Рис. 122)

Рассмотрим ветвь гиперболы $y = a/x$, расположенную в первой четверти, и прямоугольник, две стороны которого лежат на осях координат, а одна вершина на гиперболе. а) Установить, принимает ли площадь такого прямоугольника наибольшее или наименьшее значение, б) Найти экстремальное значение периметра такого *прямоугольника и определить, является оно минимальным или максимальным.*

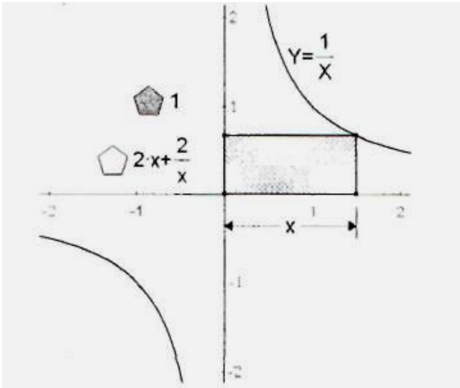


Рис. 122

В процессе исследования с помощью программы школьники прослеживают изменение как площади, так и периметра (в общем виде), перемещая точку по гиперболе, затем работают с аналитическим выражением площади (и периметра) через координаты переменной точки. (Рис. 123 а),б))

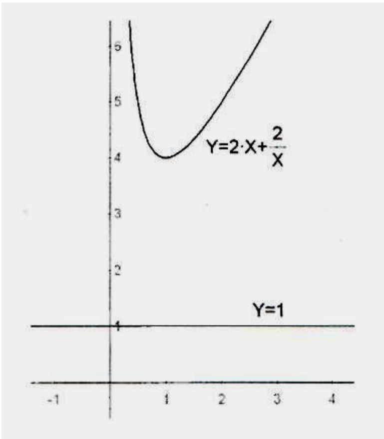


Рис. 123 а)

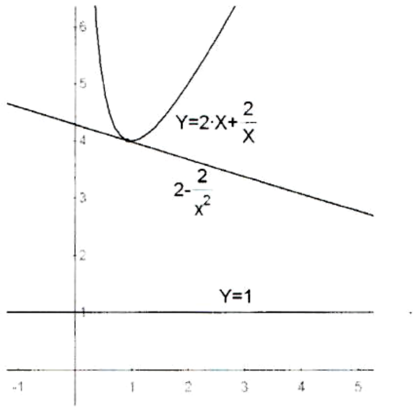


Рис. 123 б)

На рисунках 123а,б на экран программа вывела уравнения для периметра, его график, график касательной к полученной кривой и её угловой коэффициент, то есть производная.

Рассматривая рисунки, школьники придут к выводу, что площадь прямоугольника не зависит от положения переменной точки, а для нахождения экстремального значения его периметра придётся воспользоваться сведениями из алгебры и анализа. В этом случае полученное аналитическое выражение помогает не только выдвинуть гипотезу, но и обосновать её. Но программа и тут поможет.

Уроки с использованием этой программы велись в компьютерном классе. Была установлена локальная сеть, школьники получали задачу по этой сети с учительского компьютера. Окончательно они доделывали задачу дома и предъявляли её решение в виде вордовского файла. Дома они также могли использовать эту программу, демоверсией которой можно пользоваться на протяжении одного месяца с момента скачивания.

Эффективно и выразительно эта программа помогала в решении геометрических задач разных типов, особо отмечу задачи на установление траектории и восстановление фигуры по точкам.

Методика составления задач (а их составлено всего порядка 60) такая же, как и при составлении задач с применением «Живой математики».

Любопытно, что с помощью этой программы можно решать и некоторые текстовые задачи, прежде всего – задачи на движение. Для этого потребуется по условию задачи составить её геометрический аналог – как это делается, я говорил выше.

Изобразив геометрически ситуацию, заданную условием текстовой задачи, ученики задают некие параметры полученной конфигурации и смотрят, какие её величины можно получить с помощью программы. В случае положительного результата появляется возможность самостоятельно составить разумную текстовую задачу.

Вот пример

Два туриста вышли одновременно – один из пункта A в пункт B, а другой – из B в A. Расстояние между ними равно a. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно повернул обратно. Туристы встретились два раза. Первый раз они встретились на расстоянии m от пункта B. На каком расстоянии n от пункта B они встретились второй раз?

Создаём геометрическую модель этой ситуации. Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB – расстояние. Отрезок AD показывает время второго туриста на всем пути (будем считать – для некоторого удобства – что каждый из них финишировал там же, где начал движение). Узлы: точка K соответствует месту, в котором туристы встретились первый раз, точка L – месту, в котором туристы встретились второй раз. Точки P и M соответствуют моментам поворота и начала движения в обратную сторону, точка Q – моменту завершения пути туриста, вышедшего из пункта A. Тангенсы углов α и β равны скоростям туристов.(Рис. 124)

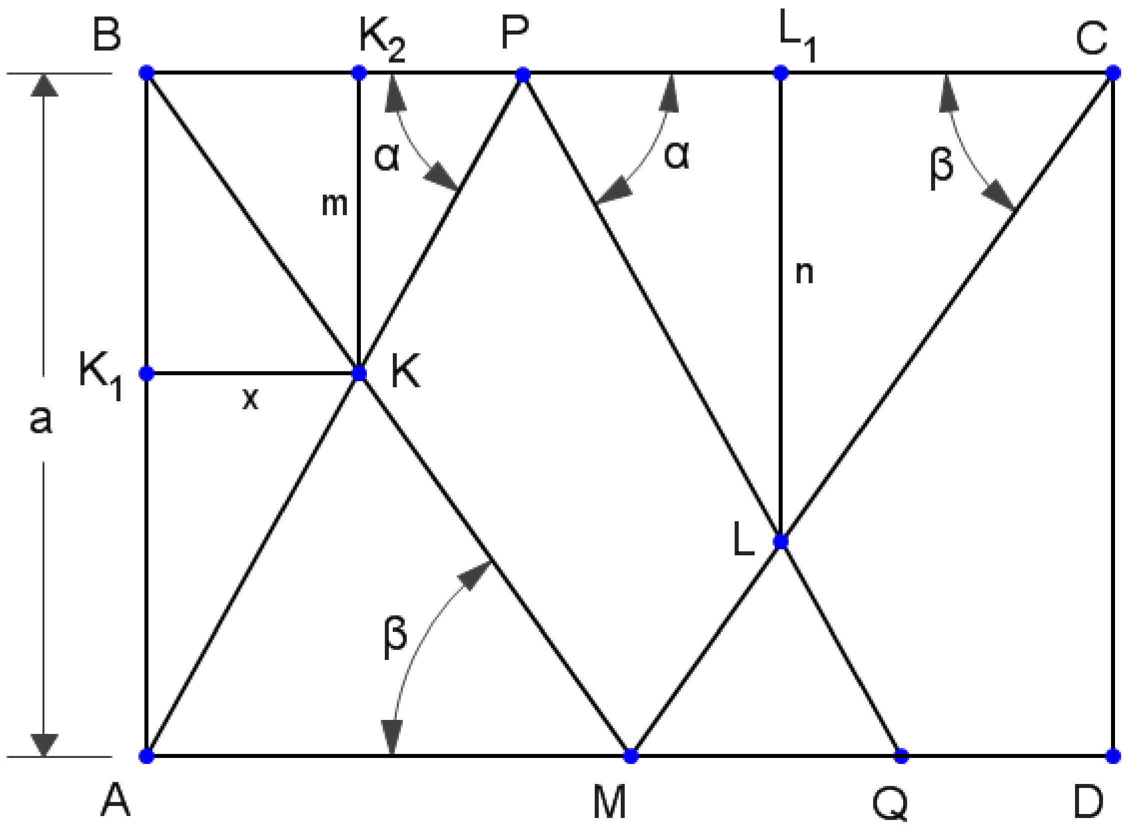


Рис.124

Программа показывает, чему равно значение *n*, то есть на каком расстоянии от пункта *B* произошла вторая встреча.

