Глава III. О ХОРОШЕЙ ЗАДАЧЕ

111.1. «ВОЙНА» С ОДЗ

Когда я начинал работать в школе, то относительно решения задач мне всё было ясно: что-то я умею решать, а что-то не умею. Все задачи собраны у П. Моденова (был тогда в ходу такой толстенный задачник), так мне его на всю жизнь хватит, есть на чём учиться. Мне и в голову не приходило, что в задачах школьной математики возможны какие-либо новации.

Всё оказалось не так. Смешно сказать, даже по записи ответа оказались возможными разные точки зрения! Учителям вскоре после реформы 1968 года стали настойчиво объяснять, что запись ответа в уравнении $x - 2 = 0$ в таком виде $x = 2$ даже не то чтобы плохая, но и попросту неверная, а записывать эту несчастную двойку в ответе надо так: $\{2\}$. Я уклонялся от этой новации как мог — и правильно, потому что сейчас вернулись на круги своя. Но ведь были же вокруг такой чепухи серьёзные разговоры на учительских собраниях, заседала же медальная комиссия, и кто знает, как она могла отнестись к той или иной форме записи.

Но нашлись вещи и посерьёзнее. Одна из них — «война» из-за так называемого ОДЗ, т. е. области допустимых значений неизвестного при решении уравнений, неравенств, систем. Я вёл её с представителями приёмных комиссий вузов — на всякого рода встречах, с всевозможными учебными пособиями — заочно и с собственными учениками, которые ходили на подготовительные курсы при вузах или читали эти пособия. Вёл её все годы и, по-моему, безуспешно. В десятый и сотый раз я говорю детям что-то вроде такого: «Ну, возьмите, как говорится, голову в руки. Вот вы решаете такое, к примеру, уравнение: $\sqrt{x} = -1$. Находите ОДЗ: $x \geq 0$. Затем возводите обе части в квадрат и получаете $x = 1$. Ну и что —вы получили ответ? Теперь возьмём неравенство $\sqrt{x} > -1$. Опять возведём в квадрат обе части и получим $x > 1$. Это ответ? Наконец, возьмём последний случай:

$\sqrt{x} < -1$—и после возведения в квадрат получим, что $0 \leq x < 1$. Так ведь и это не ответ. Ну, нашли вы ОДЗ, а понимаете ли, зачем его нашли? И зачем вы его вообще искали? Может, и не надо было искать?» Проблема, чисто практическая, состоит в том, что в подавляющем числе случаев от учеников на разных экзаменах по математике требовалось при решении такого вида примеров нахождение ОДЗ. Я помню случаи, когда за отсутствие этой процедуры хорошо сделанная работа была оценена на «3».

Нередко такая же категоричность просматривается в пособиях для поступающих в вузы. В то же время по математической сути дела нахождение ОДЗ вовсе не является обязательным, часто не нужно, а иногда и невозможно — и всё это без какого бы то ни было ущерба для решения. Обстоятельство это хорошо известно из методической литературы, но «война» продолжается каждый год, и похоже, что будет идти ещё долго.

Рассмотрим, к примеру, такое неравенство: $\sqrt{2-x} > \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ищется ОДЗ, и неравенство решается. Однако при решении этого неравенства вполне можно обойтись без поиска ОДЗ, точнее, можно обойтись и без условия $2 - x \geq 0$.

В самом деле, неравенство, полученное после возведения обеих частей в квадрат:

$$2 - x > x - 1 + 2\sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$$

«сильнее», чем неравенство $2 - x \geq 0$, и в приведённом решении необходимо только неравенство $x - 1 \geq 0$.

Вот ещё пример - решение уравнения $\lg(x + 4) + \lg(2x + 3) = \lg(1-2x)$.

Решают его, естественно, избавляясь от логарифмов, но затем найденные значения нередко проверяются на выполнение системы трёх таких неравенств: $x+4>0$, $2x + 3>0$, $1-2x>0$, что равносильно работе с ОДЗ. Однако и в этом примере такая работа излишняя — достаточно проверить выполнение только двух из этих неравенств, причём любых двух.

Всякое уравнение (неравенство) с одной переменной может быть сведено к виду $f(x) = 0$,

$f(x) > 0$ или $f(x) \geq 0$. ОДЗ — это просто область определения функции в левой части. То, что за этой областью, вообще говоря, надо следить, вытекает уже из определения корня уравнения как числа из области определения данной функции, тем самым из ОДЗ. Вот примеры на эту тему.

1. Я пишу на доске уравнение $x^x=x$ и задаю вопрос: «Является ли число -1 корнем этого уравнения?» С одной стороны, при подстановке -1 в обе части мы получаем верное равенство, а значит, -1 является корнем. Но с другой стороны, функция x^x имеет областью определения множество положительных чисел (это, конечно, договорённость — рассматривать функцию $f(x)^{g(x)}$ при $f(x)>0$, но разумная), а тогда -1 не является решением.

2. Аналогичный пример - ловушка: является ли число 2 корнем уравнения $(\sin x)^x + (\cos x)^x=1$?

Возможный ответ — да, ибо сумма квадратов синуса и косинуса равна 1, но при $x = 2$ $\cos 2<0$, а потому 2 — не является решением.

3. $(x+1)\sqrt{x} = 0$. Возведём обе части уравнения в квадрат — в данном случае вроде бы безобидное действие, основанное на очевидном соображении: число равно нулю тогда и только тогда, когда его квадрат равен нулю. Получим $(x+1)^2x = 0$. Однако полученное уравнение имеет решение -1, которого нет у исходного уравнения.

4. $\dfrac{x^2-1}{x-1}=2x$. Сократим дробь в левой части и получим $x + 1= 2x$. Отсюда $x = 1$, что выходит из ОДЗ.

И наконец, в массе примеров нахождение ОДЗ позволяет получить *ответ без громоздких выкладок,* а то и вовсе устно.

1. ОДЗ представляет собой пустое множество, а значит, исходное уравнение не имеет решений.

1) $\sqrt{x-3} = \sqrt{2-x}$.

2) $\lg\dfrac{1}{x} = \lg(-x)$.

3) $\sqrt{\log_2 x} = \log_x(1-x)$.

2. В ОДЗ находится одно или несколько чисел, и несложная подстановка быстро определяет решения.

1) $\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x}$.

2) $\sqrt{\log_2 x} - \sqrt{\log_{0,5} x} = 1$.

Здесь в ОДЗ находится только число 1, и после подстановки видно, что оно не является решением.

3) $\sqrt{x^2-5x+6} \leq \sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}$.

В ОДЗ находятся два числа 2 и 3, и оба подходят.

4) $\sqrt{1-\sqrt{1-x}} > \sqrt{x^2-x}$.

В ОДЗ находятся два числа 0 и 1, и подходит только 1.