*****

Программа Nspire недавно создана в Teksas Instruments и является новой для России. Её возможности шире, нежели у «Живой математики» за счёт подключения работы с аналитическими выражениями.

На международном семинаре по знакомству с программой Nspire (проведённому в Петербурге в июле 2011 года) с её помощью решалась задача о наличии центра симметрии у графика функции $y = x + \cos x$.

Сначала программа вывела на экран график этой функции (рис.125).

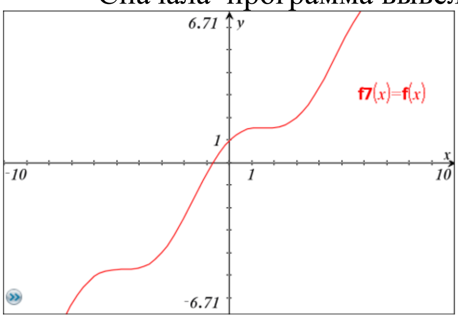


Рис. 125

Сначала был выбран «алгебраический» путь.

В левом столбце показано то, что мы вводим сами (здесь и далее). В правом столбце то, что выдаёт программа по нашим командам.

$f(x):=x+\cos(x)$	*Done*
$f(a+x)+f(a-x)$	$\cos(x-a)+\cos(x+a)+2\cdot a$
$g(x):=f(a+x)+f(a-x)$	*Done*
$g(x)$	$\cos(x-a)+\cos(x+a)+2\cdot a$
$\mathrm{tExpand}(g(x))$	$2\cdot\cos(a)\cdot\cos(x)+2\cdot a$
$\mathrm{solve}(2\cdot\cos(a)=0,a)$	$a=\frac{(2\cdot \boldsymbol{n1}-1)\cdot\pi}{2}$
$g(x)\vert a=\frac{\pi}{2}$	π

В правом столбце стоит удвоенная ордината центра симметрии. Программа выдала как координаты центра симметрии точку ($\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$).

Затем был выбран «геометрический» путь

$h(x):=x+\sin(x)$	*Done*
$h(^{-}x)$	$^{-}\sin(x)-x$
$h(x)+h(^{-}x)$	0
$h\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos(x)+x+\frac{\pi}{2}$
$h\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}$	$\cos(x)+x$

Сравнивая результаты в левом и правом столбце, видим, что исходную функцию (она в последней строке в правом столбце) программа отождествила с нечётной функцией $x+\sin x$

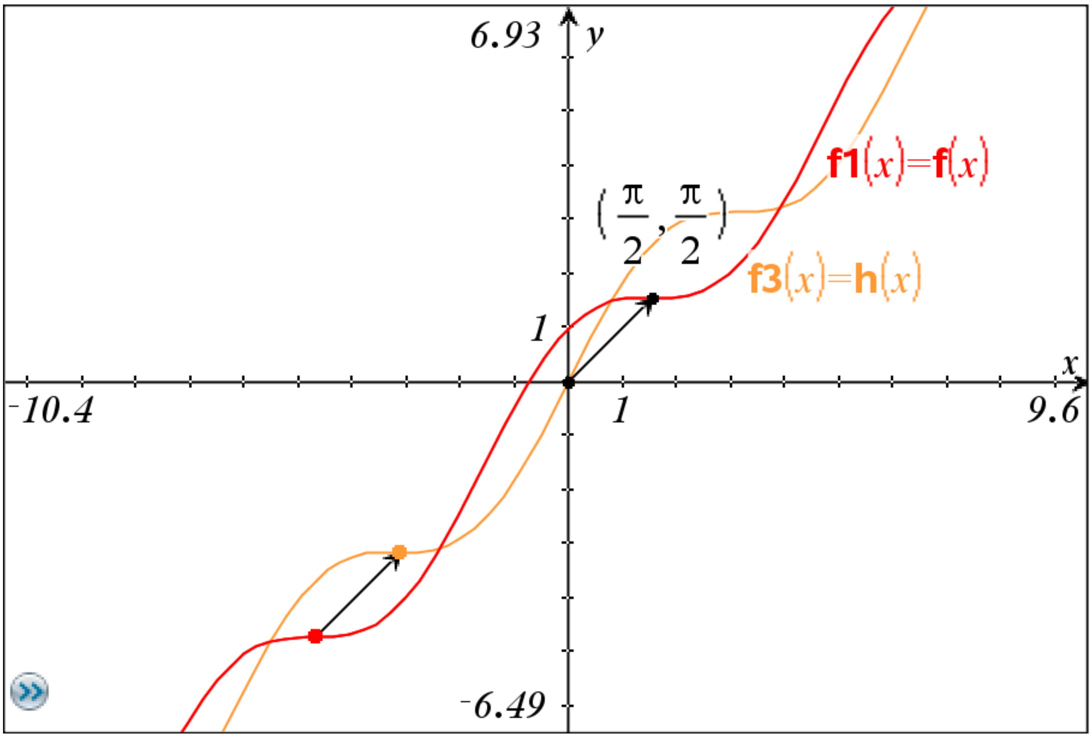


Рис.126

Программа выдала два графика. (Рис.126)

Эта картина показывает, что один из графиков получается из другого наклонным сдвигом (параллельным переносом) на вектор ($\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$). В результате центр симметрии одного графика переходит сдвигом в центр симметрии другого графика. Вектор сдвига указан стрелкой. Видны его координаты -($\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$). Нумерацию функций программа устанавливает сама.

Далее был выбран «функциональный» путь. Была найдена производная, упрощена и затем было найдено условие, при котором она тождественно равна нулю. Полученные точки могут выдать абсциссу центра симметрии графика.

$\frac{d}{dx}(g(x))$	$^{-}\sin(x-a)-\sin(x+a)$
$\mathrm{tExpand}\left(\frac{d}{dx}(g(x))\right)$	$^{-}2\cdot\cos(a)\cdot\sin(x)$
$\mathrm{solve}(^{-}2\cdot\cos(a)=0,a)$	$a=\frac{(2\cdot \boldsymbol{n3}-1)\cdot\pi}{2}$

Затем была проведена работа со второй производной.

$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$^{-}\cos(x)$
$\mathrm{solve}(^{-}\cos(x)=0,x)$	$x=\frac{(2\cdot \boldsymbol{n1}-1)\cdot\pi}{2}$

Осталось убедиться в том, что найденные точки действительно являются центрами симметрии. Программа выполняет это задание, сопоставив все полученные результаты.

На уроках геометрии в 8 классе. Удалось рассмотреть несколько типов задач, которые подходят для того, чтобы эффективно использовать Nspire. Это, во-первых, экстремальные задачи, во-вторых, задачи на построение, причём бывают задачи на построение по форме (например, построить равносторонний треугольник) или задачи на построение экстремальной фигуры (например, надо построить траекторию с наименьшей длиной при заданных условиях).