3. ОДЗ используется вместе с анализом всего примера.

1) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1} = 1$.

Из ОДЗ имеем $2x+1 \geq 0$. Но тогда $2x + 3 \geq 2$ и $\sqrt{2x+3} \geq \sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2} >1$, то решений нет.

2) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4-x^2} < x$.

ОДЗ: $$\left[\begin{array}{l} -2 \leq x \leq 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Но в правой части неравенства могут быть только положительные числа, поэтому оставляем $x = 2$.

Затем в исходное неравенство подставим 2.

3) $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1} = x^2 + 3$.

Из ОДЗ имеем $x \geq 5$. Так как справа стоит положительное выражение, то $\sqrt{x-5} > \sqrt{2x-1}$, а значит, x-5 > 2x-1. Решая последнее неравенство, получим $x < -4$, что не входит в ОДЗ. Поэтому решения нет.

4) $\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{x-1}$.

ОДЗ: $1\leq x \leq 2$. Так как $x \geq 1$, то $\sqrt{2-x}+x-3 \leq \sqrt{2-1}+x-3 = x - 2 < 0$.С другой стороны, $\sqrt{x-5} \geq 0$. Равенство возможно только тогда, когда каждая часть уравнения равна 0, т. е. при x=1. После подстановки этого значения x убеждаемся, что решений нет.

5) $x^2 + x + \sqrt{x+1} = 2+\sqrt{2}$.

ОДЗ: $x \geq -1$. Рассмотрим уравнение на промежутке [-1; 0). На нём выполняются такие неравенства: $x^2 + x \leq 0$ и $\sqrt{x+1} \leq 1$, поэтому $x^2 + x + \sqrt{x+1} \leq 1$ и решений нет. При $x \geq 0$ функции x^2+x и $\sqrt{x+1}$ строго возрастающие и потому каждое своё значение принимают один раз. Значит, уравнение не может иметь больше одного решения. А одно решение видно невооружённым глазом — это 1. Поэтому ответ: $x = 1$.

6) $1\log_x(x^3+1) = 1\log_{x+1}(x^2-2x)$.

ОДЗ: $x>2$. При этом $1\log_x(x^3+1) > 1\log_x(x^3) = 3$, $1\log_{x+1}(x^2-2x+1) < \log_{x+1}(x^2+2x+1) = 2$. Значит, исходное равенство невозможно и решений нет.

7) $\cos x\sqrt{\sec x-1} + \sin x\sqrt{\cos ecx-1} = 1$.

Из ОДЗ следует, что $\sin x>0$, $\cos x>0$. Но тогда исходное уравнение можно преобразовать, внеся множители под радикал, к такому виду: $\sqrt{\cos x-\cos^2 x} + \sqrt{\sin x-\sin^2 x} = 1$.

Всякий квадратный трёхчлен вида f(z)= $z - z^2$ на промежутке (0; 1] не превышает 0,25. Но тогда $\sqrt{z-z^2} \leq 0{,}5$. Возвращаясь к уравнению, видим, что каждое слагаемое не превосходит 0,5, а потому вся сумма не больше чем 1. Равенство может быть достигнуто только при $\sin x = \cos x = 0{,}5$, а это невозможно. Значит, исходное уравнение решений не имеет.

8) $\sqrt{a-|x|} + \sqrt{x-a} = -a$.

Из ОДЗ следует, что $a \geq |x|$, откуда имеем $a \geq 0$. Из рассмотрения правой части уравнения видим, что $a \leq 0$. Поэтому необходимо равенство $a = 0$, после чего решение ясно.

И наконец, поиски ОДЗ являются очень часто просто лишней работой, без которой прекрасно можно обойтись, доказав тем самым понимание происходящего. Тут можно привести много примеров, они достаточно хорошо известны, и я их опускаю. Главным приёмом решения являются в этом случае равносильные преобразования при переходе от одного уравнения (неравенства, системы) к другому.

В целом эффективность способа равносильных преобразований вроде бы ясна. С их помощью мы добираемся до ответа и без поисков ОДЗ. Значит ли это, что имеется некий универсальный способ и осталось только научить им пользоваться? Я бы так не сказал. Тому несколько причин. Теорем о равносильных преобразованиях довольно много, они непросты для запоминания, и уверенное владение ими — дело, видимо, «профессиональное», учительское. Я, к примеру, знаю больше десятка таких теорем, но не уверен, что этого достаточно для любого вида уравнения. Добавлю ещё чисто педагогические сложности. Ученики, когда их учишь равносильным преобразованиям, начинают ставить знак равносильности при любых переходах от одного уравнения к другому, как действительно равносильных, так и не являющихся таковыми. Теоремы быстро забывают, сами придумать не могут и «лепят».

Ещё одна сложность — при записи равносильности ученики могут забыть выписать все условия, её гарантирующие, но на ответе это может никак не отразиться.

И тонкостей тоже хватает. Например, двойное неравенство $a<f(x)<b$ равносильно одному такому: $(f(x)-a)(f(x)-b) < 0$, решать которое удобнее, ибо позволительно использовать метод интервалов.

Или такая ситуация. Решая неравенство $|f(x)| < a$, я не забывал оговаривать, что $a > 0$, и только после этого появлялась запись $|f(x)|< a \Leftrightarrow$-а $< f(x) <a$.

Но, формально рассуждая, такая оговорка излишня, ибо эта равносильность сохраняется и в других случаях, т.е. при $a \le 0$.

А теперь пример, в котором соединяем эти две равносильности:

$|x|<-5 \Leftrightarrow 5 < x < -5 \Leftrightarrow (x-5)(x+5)< 0 \Leftrightarrow -5< x <5$.

Какая-то чертовщина! А дело в том, что равносильность

$a<f(x)<b \Leftrightarrow (f(x) - a)(f(x)-b) <0$ предполагает, что $b>a$.

Вот аналогичная история. Пусть надо решить неравенство $\sqrt{x+1} > x$. Обычный ход в равносильных преобразованиях таков: данное неравенство равносильно совокупности двух таких: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x+1 > x^2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases}$. Дальнейшее очевидно, но что любопытно: в первой системе верхнее неравенство можно убрать. Решив исходное неравенство без этого ограничения, мы приходим к тому же ответу. Почему? Дело в том, что множество решений неравенства $x + 1 \ge 0$ накрывает множество решений неравенства $x + 1 \ge x^2$ и, поскольку множество решений исходного неравенства является объединением двух множеств, то учитывать более «узкое» множество не обязательно; разумеется, оно ничего не портит, но может даже и помочь, если под радикалом вместо $x + 1$ будет стоять $|x| + 1$.

Один забавный пример с равносильностями. Уравнения $\sin x = 2$ и $x = (-1)^n \arcsin 2 + \pi n$ равносильны, а вот неравенства $\sin x \ne 2$ и $x \ne (-1)^n \arcsin 2 + \pi n$ не являются таковыми.

И, наконец, возможно самое существенное. Дело в том, что равносильность гарантирует правильность ответа, если совершаются какие-то преобразования самого уравнения, но преобразования только в одной из частей (приведение подобных, сокращение, использование различных формул) не попадают под действие теорем о равносильностях.

Возьмём как пример тому уравнение : $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{-x})(\sqrt{x}-\sqrt{-x})}{x} = 2$.

Преобразуя левую часть, придем к равенству 2 = 2, из чего следует, что решением является любое число. Но откуда? Из области определения функции в левой части, т. е. из ОДЗ уравнения. А ОДЗ, как легко видеть, является пустым множеством. Значит, решений нет.

Итак, что же получается?

При решении уравнения (неравенства) дело не только в том, чтобы после цепи выкладок в конце концов выскочило нечто про неизвестное *x*. Дело ведь и в том, чтобы доказать, что решено именно исходное уравнение (неравенство), а не то, последнее, из которого мы и получили ответ.

Таковые доказательства могут быть различными (равносильность, следование плюс подстановка, функциональные соображения), но нельзя делать вид, будто их в процессе решения нет вовсе.

Однако же теория равносильности сложна. Так, может быть, махнуть на неё рукой и работать совсем попросту — переходить только к выводным уравнениям, которые следуют из данного, ни при каких обстоятельствах не терять корней («На нуль делить нельзя!»), а затем подстановкой отделять лишние? Увы, и это не подходит. Во-первых, что делать с неравенствами? Там же бесконечное число решений, и все не подставишь. Во-вторых, и в уравнениях не всё гладко. Например, при решении уравнения $\sqrt{x^2+2x-3} = 2x - 3$ таким способом подстановке подлежат числа $\dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{3}$.

Кому охота делать такие нудные выкладки? В то же время при равносильных преобразованиях достаточно к равенству $x^2 + 2x - 3 = (2x-3)^2$ добавить условие $2x-3 \ge 0$, и сразу видно, что этому условию отвечает только число $\dfrac{7+\sqrt{13}}{3}$, а потому именно оно является решением уравнения. (Не упустим случая заметить, что поиск ОДЗ здесь совершенно бессмыслен.)

Тем временем работа с равносильностью потихоньку внедряется в школу. Вот пример (с экзамена 2001 года для 9 класса математических школ):

«Найдите все пары (a, b), для которых неравенства $x^2 - x(5 + b) + 5b \leq 0$ и $|x - 7| \leq a$ равносильны.»

Более или менее стандартное (и утомительное) рассуждение состоит в решении обоих неравенств и дальнейшем сопоставлении границ для x, полученных при этом. Однако возможен и другой путь. Возведением в квадрат (с учётом, что $a>0$) из второго неравенства получим равносильное неравенство уже не для модуля, а для второго квадратного трёхчлена. Равносильность полученного неравенства и первого исходного означает, что имеющиеся два трёхчлена совпадают. Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем систему относительно a и b, которая затем легко решается. Случай, когда $a<0$, надо посмотреть при этом особо.

Подводя некоторый итог всему разговору, мы видим, что универсального метода решения уравнения и неравенств в школьном курсе не видно. Каждый раз ученик, который хочет понимать, что он делает, а не действовать механически, стоит перед дилеммой: а какой способ решения выбрать, в частности искать ОДЗ или не надо? И далее, если не искать, то менять её в процессе выкладок или не менять? Но дело это неформальное и требует от детей громадного опыта.

То обстоятельство, что вся эта кухня имеет научную ценность, близкую к нулю, позволяет сделать почти естественное предположение, что для общего образования решение уравнений (неравенств и систем) в таком объёме, как это требуется сейчас, излишне.

Конечно, что-то оставить надо. Я бы оставил только такие примеры, которые имеют алгоритм решения — линейные и квадратные уравнения (неравенства), некоторые другие типы, а также такие, которые имеют ясную геометрическую иллюстрацию. Конкретно, если ученик знает график некоторой функции $f(x)$, то он должен в простейших случаях уметь решать уравнение типа $f(x) = a$, неравенство типа $f(x) > a$ и всякие несложные комбинации таких примеров. Идея алгебраизации геометрии и геометризации алгебры (анализа) имеет куда большее образовательное значение, чем техническая изощренность в решении интеллектуальных загадок вида «найди x».

И, наконец, нужно ли тратить огромные усилия учителей на то, что сейчас является делом пары секунд для компьютера?

Несколько слов о равносильности систем. Обычно о ней вообще не говорят в школьном курсе. И метод подстановки, и метод алгебраического сложения ясны как бы сам по себе. Но у меня нужной ясности долго не было.

Подойдём к проблеме с геометрической точки зрения. Пусть мы имеем две линии на плоскости, заданные аналитически, и надо найти их точку пересечения, то есть её координаты. В результате преобразований соответствующей системы уравнений мы приходим к поиску точки пересечения совсем других линий. С какой стати они обязаны пересекаться в той же самой точке? Вот простенький пример. Пусть нам были заданы окружность с уравнением $x^2 + y^2 = 1$ и гипербола с уравнением $x^2 - y^2 = 1$. После сложения и вычитания этих уравнений мы будем искать точки пересечения неких прямых. Как же убедиться в совпадении множества точек, не решая соответствующих систем? Ничего не поделаешь - приходится заниматься изучением тех преобразований, которые мы делали в исходной системе.

Рассмотрим метод подстановки в системе. Для примера возьмём систему $y = x^2$, $x = y^2$.

Из первого уравнения берут выражение для y и подставляют его во второе уравнение. Получается уравнение $x = x^4$.

Работая далее с ним вместе с уравнением $y=x^2$, приходим к ответу. Но почему этот ответ является ответом исходной системы, остается неясным.

Вот контрпример. Возьмём ту же систему $y = x^2$, $x=y^2$

и сделаем в ней две подстановки. Из первого уравнения подставим выражение для y во второе уравнение, а из второго уравнения возьмём выражение для x и подставим его в первое уравнение. Приходим к системе $y=y^4$, $x=x^4$.

Решая её, получим некий ответ. Но легко понять, что он не подходит к исходной системе.

Почему же в первом случае, при одной подстановке, мы получаем верный результат, а во втором случае, сделав две подстановки, получаем чушь?

Дело в том, что системы $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ и $y = h(x)$, $g(x, h(x)) = 0$ равносильны (это несложно доказать), а системы $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ и $f(h_1(y), y) = 0$, $g(x, h_2(x)) = 0$ не являются таковыми. Но знают ли об этом ученики?