В таких задачах был найден любопытный методический ход. Обычно задачи на построение статические – например, построить треугольник, вписанный в окружность. Мы эту задачу интерпретировали иначе - искали траектории внутри круга, которые обеспечивают нужную форму. Мы говорили: «Вот точка на окружности, теперь надо найти ещё две точки на окружности, чтобы траектория движения от первой точки ко второй, от второй к третьей и от третьей к первой была, во-первых, замкнутой ломаной, во-вторых, имела нужную форму, либо ограничивала экстремальную фигуру, по периметру или по площади». В чём достоинство этой задачи? Во-первых, задача из статической стала динамической. Первая точка фиксирована, а вторую точку ученики ставят на окружность и начинают её двигать, проверяя выполнение условий.

При этом решение задач на построение вписывается в общую структуру задач о бильярдах, которые имеют в математике очень большое содержание. Траектории в прямоугольном бильярде, или в круглом, или в эллиптическом, были предметом серьёзных математических исследований.

Задачи на нахождение траектории не всегда бывают простыми. Приведу такой пример. Мы искали в квадрате траекторию, имеющую форму равностороннего треугольника, которая возвращает движущуюся точку в первоначальное положение. Если точку взять в вершине квадрата, то поиски такой траектории труда не составляют. Но если взять точку на стороне квадрата, это уже не так просто.

Чрезвычайно существенен ещё один тип задач, который хорошо может быть показан с помощью Nspire – это задачи на восстановление фигуры по точкам. Например (я нарочито беру самые простые примеры): был треугольник, мы отметили середины сторон и стёрли треугольник. Предлагаем ученикам восстановить треугольник по оставшимся серединам сторон.

Почему существен такой вариант задачи на построение? Потому что мы тем самым избегаем исследования, ибо не встаёт вопрос о существовании фигуры, которую надо восстановить. Треугольник-то был в самом начале! Правда, ввиду того, что способы восстановления могут быть разные, вопрос о числе решений остаётся по-прежнему.

Задача на восстановление фигуры по точкам имеет очень любопытный исторический аналог. Мы взяли описания опытов, которые проводились физиками, таких опытов, за каждый из которых авторы были удостоены Нобелевской премии.

Первый опыт – это опыт Резерфорда. Резерфорд получил на экране картину из некоторого множества точек. Разглядывая это множество точек, Резерфорд пришёл к планетарной модели атома. Второй пример – это открытие двойной спирали. Рассматривая картину, которая была получена в результате рентгеноструктурного анализа молекулы ДНК (эта картина была показана ученикам, как и картина Резерфорда), была найдена идея пространственной спирали. И, наконец, сравнительно недавний эксперимент Д. Шехтмана по теме, связанной с квазикристаллами. Там наблюдали некое множество точек. Рассматривая его, обнаружили поразительное явление: поворотную симметрию пятого порядка, которая невозможна, как считалось ранее, для неживой природы. (Рис.127)

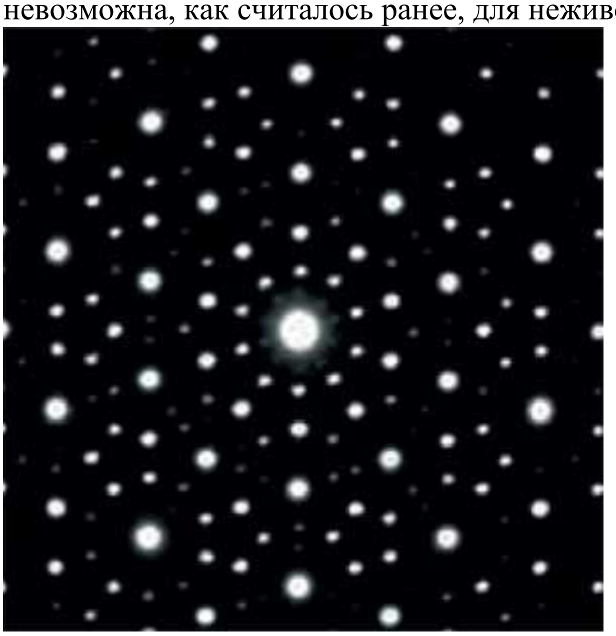


Рис.127

(На рисунке 127 – проекция пространственной структуры на плоскость .)

После того, как мы показали ребятам эти три примера, мы сказали: «Видите, наблюдение за множеством точек может привести к получению Нобелевской премии». Это была шутка, конечно, но после этого была предложена геометрическая задача, в которой предлагалось найти многоугольники, вершины которых находятся среди полученного на экране множества точек. Школьники должны были увидеть вершины, например, квадрата…» Задача была такая: в правильном двенадцатиугольнике провели все диагонали.

Оказалось даже, что какие – то точки пересечения этих диагоналей лежат на логарифмической спирали.

Кроме того, мы с учениками решали задачи на минимакс. Например (в шутливой форме). Торт имеет форму правильного треугольника, играют Малыш и Карлсон. Малыш ставит произвольную точку, а Карлсон делает разрез так, чтобы отхватить себе больший кусок торта. Вопрос – как Малыш должен поставить точку, чтобы обеспечить себе максимально при этих условиях возможный кусок?

Мы решали также задачи на построение салфетки Серпинского, снежинки Коха, тем самым познакомив школьников с понятием фрактала.

В традиционных задачах на построение, кроме этапа исследования, о котором я говорил, есть этап доказательства. И если ученики видели, что среди точек пересечения диагоналей правильного двенадцатиугольника есть вершины квадрата, то доказывать это можно было компьютерными средствами: проверять равенство сторон и наличие прямого угла.

Был и другой путь. Ранее мы знакомили учеников с понятием элемента симметрии той или иной фигуры. Например, в равностороннем треугольнике есть ось симметрии и есть центр поворотной симметрии на 120 градусов. И всё это проверялось с помощью компьютера. Программа преобразовывала фигуру указанной ей осевой симметрией (поворотом) и было видно, что треугольник совмещается . Аналогичная работа проводилась с квадратом.

В задаче про двенадцатиугольник можно было рассматривать поворот на 90 градусов четырёхугольника, « подозрительного на квадратность», вокруг точки пересечения его диагоналей. Если в результате такого поворота он самосовмещается, значит, имеем дело с квадратом. Без компьютера такой способ в 8 классе невозможен. Это первое.

Второе – требуется выяснить сколько решений имеет задача? Получались разные по положению квадраты, среди которых есть равные и не равные. Трудность состояла в том, что школьникам известны признаки равенства только для треугольников, потому равенство квадратов с одинаковыми сторонами – под вопросом.

И тогда мы предлагали найти движение, которое первый квадрат переводит во второй. И если школьники находили такое движение, то квадраты оказывались равными. Как это сделать без компьютера – непонятно.

В заключение – некоторые общие соображения об использовании компьютера в математическом образовании школьников – осмысление собственного опыта почти двух десятилетий.

Его осмысление привело меня к такой картинке (рис. 128).

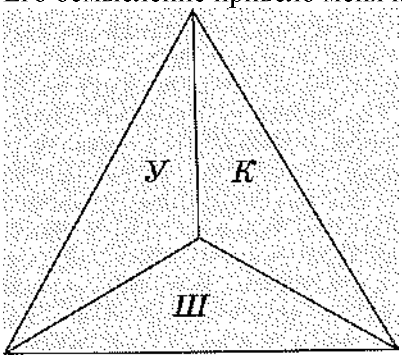


Рис. 128

Она отражает, попросту говоря, список «действующих лиц» в образовательном процессе:
Ш — школьник, У — учитель, К — компьютер (список явно неполон, но для нашей проблематики достаточен). Мне удалось увидеть некие связи между «действующими лицами», и я попытаюсь их проиллюстрировать собственным опытом.