Поговорим о методе алгебраического сложения. Когда я ещё учился сам, мы долго занимались исследованием системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Система выглядела в общем виде так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

О решении системы нам рассказывали вот что. Умножим первое уравнение на a_2, второе — на $-a_1$ и сложим оба уравнения. Затем умножим первое уравнение на b_2, второе—на $-b_1$, и опять сложим. В результате получится система

$$\begin{cases} (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1 \end{cases}. \qquad (1)$$

Для удобства обозначим $a_1b_2 - a_2b_1$ через Δ, $c_1b_2 - c_2b_1$ через Δ_x, $a_1c_2 - a_2c_1$ через Δ_y

Соответственно эти выражения называются определителем системы, определителем для x и определителем для y. Получается система вида

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases}. \qquad (2)\cdot$$

Её исследование довольно просто и зависит от равенства нулю указанных определителей.

Всё это прекрасно, но откуда мы знаем, что система (1) и система (2) равносильны? Увы, объяснений не было, да и вопроса такого перед нами не вставало. Другое дело, когда я стал это объяснять своим ученикам, то обнаружил, что речь в общем случае идёт о так называемом линейном преобразовании системы. И в общем виде оно выглядит так. Имеется система

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

и система, полученная из данной, такого вида:

$$\begin{cases} a_{11}f + a_{12}g = 0 \\ a_{21}f + a_{22}g = 0 \end{cases}$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то система (3) и система (4) равносильны. Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ля указанного выше перехода от системы (1) к системе (2) и есть определитель системы (1). Именно поэтому при условии $\Delta \neq 0$ мы и получаем, что не только система (2), но и равносильная ей система (1) имеют одно решение. После этого мне стало ясно, почему при сложении и вычитании уравнений такой простенькой системы

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

приходим к достоверному результату. Ведь в этом случае, как легко убедиться, выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ как раз отлично от нуля! Но если, к примеру, сложить оба уравнения этой системы, а потом, умножив оба уравнения системы на 2, их опять же сложить, то получим нелепость вида

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ 4x = 8 \end{cases}.$$

естественно, не равносильную данной системе. И дело тут всё в том же выражении $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, которое в случае такого преобразования равно 0. Окончательно всё для меня прояснилось, когда благодаря векторам ситуация стала геометрически прозрачной— я об этом уже говорил выше. Определитель системы — это и есть определитель её линейного преобразования. Его равенство нулю означает, что равна нулю площадь некоторого параллелограмма, который получается из единичного квадрата в результате этого преобразования, и геометрическая картина меняется — в переводе на алгебру эта смена картины и означает потерю равносильности.

111.2 ДАВАЙТЕ СДЕЛАЕМ ПРОВЕРКУ

До сих пор нет полной ясности и в таком важном для преподавания математики вопросе, как обучение проверке в задаче. Поначалу очевидный, он становился все менее прозрачным, чем больше я над ним размышлял и чем больше я читал по этому поводу.

Давайте начнём с такой задачи: «В трёх баках было вместе 50 л бензина, причём в первом баке было на 10 л больше, чем во втором. Когда из первого бака вылили в третий 26 л, во втором и третьем стало поровну. Сколько бензина было первоначально в первом баке?» Я не раз предлагал эту задачу учителям. Обычно ответ на вопрос задачи поступал через несколько минут, а решение выглядело примерно так.

Пусть в первом баке было сначала x литров, тогда во втором баке сначала было x-10 литров, а в третьем баке было сначала $50 - x$ - (x - 10) литров. После переливания из первого бака в третий 26 л в последнем стало $50 - x$ - (x:-10) + 26 литров. По условию задачи этот объём равен тому, который был во втором баке. Поэтому составим уравнение: x-10 = $50 - x$ - (x - 10) + 26.

Решением этого уравнения является $x = 32$. Значит, ответ на вопрос задачи такой: в первом баке было сначала 32 л.

Получив такой ответ, аудитория вопросительно смотрела на лектора: ну и что же такого особенного в этой задаче? Иногда, впрочем, раздавалась тихая реплика: «А решения нет».

Вот теперь раскроем первый номер журнала «Математика в школе» за 1971 год. Редакция напечатала в нём небольшое письмо-вопрос учительницы Т. Поляковой из Москвы под названием «Нужна ли проверка при решении текстовых задач на составление уравнений?». В те времена даже в учебниках по методике преподавания математики бытовала некая странная точка зрения. Проверка, мол, состоит в том, что нужно составить новую задачу, в которой какое – то данное исходной задачи считается неизвестным, а прежнее неизвестное считается известным, а затем решить эту новую задачу. Считалось при этом, что мы тем самым проверяем, правильно ли было составлено само уравнение в исходной задаче. Т. Полякова и ставила вопрос о необходимости такой проверки.

Ясно было, что последует продолжение. И действительно, в № 3 этого журнала за тот же год появилась статья В. Болтянского «Нужна ли проверка при решении текстовых задач на решение уравнений?». Всегда доставляет удовольствие читать сочинения математика-профессионала о преподавании, разумеется, если математик имеет педагогическую жилку. Тому много примеров, и сочинения В. Болтянского (в отличие от иных других его коллег, даже облачённых академическими званиями) относятся к таковым.

Тут же замечу, что любому нынешнему деятелю математического образования необходимо знать то, что сделали для нас А. Пуанкаре, Ф. Клейн, Х. Фрейденталь, А. Колмогоров, А. Александров. И есть ещё прекрасные сочинения о преподавании (или близкие к ним) А. Хинчина, Я. Дубнова, Н. Виленкина, Д. Мордухай – Болтовского, А Маркушевича…список легко продолжается.

На вопрос Т. Поляковой ответ В. Болтянского был ясен: то, о чём она говорит , вовсе никакая не проверка, а придумки методистов, потерявших ясность мышления. Истинная проверка состоит в следующем. При составлении уравнения для текстовой задачи должны накладываться ограничения на физические величины, рассмотренные в процессе составления уравнения. Эти ограничения идут от смысла задачи. После получения ответа в уравнении все полученные при этом значения неизвестного необходимо проверить по сделанным ограничениям, и всё, что им не удовлетворяет, должно быть отброшено. Именно этот этап решения и называется проверкой. Практически проверка выполняется так: берётся найденное значение неизвестной величины и вместе с ним «проходится» все условие задачи, вычисляются все входящие физические величины и проверяется их соответствие смыслу задачи. Автор подчёркивает: «Проверка решения по смыслу задачи — необходимый элемент решения. Её ничем нельзя заменить и тем более отменять». Затем, правда, В. Болтянский пишет удивительный пассаж: «Другое дело, что учитель может иногда разрешить не делать проверку, предупредив, что «вообще-то её необходимо делать, но сейчас мы времени тратить на неё не будем. Это вопрос методики и педагогического такта учителя». Во-первых, при чём тут методика? Методика не может отменять математики. Во-вторых, при чём тут такт учителя? Никто не может отменять то, что действительно необходимо. Но об этом пассаже я так, к слову.

Аналогичный вариант проверки приводится в известном учебнике алгебры Д. Фаддеева, И. Соминского.

Что мы видим? Математики высочайшего класса (В. Болтянский , Д. Фаддеев) считают проверкой совсем не то, что было введено в практику преподавания методистами.

Сделаем, согласно В. Болтянскому, проверку в задаче о баках с бензином — кстати, сама задача взята именно из его статьи. Мы должны в соответствии со смыслом задачи выписать такие ограничения на величины: $x \geq 0$, x-$10 \geq 0$, $50 - x$ - $(x$ - $10) \geq 0$, 50 - x- $(x$ - $10)$ + $26 \geq 0$.

Решая эту систему неравенств, мы приходим к неравенству $10 \leq x \leq 30$, из чего ясно, что найденное значение (32) не является решением задачи. Можно было действовать чуть иначе — взять число 32 и убедиться в том, что хоть одно из неравенств системы не выполняется.

Размышляя о содержании статьи В. Болтянского, я придумал несколько вопросов:

1. В статье говорится только о физических величинах. Как быть с величинами другой природы, которые встречаются в текстовых задачах: возраст, стоимость, какая-либо дискретная величина — например, число рядов в кинотеатре? Ограничения на них не столь очевидны.

2. Не всё ясно даже с физическими величинами. Мне довелось в текстовых задачах встречать скорость автомобиля и 0,9 км/ч, и 155 км/ч, скорость теплохода —70 км/ч, а скорость паровоза — 9 км/ч. Возможность таких значений истолковывалась авторами задач по своему усмотрению. Например, считалась возможной указанная скорость теплохода и невозможной указанная скорость паровоза.

А как быть с отношением величин?

3. Есть ли гарантия, что выписаны все необходимые ограничения? Сам В. Болтянский, указывая неотрицательность объёма бензина в каждом баке, не ограничивает его сверху, хотя вроде бы и можно было указать, что каждый из объёмов не больше чем 50 л. Иногда эти ограничения записать не так просто. Как, например, выразить в неравенствах, что одна машина догнала другую именно на данном участке дороги? Возможны и технические трудности. Если задача имеет данными не конкретные численные значения величин, а некоторые параметры, то придётся решать неравенства с параметрами, что не всегда просто.

4. Как быть, если для решения задачи требуется составить неравенство, да ещё, возможно, с параметром? Решением его является, как правило, некий промежуток, и проверку, как советует В. Болтянский, сделать нельзя, ибо что подставлять?

5. Надо ли что-нибудь проверять, если решение получено без составления уравнений? Например, как в старые времена, по вопросам. Или с помощью графической иллюстрации, или чистым рассуждением. Задачу с баками, например, можно решить так: если мы добавим к содержимому второго бака 10 л бензина, а к содержимому третьего бака 36 л бензина, то во всех баках станет бензина поровну. От такой мысленной добавки общий объем увеличился на 46 л и стал равен 96 л. А так как во всех баках поровну, то в первом баке 32 л. Нужна ли проверка при таком решении?

Просматривая литературу на эту тему, я увидел, что точка зрения В. Болтянского известна и не абсолютна. В методике почти всегда так. Копаешься в каком-нибудь вопросе, а потом узнаёшь, что в прошлом веке в связи с ним была бурная полемика, например, в Пруссии.

На статье В. Болтянского обсуждение не закончилось. Появилось много откликов, они были систематизированы и обозрены в № 4 за этот же год, а в № 5 за 1974 год появилась на эту же тему статья Г. Дорофеева «Проверка решения текстовых задач». Точка зрения автора была, насколько я мог судить, оригинальной.

Исходная установка Г. Дорофеева такова: вопрос о содержании проверки прежде всего логического, а не методического характера. Но раз это вопрос логики, то должно существовать «совершенно чёткое единое мнение». Основой для решения этого вопроса автором является то бесспорное положение, «что поскольку текстовая задача формулируется на реальном, естественном языке, то и логика её решения должна основываться на смысле слов и предложений этого языка». Далее автор разделяет все текстовые задачи на два типа. К первому типу — он назван задачами на реализованные ситуации — относятся такие задачи, в которых описывается реально происходивший процесс. Из смысла задачи следует, что решение в такой задаче существует, причем, как правило, однозначное. Ко второму типу — он назван задачами потенциального характера — относятся задачи, в которых не гарантируется существование исходной ситуации, а значит, и существование решения.

В задачах на реализованную ситуацию возможны два случая: получается один результат или получается более одного результата. И не может быть, чтобы результата не было, раз имел место сам процесс. Когда получается один результат, то никакой проверки его не требуется. Когда получается больше одного результата, то надо ещё выяснить, какой из них подходит к условию. Но это выяснение есть не проверка, а выбор ответа, после которого только и можно считать законченным само решение. Выбор единственного ответа осуществляется «разыгрыванием» условия при найденном значении неизвестной величины или по очевидным физическим соображениям. Истинная проверка имеет место только в задачах потенциального характера. Она необходима, так как из условия в этих задачах ещё не следует факт существования решения. При этом необходимость проверки связана и со способом решения задачи. В частности, составление уравнений необходимо требует проверки всех полученных значений. Осуществляется проверка лучше всего «разыгрыванием» полученного результата по условию задачи.

В статье много примеров. Один из них — задача с баками. По Г. Дорофееву, надо понимать её так. Она сформулирована как задача на реализованную ситуацию, значит, решение её заведомо существует. Так как мы получили всего один результат в уравнении, то его и проверять не надо. Результат 32 л является ответом в задаче.

Более того, автор заостряет ситуацию. Он сохраняет полностью условие задачи, меняет только вопрос и спрашивает: «Сколько бензина было в третьем баке?» Полученный результат (-4) л является логически безупречным, проверке не подлежит, как во всякой задаче на реализованную ситуацию. К ученику, давшему такой ответ в задаче, претензий быть не может. Замысел автора ясен: «Не хочешь получать глупых ответов — не задавай глупых вопросов». Для получения осмысленного ответа эту же задачу надо переформулировать так, чтобы она была задачей потенциального характера. Тогда будет и проверка, после которой результат (-4)л будет отброшен.

Что же приходит в голову после того, как становится ясным замысел Г. Дорофеева?

1. Все вопросы, порождённые статьёй В.Болтянского, остались в силе в тех задачах, которые названы задачами потенциального характера.

2. В задачах потенциального характера предлагается вести проверку «разыгрыванием», но если задача предложена в общем виде и результат достаточно громоздок, то «разыгрывание» неудобоваримо и не проще ли делать проверку по рецепту В. Болтянского?