1. Учитель — компьютер

Часто спрашивают коллеги: «А зачем вы всё это делаете? Я без компьютера это могу делать». Для того, чтобы отвечать на этот вопрос, для того, чтобы была уверенность в собственных действиях, я сформулировал для себя некоторые утверждения, которые называю постулатами.

Первый постулат. *Математическое образование – многогранная интеллектуальная деятельность не только логика, не только строгая дедукция, но это ещё пространственное мышление, это ещё работа интуиции, формулировка гипотез, много чего ещё.*

И всё это важно для развития ребёнка.

Второй постулат. *Математика – наука экспериментальная.*

Коль скоро математику можно считать наукой экспериментальной (Д.Пойа, В. Арнольд) , коль скоро при изучении математики экспериментирование как таковое приветствуется (Д.Пойа), вполне естественно внедрять его в арсенал дидактических средств.

Третий постулат. *Компьютер играет ту же роль в математическом образовании, какую играет прибор для занятий физикой.*

Любой прибор предполагает наблюдение. И может отвечать на достаточно серьёзные вопросы. Аналогично отношение у физика к любому прибору: если осциллограф показывает некую кривую, то либо его показания используются для дальнейшего, либо начинаем думать, а почему он показывает именно такое?

Четвёртый постулат. *Компьютер многократно увеличивает возможности и роль математического эксперимента.*

Компьютер может быть использован во всех видах интеллектуальной деятельности школьника: учебной (вычисления, построение графика и пр.), исследовательской (формулировка гипотезы и пр.) и критической (проверка гипотезы, поиски доказательства). В последнее время появилась ещё проектная деятельность. Проектную деятельность я вижу как симбиоз этих трёх видов деятельности.

Экспериментальные действия при изучении математики поощрялись издавна. Например, рекомендовалось организовать проверку (на листе бумаги с помощью транспортира) теоремы о сумме углов треугольника. Реально у детей в таком «бумажном» эксперименте 180 градусов почти никогда не получается – сам проверял. Понятно далее, что число реальных экспериментов конечно - как-то я проверял с учениками получение приближённого значения π в игре Бюффона – было сделано порядка 1000 бросаний иглы на клетчатую бумагу.

Компьютерный эксперимент в геометрии, основанный на динамической иллюстрации меняет ситуацию принципиально, так как имеет континуальный (психологически) характер. Потому он убедителен. Но насколько? Можно ли считать полученный результат доказанным?

Возьмём ситуацию – компьютер показывает, что «как ни гоняй» треугольник по экрану, меняя его вид, сумма углов всегда 180 градусов – надо это затем доказывать или не надо?

Ответ на этот вопрос упирается, в частности, в толкование термина «доказательство». Хотя бы доказательство в математике. Хотя бы в её начальном преподавании.

Подчеркну особо значение компьютера для критической деятельности. Например, ученик может полагать, что треугольник с большими сторонами имеет большую площадь - компьютер обнаружит это заблуждение.

Наконец, компьютер может выдать неожиданный результат. В моём личном опыте было такое - компьютер вывел прямую Симсона за исходную окружность, о чём я вначале не подозревал. .

Пятый постулат. *Есть два равноправных уровня работы с компьютером: уровень пользователя уровень теоретика (названия условные).*

Вообще говоря, эти два уровня необходимо присутствуют и в таком курсе математики, когда он вовсе не использует компьютер. Есть факты, которые принимаются учеником на уровне пользователя (свойства вещественных чисел; факты из геометрии, основанные на аксиомах порядка) , есть и такие, которые принимаются на уровне теоретика (когда доказательство логически выдержано) .

Примерно то же самое происходит, когда используем компьютер. Например, если ученики обнаружили экспериментально группу симметрии квадрата , то мы как пользователи двигаемся дальше, используя полученный результат для решения задач. Но если нас интересует, почему так происходит (как это доказать), мы переходим на уровень теоретика.

Шестой постулат. *Результат, полученный с помощью компьютера, можно в определённых случаях считать доказанным.*

Сами математики полагают , что доказательство – понятие неформальное, оно из психологии. Известный специалист по математической логике В. Успенский прямо пишет, что толком ничего не доказать даже про натуральный ряд. Если толковать изображение на дисплее именно как проверку истинности некоторого утверждения, то результат, проверенный с помощью компьютера и принятый нами, имеет смысл считать доказанным.

На худой конец, дабы не дразнить иных поборников строгости, принятый нами результат компьютерного эксперимента можно назвать доказательством компьютерным (в отличие от дедуктивного или рационального).

Можно предложить и специальные договорённости, в каком случае результат манипуляций с компьютером считать доказанным. Именно, если:

– результат получен сначала в частном случае;

– обобщение сформулировано на основе полученного результата;

– последовательность шагов при доказательстве общего утверждения такая же, как при доказательстве частного утверждения;

– ситуация, смоделированная в программе, адекватно отражает условия, которые содержатся в общем утверждении;

– использование программы позволяет проверить полученный результат на континуальном (психологически) уровне.

Эти условия можно иллюстрировать на простом примере: графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс.

Седьмой постулат. *Возможности, которые появляются в школьном математическом образовании при использовании компьютера, оправдывают временные затраты, необходимые при этом.*

Временной фактор существен, на работу с учениками в дисплейном классе специально отведённого учебного времени в моей работе не было. Приходилось эти уроки (1 час в неделю) проводить в рамках принятой сетки часов. Особенно показательно преподавание основ анализа в выпускном классе; на прохождение основного курса вместо 5 часов в неделю оставалось 4 часа. Пятый час был использован сугубо для освоения программы Geometry Expressions и решению специально подобранных задач (разумеется, соответствующих программе, но не связанных напрямую с текущим материалом).

На результатах школьников в выпускном классе такое «отступление от нормы», видимо, не сказалось. Более определённо судить не берусь, ибо установить это однозначно в реальном преподавании попросту невозможно. Все выпускники достойно справились с экзаменом в формате ЕГЭ.

Восьмой постулат. *Использование компьютера сближает теоретическую и прикладную математику.*

Скажу иначе (чтобы никого не раздражать): происходит сближение теоретического и прикладного аспекта математической науки. Такое сближение демонстрирует «математику с человеческим лицом», делает математическое образование более «мягким», придаёт ему гуманитарный оттенок.

Замечу тут же: вопрос "почему" интригует детей больше, чем "откуда это следует?". Может быть, это происходит потому, что причинно - следственные связи ближе к реальной жизни, чем формально - логические?

Эти постулаты позволяют чётче разобраться в педагогических проблемах, порождённых использованием компьютера в математическом образовании. Что, собственно, меняется в работе учителя, использующего компьютер? Ответ будет длинный.

Меняется содержание теоретического курса.

Убеждён, что со временем использование компьютера изменит не только технологию, но и содержание школьного курса математики. То, что я делаю в этом направлении – только первые шаги в эту сторону.

Я уже упоминал об изучении в старших классах алгебраических кривых степени выше второй и трансцедентных кривых, знакомство восьмиклассников с фрактальными кривыми..

В восьмом же классе ученики знакомились с элементами симметрии, подходя к понятию группы симметрий.

Но было бы странно, если бы ученики смотрели на компьютер как на фокусника. Пусть, к примеру, компьютер выдал все решения уравнения пятой степени. Я не знаю, как он это сделал, могу только предполагать, но я объясню ученикам, как он мог бы это сделать. Если эту мысль развернуть, то несложно представить появление в школе курса «компьютерной математики», ориентированной на то, чтобы работа компьютера (ещё раз оговорю — программных средств) не была для школьников загадкой. Потребуется хорошо рассказать детям об алгоритмах, итерациях, приближениях, погрешностях и т.д..

Меняется содержание заданий. В самом деле, нужно ли в прежнем объёме обучать решению уравнений, нахождению производной, вычислению интегралов, построению графиков, прочим сугубо техническим умениям, если всё это за пару секунд — время набора задания на клавиатуре — «делает» компьютер? Если и да, то недолго.

В идеале надо подобрать такие задания, в которых беспомощны как школьник без компьютера, так и компьютер без школьника. Мне нравится говорить о сочетании «белкового и компьютерного интеллектов», приведу примеры.

1. Сходимость ряда (бесконечная убывающая геометрическая прогрессия) или расходимость ряда (гармонический ряд) можно показать в вычислительном эксперименте, рассмотрев их частичные суммы, скажем для 100 слагаемых, а затем уже доказать.

2. Появление множества точек (геометрического места точек) определённого свойства можно рассматривать как становление определённой траектории движущейся точки (конические сечения). В традиционном преподавании геометрии такая возможность почти исключена. А если ещё добавить возможности Интернета….

Отмечу невиданные ранее возможности, когда геометрические фигуры как бы живут самостоятельной жизнью, когда с ними происходит нечто в динамике. В первую очередь выделю задачи на бесконечные процессы. То, что в них задаётся, «по определению» невозможно обозреть во всём объёме в «бескомпьютерной технологии», где мы можем воспринимать только отдельные фрагменты бесконечного процесса. Такие «процессуальные» задачи давно известны и допускают естественную классификацию: процесс может быть непрерывен и его результат представляет собой линию (кривую) и процесс может быть дискретен и его результат представляет собой множество изолированных точек или фигур. Вот примеры.

Непрерывные процессы.

Задачи на геометрические места точек легко формулируются в нужном нам стиле. Вместо слов «Найти геометрическое место точек...» мы скажем: «Найти траекторию точки...» Так можно подать известные в элементарном курсе теоретические задачи (серединный перпендикуляр отрезка, биссектриса угла и т. д.), а также алгебраические и трансцедентные кривые.

Хорошо известны задачи о бильярдах. Движение бильярдного шарика (без учёта сил сопротивления) бесконечно, и его траектория может иметь весьма непростые свойства, но что-то можно увидеть на дисплее. Один из легко формулируемых (но не решаемых) вопросов про бильярдный шар: в каком случае его траектория является периодической?

Дискретные процессы.

Пример: доказать, что число $444..4888..89$ (вместо точек стоит вначале цифра 4, затем – цифра 8, четвёрок на одну больше, чем восьмёрок) является точным квадратом. Последовательно увеличивая разрядность в этом числе, можно сформулировать гипотезу, она проверяется на компьютере, после чего переходим к её доказательству.

Бесконечное дискретное множество точек возникает при нахождении длины окружности и площади круга в процессе вписывания правильных многоугольников.

Напоследок замечу, что в задачах «на процессы» прямо или косвенно присутствует фактор времени.

Меняются акценты в преподавании. Становится важным не только то (а может быть, просто не то), что было таковым ранее. Вот нарочитый пример. Пусть надо решить уравнение $x^2=1000x$. Предположим, школьник выводит на экран графики левой и правой частей. В обозримых пределах окна дисплея (например, от -5 до 5) он увидит одну только точку их пересечения, соответствующую $x = 0$. Чтобы найти другую точку их пересечения, соответствующую $x = 1000$, он должен знать или предполагать, что она существует.
В более замысловатом примере к аналогичному знанию ещё надо придти. Значит, важно откуда-то знать, сколько корней имеет данное уравнение, а потому при изучении свойств функций требуется повышенное внимание к исследованию их монотонности и поведению на бесконечности.

Ещё пример — очень сильный. Пропадает необходимость в решении неравенств типа $f(x)>0$, ибо для этого достаточно иметь график функции f и по нему уже отыскать на экране её нули — дальнейшее очевидно.

Можно ли освободить ученика от владения техникой? В принципе нет, но в таком объёме, как она требуется сейчас - бесспорно.

И теорию равносильности, и получение ответов типа $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (я уже не говорю о монстрах вида $x = 1g_3 7$) можно спокойно похоронить, если работаешь с компьютером. Такого рода записи чисел важны в некоторых теоретических вопросах, например: число вида $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ взято из золотого сечения. И только. Ученик должен владеть методом разве что в простейших ситуациях . Но виртуозность в решении фантастических уравнений — это в конечном счёте «выкинутые на воздух деньги налогоплательщика». И сколько детского времени убито впустую...

Меняются методические приемы учителя. Появляются новые проблемы: что и когда доверить компьютеру, а что делать «вручную»?

Пример 1. Одно дело — я в 8 классе показываю, как по формуле решается квадратное уравнение, и понятно, некоторое число таковых (какое?) ученик должен решить ручкой на бумаге. Другое дело — на выпуске из школы он может позволить себе для такого же уравнения роскошь нажатия кнопок на клавиатуре компьютера. Так в какой момент «переключать рубильник»?

Пример 2. Решается уравнение $e^{\sqrt{x}} = 2$. Компьютер выдаёт ответ в виде десятичной дроби. Этого достаточно? Не надо ученику писать, что $x = (1n2)^2$? А если компьютер показывает периодичность графика и в качестве периода выдает нечто вроде 1,5707863... - кого это устроит?

Замечу, что решение таких маленьких, чисто методических задач идёт постоянно, а потому — размышляешь, пробуешь, ошибаешься и радуешься, когда попадаешь в точку,— в конечном счёте обогащается профессиональный опыт.

2. Школьник — компьютер

Как должен восприниматься компьютер школьником? К учителю математики школьник имеет (по части математики) доверие практически безграничное. С компьютером так не получается, ибо компьютер может выдать нечто странное. Поэтому полезно иметь предвосхищение результата – что должно быть? Если полученный результат соответствует ожиданиям, то появляется уверенность в его истинности, а если нет ожидаемого соответствия – придётся проверить разумность предположения.

Вот примеры из опыта моих учеников, когда программы были далеки от совершенства.

1. При решении уравнения $\sin x = 0$ на промежутке [10; 20] компьютер выдал не все ответы.
2. При решении уравнения $(1 + \cos x)(\operatorname{cosec} x - 1) = 0$ компьютер выдал в качестве одного из корней число 71.
3. При решении уравнения $1\text{og}_2 (x + 5)\, 1\text{og}_3 (3-x)\ \sqrt{(x+5)(3-x)} = 0$ компьютер выдал один из ответов такой: $x = -5$.
4. При решении уравнения $x + \sqrt{x(-5-x)} = 1$ компьютер не выдал корень -0,5.
5. При вычислении предела $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+5}}$ ответ был выдан вовсе странный, именно $\sqrt{3}$.

В дальнейшем подобные огрехи компьютерных программ вроде бы исчезли, но проблема осталась. Экран дисплея – множество дискретных точек. Существует неустраняемая погрешность. Влияет ли она на результат, и если да, то на какой? Иногда полученному результату доверять нельзя, в частности – когда речь идёт о вычислениях. Например - задача Эрдёша, о сравнении двух отрезков в круге. Я сейчас не буду уточнять, что это за отрезки, а вопрос задачи – какой из этих отрезков длиннее. Если измерять длины с одним или двумя знаками после запятой, то получится, что эти длины одинаковы. А на самом деле они различны. Встаёт вопрос: что должен делать в этой ситуации ученик? Откуда он знает, что нужно повышать количество знаков после запятой?