3. Не всегда ясна граница между задачами двух типов. Вот пример: «Пешеход пошёл из A в B и, пройдя половину пути, понял, что если он и дальше пойдёт с той же скоростью, то опоздает в B на время t_1. Поэтому он увеличил скорость на V и пришел в B на время t_2 раньше намеченного. С какой скоростью он шёл вначале?» Г. Дорофеев, правда, подчёркивает, что «при точной формулировке задачи и при точном её понимании не представляет труда определить, к какому типу эта задача относится». Но где взять эти точные формулировки? Весь фонд текстовых задач создавался совсем не из этих предпосылок! Мы, похоже, привыкли к тому, что текстовая задача — некий жанр при обучении математике. Безоговорочно поверить в реальность условия можно далеко не всегда, даже если в тексте говорится, что всё это было. Помните задачу о стае гусей, где эти самые гуси говорят человеческим голосом? Ну ладно, это задача-шутка. Но возьмём любую задачу на движение. Откуда взялись постоянные скорости, моментальные повороты, внезапные остановки? Я уже не говорю о знаменитых бассейнах с трубами. Всё это почти сказки...

В общем, после статьи Г. Дорофеева ясности у меня не прибавилось. Скорее, наоборот. Возникли новые вопросы... Как быть всё-таки с проверкой, если задача решалась без уравнений? Ну не может же быть, чтобы ученик получил в ответе каким бы то ни было способом «2 землекопа и 2/3» и был прав! А как быть с проверкой, если задача другого вида: геометрическая, комбинаторная, логическая? А если на экстремум? Там ведь тоже есть уравнения!

И вообще, как же это так получается? Один математик говорит, что (-4) л — это ответ, а другой говорит, что ничего подобного...

После выступления Г. Дорофеева все эти вопросы уже основательно засели в моем сознании. Я старался читать всё по этой тематике. Кто делает проверку, кто нет, кто пишет, что она нужна, но не делает её. А если делает, то почему-то она совсем не такая, как советовали и В. Болтянский, и Г. Дорофеев. Картина всеобщего разброда, каждый работает, как понимает. Ну а что делать мне в классе? Искать что-то своё, к чему-то придти, не открывать Америку, но что-то надо делать с этими вопросами, которые помаленьку стали мешать, как занозы.

Сначала я понял, почему не могу принять полностью точку зрения Г. Дорофеева. Это просто — я не могу ставить отличную оценку ученику, который выдает мне (-4) л в ответе и говорит мне , что прав. Почему же Г. Дорофеев приходит к столь парадоксальному для практики выводу? Ясно, почему. Он полагает, что возможны задачи, лингвистическая конструкция которых обеспечивает существование решения, а потому необязательность проверки в случае единственного результата. При таком допущении мы можем получить ответы, противоречащие здравому смыслу. Казалось бы, отсюда следует сделать вывод о неправомерности сделанного допущения, но его почему-то не делает Г. Дорофеев. Почему?

Пойдём далее. Основное в позиции Г.Дорофеева — примат логики. Решить задачу, согласно его точке зрения — это доказать импликацию $A \rightarrow B$. Тогда, конечно, если условие A ложно (противоречиво), то импликация верна при любом B. И должен приниматься за ответ любой полученный результат. Тут мне не всё ясно. Приведу пример из той же статьи Г. Дорофеева: «Турист проехал 100 км на автомобиле и 60 км на катере, причем дорога на автомобиле заняла у него на 15 мин больше времени, чем на катере. Скорость автомобиля на 20 км/ч больше скорости катера. Найти скорость автомобиля». В результате получается два значения скорости: 100 км/ч и 80 км/ч, причём оба значения удовлетворяют условию. Соответствующая импликация имеет вид: «если A, то B или C». Здесь под A понимается условие задачи, а B и C — утверждение о скоростях, которые были найдены.

Г. Дорофеев пишет, правда, не «или», а «либо... либо», но за этим оттенком можно предполагать всё ту же дизъюнкцию, разве что исключающую. Дизъюнкция верна, как мы помним, если верна хоть одна её часть. Поэтому, встав на точку зрения Г. Дорофеева, мы можем убедиться в справедливости только одного из двух полученных результатов, а второй результат можно даже не проверять. Мало того, формально верным будет такой ответ, в котором подходит хотя бы один результат, а вторым значением скорости будет любое число км/ч (а если захотеть, то можно приписать к верному значению ещё сколько угодно любых значений искомой скорости).

Но более того, доказать истинность импликации $A \rightarrow B$ — это в случае истинности A - доказать истинность B. Но в текстовой задаче этого B ещё нет. Его-то как раз и надо найти! А найти его и значит реально решить задачу. Всё это мне очень напоминает круг: решение задачи (по Г. Дорофееву) — это доказательство истинности импликации, но для формирования этой импликации, оказывается, надо решить задачу.

Для меня это некий парадокс. В чём его причина? Во-первых, я не уверен в правомерности использования логики силлогизмов для анализа задач, ибо задача является не повествовательным утверждением, но вопросом или неким повелением. Во-вторых, дедуктивная логика, как мне кажется, не всегда достаточна и при осмыслении решения задачи, на этапе интерпретации. В-третьих, я думаю, что предмет нашего обсуждения находится вне самой математики. Во всяком случае, здесь многое, если не всё, зависит от того, как мы понимаем такие слова: задача, текстовая задача, условие, данные, решение задачи, проверка решения задачи, точная формулировка задачи, точное понимание задачи, ответ задачи. О чём же мы тут говорим, если даже исходный термин «задача» не имеет однозначного толкования? А раз не ведаем этого вполне определенно, то можно ли здесь выставлять на первое место формальную логику?

Такие мысли привели меня к выводу, что на первое место, может быть, стоит вернуть методический статус задачи. Реально мы имеем дело с учебной задачей. Она имеет учебные цели и тем отличается от других видов задач. Эти цели проявляются в содержании задачи, выборе данных в условии задачи, постановке вопросов или заданий. Кроме того (и я хотел бы это подчеркнуть), из текста учебной задачи должно быть ясно, когда работу над ней можно считать законченной. Последнее происходит тогда, когда ученик ответил на все поставленные вопросы, выполнил все предложенные задания.

Если мы хотим, чтобы ученик делал проверку, то это наше требование должно быть ясно из контекста или из условия самой задачи.

И тут мы приходим к очередному вопросу: в чём же состоит проверка? Что, собственно, должен сделать ученик, получив задание сделать проверку?

Вообще говоря, проверка полученного результата считается даже частью решения любой задачи, не только математической. Обязательность проверки в задачах с самым разным содержанием лишний раз подчёркивает внутри- и межпредметные связи. При этом проверяется: 1) ход решения — нет ли в нём прямых ошибок; 2) соответствие полученного результата поставленному вопросу условию и всем данным задачи; 3) условие задачи — нет ли в нём противоречия. Назовём эти проверки соответственно: проверка-1, проверка-2, проверка-3.

Проверка-1 обсуждалась много, и я поговорю о ней в дальнейшем. Предмет нашего разговора сейчас — оставшиеся два вида проверки. Если мы хотим, чтобы ученик делал проверку-2, то такое задание должно быть явно сформулировано. Если этого не было сделано, то к ученику не может быть претензий, когда он проверки-2 не выполнил. Разумным исключением из такой договорённости между учителем и учеником можно считать проверку «предответа» по здравому смыслу. Так, естественно считать, что получающиеся в задачах длины, скорости, массы и т. п. положительны. Ученик, получив для такой величины отрицательный ответ, имеет право и даже должен его отбросить.

К великому сожалению, всё равно не удается добиться полной однозначности, ибо здравый смысл неформализуем. Понятно, скажем, что скорость автомобиля в стандартной задаче на движение — величина положительная. Но может ли она быть меньше 1 км/ч? Этот вопрос не риторический. В одной из задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГУ, как раз такое и оказалось. Одно из значений скорости автомобиля получилось 15/17 км/ч. Объяснение ученика, который отверг этот результат «потому, что автомобили с такой скоростью не ездят», было посчитано приёмной комиссией курьёзным.

Однажды я обсуждал эту задачу в классе. Большинство учеников считало, что отбрасывание результата, противоречащего здравому смыслу, не может быть ошибкой. Впрочем, они же спросили, куда поступал данный товарищ.

— А какая разница? — насторожился я.

— Если на мехмат, то ему нельзя ставить 5, а если на физфак, то можно.

Было над чем подумать. А кто знает, каким может быть отношение скоростей двух объектов или отношение масс двух веществ? Пусть в такой задаче искомый результат L имеет вид $A / (B - C)$, где A, B, C — известные величины, а L — неизвестная величина. Можем ли мы считать этот результат ответом при любом выборе конкретных значений B и С? А если нет, то каковы же для них «естественные ограничения»?

И совсем безнадёжно искать таковые в задачах о возрасте отца и сына.

В таких ситуациях приходится вдумываться в содержание задачи, соотносить его с реальностью.

Об этом мы могли бы прочитать ещё в прошлом столетии у известного английского учёного и педагога И. Тодгентера: «...когда при решении какой-нибудь задачи результат получается отрицательный, то учащийся должен постараться истолковать этот результат». Он советует далее не только разобраться в смысле задачи, но и составить новую задачу, в которой полученный отрицательный ответ мог бы иметь реальный смысл. Известен хороший пример такой задачи, когда спрашивается, через сколько лет отец будет в два раза старше сына, а в результате получается (-5).

К сожалению, совету И.Тодгентера не всегда удаётся следовать. Вот пример.

Разбирал я как-то «с листа» в классе такую задачу: «Материальная точка в первый раз прошла некоторый путь с постоянной скоростью. Во второй раз она увеличила скорость на величину v_1, а потому затратила на этот путь на время t_1 меньше. На обратном пути она уменьшила скорость на величину v_2 по сравнению с той, которая была в первый раз, а потому затратила на этот путь на время t_2 больше, чем в первый раз. Чему равна величина пути?»

Обозначим величины, используемые при решении задачи. Пусть S — величина пройденного пути, V— начальная скорость, T—начальное время.

Несложно составить систему относительно неизвестных V и T:

$$\begin{cases} -t_1V + v_1T = v_1t_1 \\ t_2V - v_2T = v_2t_2 \end{cases}. \text{ Решив ее, получаем } \begin{cases} T = t_1t_2(v_1+v_2)/(v_1t_2 - v_2t_1) \\ V = v_1v_2(t_1+t_2)/(v_1t_2 - v_2t_1) \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $S = VT = t_1t_2(v_1+v_2)v_1v_2(t_1+t_2) / (v_1t_2 - v_2t_1)^2$.

Решили мы задачу?

Появляются вопросы. А что будет, если $v_1t_2 - v_2t_1 = 0$? Для ответа на этот вопрос выразим t_1 и t_2.

Получим

$$\begin{cases} t_1 = Sv_1/V(V - v_1) \\ t_2 = Sv_2/V(V + v_2) \end{cases}. \text{ Тогда} \begin{cases} v_1t_2 = Sv_1v_2/V(V + v_2) \\ v_2t_1 = Sv_1v_2/V(V - v_1) \end{cases}$$

Из сравнения этих дробей становится ясно, что равенство $v_1t_2 - v_2t_1 = 0$ невозможно по «природе задачи», ибо $v_1>0$, $v_2>0$, а потому $V+v_2 \neq V-v_1$.

Любопытно, что в простейшем случае, когда $v_2 = v_1$, отличие выражения $v_1t_2 - v_2t_1$ от нуля можно показать «на пальцах». Вся ситуация, описанная в задаче, иллюстрируется классической задачей на движение по реке по течению и против течения. Тогда $v_2 = v_1$ — скорость течения. Но ясно, что на одном и том же участке реки течение дольше мешает при движении против течения, чем помогает при движении по течению.

Это ещё не всё. В процессе решения появились выражения для V и T. Положительность этих выражений при конкретных данных совсем не очевидна. Для заострения ситуации возьмем численный пример.

Пусть $v_1= 2$, $v_2= 1$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Тогда получаем (согласно решению для общего случая) , что $S = 4$.Тот же ответ ($S = 4$) мы получим, если возьмём такие данные: $v_1= 1$, $v_2= 2$, $t_1 = 2$, $t_2 = 1$.

Но! В первом случае вычисления дают $V= 2$ и $T=2$, а во втором случае получаем, что $V= -2$ и $T= -2$.

Будем ли мы считать задачу решённой в этих конкретных случаях после получения ответа на вопрос задачи ($S = 4$)?

Думаю, что этого делать не стоит. Очень не хочется перемножать заведомую чепуху, хотя в результате этого перемножения и получается верный результат. А истолковать, следуя И. Тодгентеру, значения $V=-2$ и $T= -2$ я не смог.

Окончательная ясность приходит после того, как мы убеждаемся, что выражение $v_1t_2 - v_2t_1$ всегда меньше нуля. (Соответствующие выкладки очевидны, если сравнить две дроби, полученные при нахождении v_1t_2 и v_2t_1.)

Я рассказываю ученикам по случаю историю открытия позитрона. Из уравнений, полученных П. Дираком, следовало, что возможны состояния электрона, когда его энергия отрицательна. Размышляя над этим, П.Дирак предположил существование новой частицы, что и было подтверждено экспериментально. И добавляю, что гораздо раньше П.Дирак как-то решал некую арифметическую задачу про рыбаков. И на вопрос задачи «Сколько было поймано одним из них?» дал в качестве ответа отрицательное число. Как говорится, сказка — ложь...