Ещё пример. Пусть требуется построить в стандартном окне (от -10 до 10 или что-то подобное) график функции $y=1 / (x\text{-}1000)$, И что же увидим? Прямую...

Ещё пример. Компьютер выдает рисунок. Если это график функции и экстремумы толком «не видны» (например, график $y = \sin(1/x)$ вблизи нуля). Ученик должен разбираться в экстремумах уже без компьютера.

Что изменится для ученика, когда он начнёт работать на уроке математики, используя компьютер?

Ученик вынужден освоить, хотя бы в зачатке, экспериментальную методологию, коль скоро он вступает в диалог с компьютером. Придётся учиться грамотной постановке вопроса; ученик почти вынужден предвидеть, осмыслить и верно истолковать полученный результат; ему желательно понимать, как компьютер мог бы решить данную задачу,— всё это приводит к росту математической культуры.

Программные средства разнятся и совершенствуются. Поэтому важно усвоение общей компьютерной идеологии, понимание того, что и как компьютер делает в принципе, независимо оттого, с каким конкретным программным обеспечением имеем дело.

Громадное значение для развития пространственного мышления имеет динамическая картина, возникающая на дисплее. А если эта картина появляется ученику в результате его собственной работы с компьютером, то улучшается понимание, поскольку понятно её происхождение.

Ученик должен овладеть искусством «прикидки»: на дисплее ещё нет графика, а ученик уже должен его «видеть». Именно «видеть», а не строить, иначе пропадает весь смысл работы с компьютером. Тренировке такого «видения» стоит посвятить много времени. Задание выглядит так: ученикам дается ряд функций, за определённое (весьма небольшое) время они должны нарисовать эскизы их графиков, а затем проверить полученные результаты с помощью компьютера.

Школьник — учитель

Какие же возможности дает компьютер для учителя в работе с учеником?

Оперативный контроль. Имея заранее готовые батареи тестов, введённые в компьютер, можно практически моментально определять уровень знаний и умений учеников и отыскивать в них пробелы.

Электронный учебник. Такой учебник не является механическим перенесением на экран дисплея некоего теоретического текста. Напротив, он может моделировать деятельность любого учителя. Теорема Пифагора, к примеру, появляется перед школьником не как пункт или параграф теории, а в живом представлении, таком, которое устраивает конкретного учителя, ведущего урок на эту тему. Но при этом к любому учебному фрагменту ученик может получить доступ, когда захочет и сколько угодно раз. Понятно, какое значение этот фактор может иметь для детей, пропустивших занятие, и тем более для тех, кто долгое время не имеет возможности ходить в школу.

И в теоретической части курса компьютер позволяет оживить перед школьником мир геометрических фигур, причём показать их происхождение, становление в динамике. Например, квадрат получается движением отрезка параллельно самому себе в соответствующем направлении. Я полагаю, что с помощью компьютера можно выстроить особый курс геометрии («динамическая геометрия»), который будет более близок ребёнку особенно в начале курса.

Компьютер позволяет учителю эффективнее организовать исследовательскую деятельность школьника.

Случалось и так, что ученики самостоятельно придумывали темы для достаточно оригинальных исследований — математических или программистских.

Пример 1. Требуется выяснить, как влияет на график функции появление некой «добавки» (пусть другой функции). Предположим, мы хотим заняться функцией $e^x \sin x$. Стоит задать вопрос - а что в этой функции сохранится от e^x и что - от $\sin x$?

Пример 2. «Навешивание модуля» на переменную или на саму функцию, Пусть мы имеем n линейных функций: $f_1, f_2, \ldots f_n$. Рассмотрим теперь такую: $|f_1| + |f_2| + \ldots + |f_n|$. Требуется найти зависимость числа точек излома графика этой функции от n.

Пример 3. На дисплее роза с уравнением в полярных координатах $r = \sin k\varphi$ при k иррациональном закрашивает весь экран полностью. Так ли это на самом деле?

Довольно тонкое место — использование компьютера на самостоятельных, контрольных и экзаменационных работах. Не разрешать? А зачем же тогда учились этому? Разрешить? А что скажет «Марья Алексеевна»?

Диалог с учеником. Школьника уже не интересует, правильно ли он решил уравнение, его вопросы становятся куда более содержательными и гораздо более «математическими».

Педагогические аспекты.

Использование компьютера в интерактивном режиме обеспечивает высокую степень индивидуализации, то есть способствует гуманизации математического образования.

Компьютер убирает страх перед математикой у иных учеников. Даже «слабые» ученики могут самостоятельно вести наблюдение и обсуждать увиденное. Из пассивных или почти отключённых от процесса добывания знаний они в какой-то степени превращаются (хоть немного) в активных его участников.

Результатом исследовательской работы школьника является решение им определённой задачи, в которой была возможность продвинуться достаточно далеко. Сделанную работу требуется соответствующим образом оформить – этому тоже приходится учить.

Мне ученики представляют свои решения в виде вордовского файла, сопровождая его рисунками, взятыми из программы.

Иногда школьнику имярек не хватило «пороху», чтобы продвинуться достаточно далеко в поставленной задаче. Но при этом видно, сколько старания он проявил, причём хотел сделать работу более красивой. Этого нельзя не учитывать при выставлении отметки.

И в заключение более общие соображения об использовании компьютерной технологии.

1. Использование компьютера в школе является откликом на возникновение « компьютерной цивилизации» и, тем самым, важно для среднего образования в целом.

Что такое компьютер в общем контексте достижений цивилизации? В конечном счёте – ещё одно устройство, которое позволяет нам сэкономить время. На что употребить оставшиеся часы? Если на математику, то имеет смысл заняться изучением многих важных вещей, которые компьютеру не под силу или не нашедших до сих пор достойного места в школьной программе. Ещё проще отвести освободившиеся часы на геометрию.

Но, быть может, с более общих позиций, сократить учебную нагрузку ребёнка и дать ему возможность самому распорядиться оставшимся временем? Говоря это, я наступаю на собственное горло — вот бы рассказать детям что - нибудь этакое. Но не лучше ли дать им возможность поваляться на травке? Хотя бы один час в неделю, отнятый от регламентированного образования, оправдает те громадные расходы, которые делаются всем миром для совершенствования компьютеров,

2. Со временем использование компьютера станет привычным в школьном деле, поэтому хорошо бы вписать его в педагогическую систему «компьютер, учитель, ученик».

Но что изменилось по сути? Появилась какая – то другая математика? Такое использование компьютера поставило много вопросов. Что позволительно?

Новые способы решения задач? Новые приёмы доказательства? Как соединить компьютерные технологии, в том числе использование Интернета, с многовековым опытом школьного образования?

Простейший пример: если в руках школьника калькулятор, его не надо его учить таблице умножения?

3. Одна из проблем геометрического образования школьников – проблема доказательства. Тут три аспекта: зачем доказывать, что доказывать и как доказывать?

Первый вопрос, казалось бы странный. Но странность исчезает, если мы видим , какое недоумение и даже интеллектуальное сопротивление учеников приходится преодолевать учителю, когда он дедукцией объясняет наглядно очевидные утверждения. Знаменитое выражение, приписываемое школьнику : «Сначала учитель нарисовал равные треугольники, а потом стал доказывать, что они равны» свидетельствует о психологически обусловленной глубине проблемы. К примеру, зачем учитель доказывает пересечение диагоналей параллелограмма, когда вот он – параллелограмм, и вот она – точка пересечения диагоналей?

Такая реакция школьника порождает порой пропажу интереса вплоть до отторжения предмета в целом

Второй вопрос – что доказывать? К примеру, надо ли доказывать в общем случае такие непростые утверждения как формула площади прямоугольника, существование правильных многоугольников? Весьма часто внимание учеников не заостряется в этих и аналогичных местах. Хорошо известна позиция А.Д. Александрова, академика, автора многих школьных учебников. Её суть в следующем. Доказывать надо по возможности всё (на принятом вначале уровне строгости) . Тем самым утверждается нравственное начало в математическом образовании.

Третий вопрос – каким должен быть уровень строгости при доказательстве. Разумеется, нет смысла излагать начальную школьную геометрию на уровне её оснований. Сомнительно выстраивать частично – дедуктивный курс геометрии , когда что – то доказывается вполне строго, а где – то доказательства опускаются вовсе без упоминания об этом. Пропадает при этом исторически обусловленная суть предмета – дедуктивное построение курса в целом.

В каждом школьном учебнике геометрии просматривается позиция авторов в ответах на эти вопросы. Просматривается она и в конкретной деятельности учителя геометрии. Именно она определяет, какие геометрические утверждения принимаются в учебном процессе с теми или иными доказательствами, а какие – без доказательства и даже без упоминания о его необходимости.

Об аксиоматике

Школьный курс геометрии чаще всего основывается (явно или неявно) на аксиоматике, принятой ещё в «Началах» Евклида. Эта аксиоматика отражает возможности двух инструментов: циркуля и линейки. Исходная аксиоматика Евклида подразумевала циркуль постоянного раствора.

Циркуль и линейка возникли в результате многократного использования в строительном деле и землемерии с помощью натянутой верёвки.

Геометрия может быть построена на разной аксиоматике,

В основу аксиоматики могут быть положены свойства движения или векторов, или расстояния. Известны попытки внедрить такой подход в школьное образование.

Известны также попытки построить школьную геометрию , вообще не упоминая аксиом, лишь на основе известных школьникам фактов из начальной школы.

Даже если школьный курс геометрии использует аксиоматику, она может быть как полной (как в курсе оснований геометрии), так и не полной. Во многих учебниках школьной геометрии среди аксиом отсутствуют, например, аксиомы порядка.

Какова бы не была принятая в школьном курсе аксиоматика, неотъемлемой частью школьного курса геометрии являются соображения, основанные только на наглядности. Например, не принято доказывать утверждение о том, что две пересекающиеся прямые разбивают плоскость на четыре части.

Итак, аксиоматика школьного курса геометрии:

1. частично обусловлена использованием инструментов в процессе реальной деятельности людей.
2. может быть разной, притом использующей принципиально иные подходы.
3. может быть неполной, что обусловлено различиями научного и педагогического контекста.

О доказательстве

Чрезвычайно важно для школьного математического образования практически приемлемое толкование термина «доказательство».

Такое толкование возможно, если понять, какую роль оно играет в образовании.

Доказательство в процессе образования играет двоякую роль.

Одна роль – это проверка собственных предположений, возникших под влиянием разных причин: работы интеллектуальной интуиции, формулировки обобщений, формулировки обратных утверждений и т.д.

Вторая роль – это способ убедить предполагаемого оппонента

(ученика, учителя) в собственной правоте – при решении задачи, при ответе на возникающий вопрос и т. д.

Доказательство как способ проверки и способ убеждения существенно зависит от того, кому предназначено доказательство и в какой ситуации это происходит.

Сообразно этому, необходимо различать несколько

уровней доказательства:

1) светский (достаточный для общекультурной составляющей математического образования) ;

2) пользовательский (достаточный для тех, кто собирается использовать математическое образование как вспомогательную составляющую в собственной профессиональной работе);

3) теоретический (достаточный для погружения в математическую науку).

Первые два уровня допускают использование в геометрическом образовании идеологии прикладной математики.

В рамках этой идеологии возможно использовать соображения наглядности, непрерывности, разного рода симметрий, компьютерный эксперимент.

В начале школьного курса геометрии доказательство часто имеет конструктивный характер.

Именно. решаются задачи на построение (например, построение параллельных или перпендикулярных прямых), но построение фигуры с заданными свойствами не что иное, как доказательство существования этой фигуры,

Построения – доказательства опираются, в свою очередь, на основные построения, как – то проведение отрезка (прямой), откладывание угла и т.п. Основные построения есть не что иное, как перефразированные аксиомы. которым придан алгоритмический характер.

Построения – доказательства проводятся с помощью циркуля переменного раствора и линейки (без делений). Возможны также задачи на построение, решаемые одним только циркулем или одной только линейкой, или двусторонней линейкой, или линейкой вместе с фиксированным кругом. При другом наборе реальных инструментов возможна другая аксиоматика, в которой, к примеру, решалась бы задача трисекции угла. Ещё один пример – метрическая система аксиом, фиксирующая меры для отрезков и углов, тем самым неявно фиксирующая измерительную линейку и транспортир.

Решение задачи на построение представляет собой алгоритм (или алгоритмическое предписание).

По сути своей построение в планиметрии – это не только доказательство существования определённой фигуры, но также и реализуемости соответствующего алгоритма.

Итак, просматривается такая цепочка:

1. Работа с реальными инструментами породила аксиоматику.
2. Аксиоматика нашла адекватное отражение в основных построениях.
3. Основные построения являются базой для решения разнообразных и многочисленных задач на построение.
4. Построение фигуры является конструктивным доказательством алгоритмического характера её существования.

Тем самым видно, что доказательство в стандартном школьном курсе геометрии зависит от первоначального набора инструментов, используемых на практике.

Об использовании компьютерных инструментов для доказательства

Инструментами, которые используются реально в начальном геометрическом образовании, являются не только циркуль и линейка, но и угольник, а также измерительные инструменты: линейка с делениями и транспортир.. В последнее время в математическое образование как инструмент вошёл компьютер, в первую очередь - программное обеспечение. (Под инструментов вообще имеет смысл понимать устройство, которое помогает при решении той или иной задачи – практической или теоретической.)

Не видно серьёзных логических препятствий тому, чтобы использовать компьютерные инструменты как аксиоматическую основу школьного курса геометрии. Точнее так: можно принимать без доказательства (считать аксиоматикой) такие процедуры, которые содержатся в программе. Например, если программа выдаёт перпендикуляр из точки на прямую, то его существование и единственность могут быть приняты за аксиому. И на основе этих процедур выстроить весь курс школьной планиметрии.

Содержательные рассуждения, основанные на работе конкретного компьютерного инструмента, можно считать доказанными, если при этом обеспечен континуум (психологический) в результате рассмотрения логически всевозможных конфигураций. Например, теорему о пересечении высот (их продолжений) треугольника следует рассматривать для всех видов треугольников, а не только для остроугольного.

Признание психологического континуума достаточным для доказательства порождает использование в учебном процессе соответствующих задач. Такими являются, например, задачи, в которых на дисплее возникает некая траектория – след движущейся фигуры (в частности, точки) .

Континуальность (психологическая) движения фигуры на дисплее имитирует реальное механическое движение соответствующей реальной фигуры, заведомо имеющее континуальный характер, а потому является ещё более убедительным.

Такое построение школьного курса геометрии соответствует

светскому и пользовательскому уровню геометрического образования. Ничто не мешает в случае необходимости перехода на профессиональный уровень. Поводом для этого перехода могут служить известные погрешности в работе компьютерных инструментов. Они могут встретиться в процессе численных выкладок, а также от того, что экран дисплея имеет точечный

(дискретный) характер.

Ясно, однако, что эта ситуация конкретна и находятся в

компетенции учителя.

4. Можно говорить о доказательстве с помощью компьютера не только в геометрии. При изучении основ анализа достаточно часто используется работа с графиками. Тогда утверждение можно считать доказанным, если:

– результат сначала получен в частном случае;

– обобщение сформулировано на основе этого результата;

– последовательность шагов при доказательстве обобщенного утверждения такая же, что и в доказательстве частного случая; – ситуация, смоделированная в программе, адекватно отражает условия, которые содержатся в обобщенном утверждении.

Один только пример. Требуется доказать, смена знака в записи уравнения $y = f(x)$ на $y = -f(x)$ приводит к симметрии графика этого уравнения относительно оси абсцисс. Достаточно привести конкретный пример, например, рассмотреть на компьютере эту ситуацию для уравнения $y = x^2$. Затем обощаем утверждение на произвольное уравнение такого вида.

В образовании, как и в обществе в целом, идёт «ползучая компьютерная революция». Поясню одним забавным примером. В 1997 году на международной конференции в США (в Индианском университете) я рассказывал, как в школе можно использовать Derive. Организаторы спросили, что мне нужно для выступления, я попросил доску, мел и тряпку. В университете началась лёгкая суматоха, не сразу всё это было найдено. По ходу выступления я ощутил чрезвычайный интерес со стороны аудитории и местной прессы, фотографы старались вовсю. Потом только понял, чем он был вызван. Вряд ли содержанием доклада – я, с мелом и тряпкой в руке, был единственным «реликтовым» участником конференции, напомнив собравшимся о «доисторических» временах в образовании. Уже тогда для остальных, собравшихся со всего света, это был вчерашний день образования.

Нам повезло: мы видели, как началась «компьютерная революция». И даже можем поучаствовать в её продвижении – как в тех направлениях, о которых я рассказал, так и в иных, сейчас нам неведомых. Мне ясно, что преподавание математики, скажем, через 100 лет, благодаря компьютеру будет совсем другим. Я убеждён: когда каждый школьник будет иметь выход на компьютер, многие вековые задачи преподавания математики разрешатся чуть ли не автоматически.

И не героические усилия «новаторов», доступные, по мнению чересчур восторженных журналистов, якобы всем, не появление очередного «чудо-метода» (а сколько их было на моей памяти!), не очередные потуги реформаторов образования очередной перетасовкой системы сделать невозможное возможным, а небольшая «железка» — грандиозное достижение человеческого интеллекта сдвинет наше дело от болтовни по поводу к реальным достижениям, как продвинул его в свое время печатный станок. Не раз я слышал, однако: «А если компьютер выйдет из строя, что тогда? Ваш ученик не сможет сделать даже простенькое уравнение!» Вопрос и смешной, и серьёзный одновременно. Почему смешной — ясно. Каждый день где-нибудь ломается телевизор, так его чинят. А серьёзный — потому, что порождает важную методическую проблему: выделение минимального круга математических идей, который даёт достаточно современное представление о математике.

Несмотря на такое отношение к компьютеру, я далёк от мысли, что вместе с ним в школу придёт учительский и ученический рай. Математическое образование станет другим, более человечным, что ли, ибо разные скучные задачи попросту исчезнут... Многие нынешние проблемы преподавания канут в Лету, но появятся новые, не менее сложные. Будут учить другому и иначе — это да. В чём – другому? Как - иначе? На эти вопросы придётся отвечать уже в XXI веке.

Трудно загадывать на будущее и даже безнадёжно предвидеть то, как школьная математика будет использовать компьютерную технологию. Полвека назад её вообще не было! Пока ясно вот что. Она эффективна в символизированной математике (алгебре и анализе) гораздо больше, чем в геометрии. Основа геометрии — мышление образами. Именно потому, что так важна «человеческая» альтернатива компьютерной математике, геометрия становится всё более ценной составляющей в школьном математическом образовании. Впрочем, эта мысль о геометрии не нова. Вот что писал около 100 лет назад американский педагог В. Юнг: «В геометрии, быть может, в большей мере, чем в каком-либо ином математическом предмете, изучаемом в средней школе, представляется возможность достижения всех целей, преследуемых преподаванием математики».

Заключение

Размышляя о «хорошей задаче», я пришёл к такой вот триаде: «увидел, понял, доказал».

Что такое «доказал», я говорить не буду. Но что такое «увидел, понял»?

Вернёмся к задаче о нахождении радиуса шара, описанного около прямоугольного тетраэдра. «Увидел» — в своём пространственном представлении воссоздал такой тетраэдр как часть прямоугольного параллелепипеда. «Понял» — установил связь между центром шара, описанного около этого тетраэдра, и центром шара, описанного около этого прямоугольного параллелепипеда. Эти центры совпадают.

Ещё пример: требуется доказать, что производная от чётной функции нечётна. «Увидел» — перевёл задачу на геометрический язык в виде такого рисунка (рис. 129) . «Понял» — нашёл переход от равенства углов равнобедренного треугольника к равенству модулей тангенсов соответствующих углов, то есть к тому, что противоположны значения производной, сосчитанные в точках *x* и -*x*.

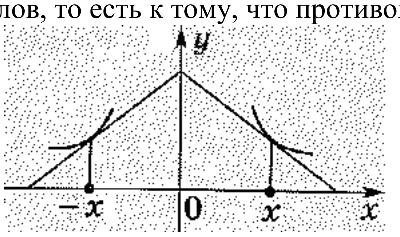


Рис. 129

Впрочем, всё это премудрости школьной математики, и только. Гораздо позже неожиданно для себя я нашёл в этих словах совсем другой смысл.

В одной из фраз А. Эйнштейна есть такое: «...радость видеть и понимать...» В этих словах слились воедино чувство, эмоция и разум — всё то, что даёт человеку возможность открывать: детям — мир и нас, а нам — их.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. В поисках смысла

1.1. Каждый везет свою тачку . . , ... , ... ,

1.2. «АСУ» учителя ....

1.3. Понять, что делаю ....

Глава II. В поисках лучшего

11.1. Начало пути — и сразу проблемы ....

II.2. Стереометрия на векторах ....

II.3. Выход в четырехмерное пространство ....

II.4. О роли векторов *в* школьной математике...

11.5. Векторы и тонкие вопросы школьной математики .....

II.6. Единая математика ....
II.7. О пользе теории множеств...
II.8. Тригонометрические функции через интеграл ....
II.9. О длине окружности и площади поверхности................................
II.10. Такая разная школьная геометрия ....
II.11. Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах
II.12. Логика в школьной математике
II.13. Сориты Л. Кэррола
II.14 Ранняя тригонометрия..
Глава III. О хорошей задаче
Ш.1. «Война» с ОДЗ..
Ш.2. Давайте сделаем проверку..
Ш.3. Ищите тангенсы.
Ш.4. Разрушение «стены» ....
Ш.5. Непрерывность в геометрии..
111.6, Дидактические материалы, тесты, задачи................................. .
111.7. «Хорошая задача делает нас умнее»...
Ш.8. О задачах в учебнике..
Глава IV. О воспитании
IV. 1. На ошибках учат
IV.2. Человек критический..
IУ.3. О понимании ....
IУ.4. Понять комплексное число
IУ.5. Упростить? Нет ничего проще.
1У.6. Творчество на каждом уроке..
1У.7. С одной стороны. С другой стороны... ....
IV. 8. Не равна нулю ....
IY. 9. «Времена теперешние»..
IY.10. ФТШ ....
1У.11. Гуманитарная математика ....
IV. !2. Компьютер. Смена парадигмы?..
Заключение
http://book-download-lib.ru/book/529964-skachat-gt-ryzhik-v-i.html ....