Конечно, оценивая «предответ» из соображений «здравого смысла», мы как будто покидаем сферы математики. Но что поделаешь?

Известно, что «здравый смысл» может подвести, но это не значит, что его нужно вообще запретить для употребления. Писатель и математик И. Грекова как-то сказала: «Печально положение, когда математика начинает глушить здравый смысл. Из двух альтернатив: «математика без здравого смысла» и «здравый смысл без математики» — предпочтение, безусловно, надо отдать второй. Разумеется, всего лучше, когда присутствует и то, и другое, когда математические расчёты все время проверяются на здравый смысл. Но так бывает не всегда.».

Пример торжества математики над здравым смыслом: претензии к ученику, отбросившему скорость 15/17 км/ч как неправдоподобную, и признание безупречности ответа (-4) л.

Проверка-2 может быть непростым делом.

Вот задача: «В треугольнике ABC $AB = 1$, $AC=2$, $\angle BAC= 120°$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K. Чему равно расстояние KL от K до AB? (Рис.63)

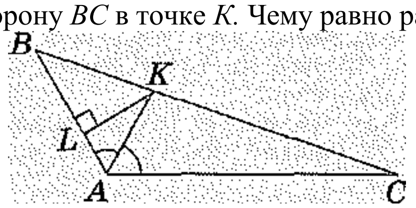


Рис. 63.

Одно из решений таково. Пусть $KL = x$. Тогда $AL = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $BL = 1 - \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Найдя $BC=\sqrt{7}$ (по теореме косинуса) и $BK = \frac{\sqrt{7}}{3}$ (по свойству биссектрисы угла треугольника), запишем теорему Пифагора для треугольника KLB: $x^2 +(1 - \frac{x}{\sqrt{3}})^2 =(\frac{\sqrt{7}}{3})^2$. Отсюда получаем, что

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ или $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Оба корня положительны, каждый из них удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование треугольника *KLB.* Так что же — подходят оба «предответа»? Ан нет! Из геометрической природы задачи ясно, что данная конфигурация единственна, а потому один из найденных корней лишний. Налицо противоречие. Но какой же из найденных корней лишний?

Чтобы «изловить» посторонний корень, можно решить задачу другим способом и получить искомое расстояние равным $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Тут становится как-то неуютно: неужели для отыскания постороннего корня действительно необходимо второе решение?

Некая настырность в поисках разумных и неучтённых ограничений на неизвестные величины приводит к рассмотрению треугольника *AKL.* Легко вычисляется *AK: AK*= $\dfrac{2}{3}$. Проверим существование этого треугольника при найденных нами значениях и увидим, что неравенство треугольника выполняется только для второго найденного значения. И значит, ответ таков: искомое расстояние равно $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Тут бы и вздохнуть с облегчением, но появляются противные вопросики.

Вот первый. Как же так, ограничения естественные, возникшие в процессе решения из треугольника *KLB*, не работают, а приводят к ответу ограничения какие-то «боковые»? Почему?

Вот второй. Мы знаем, что искомая величина может быть связана с многими частями исходной конфигурации; так что же, выписывать всевозможные при этом ограничения? Сколько же это потребует времени и усилий!

Вот третий. А откуда всё-таки взялся лишний корень при первом решении?

Самый любопытный — третий вопрос. На него и ответим. Сосредоточимся на треугольнике *ABK,* В нем известны: $AB=1$, $BK=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ и $\angle BAK = 60°$. А требуется найти *KL*. Так вот, этими тремя условиями треугольник *ABK* определён неоднозначно (две стороны и угол против одной из них!). Двум положениям точки *К* (K_1 и K_2) соответствуют два различных расстояния от *К* до *AB.* Чтобы выбрать одно из этих положений, достаточно выяснить вид угла *AKB.* Из теоремы косинуса следует, что он острый, но тогда следует выбрать большее расстояние.

Вот теперь всё окончательно ясно. Но что же делать ученику, получившему в этой задаче два значения для искомого расстояния? Да ещё в том случае, когда рядом сидит сосед, нашедший всего одно решение.

Перейдём теперь к проверке-3, т. е. к проверке условия задачи на непротиворечивость. Вернёмся к той же задаче с баками с бензином. То, что условие задачи противоречиво, видно и без проверки-2. В самом деле, в третьем баке на 26 л бензина меньше, чем во втором, и на 36 л меньше, чем в первом. Значит, во всех баках не может быть меньше чем 62 л, а в условии дано, что всего было 50 л. В авторском решении противоречие в условии обнаружила проверка-2, когда мы получили в одном из баков (-4) л. Встаёт вопрос: как обнаружить противоречие в условии, если задача решалась без составления уравнения? И ещё один вопрос: а надо ли искать такие противоречия в условиях? Мне проще ответить на второй вопрос. Понимая задачу как учебную, я думаю, что ответ тут такой же, как и для проверки-2. Если мы хотим, чтобы проверка-3 делалась учеником, то должно быть предложено соответствующее задание. Если же такого задания не было, то, вообще говоря, к ученику не может быть претензий.

Что касается ответа на первый вопрос, то он сложнее. Подавляющее большинство учебных задач содержит информацию непротиворечивую и приводящую к единственному решению. Мы сами привыкли к таким задачам и учеников приучили. Вот пример из моей работы. Решали задачу про мальчика, который покупал карандаши и тетради. Даны были цена карандаша, цена тетради и общая стоимость покупки. Спрашивалось, сколько карандашей и тетрадей купил ученик. При решении получается линейное уравнение с двумя неизвестными, которое надо решить в натуральных числах. В «предответе» несколько пар чисел. Ученик Т. с оттенком недоверия прокомментировал этот результат: «Что они, сами не знают, сколько он купил?»

Вернёмся к проверке – 3. Может быть, действительно изъять из школьного курса задачи с противоречивым условием? Не будет таких задач — не будет и проблем с проверкой-3.

Однако психологи и методисты постоянно отмечают, сколь полезны задачи такого типа, а также задачи с избыточным условием, с недостаточным условием, задачи, в которых противоречат между собой условие и требование, задачи, в которых «размыта» постановка вопроса: «Можно ли доказать?», «Можно ли из этих данных получить то-то?». Такие задачи, в частности, обладают и тем достоинством, что перекидывают мостик от математики к реальной жизни. Сплошь и рядом они встречаются в человеческой практике, науке, технике. Типичные примеры таких задач я нашел, работая с литературой, в деятельности конструктора, юриста, военачальника, врача и даже учителя. Более того, насколько я понял, даже математика стала заниматься такими задачами.

Приведу некоторые примеры. Конструкторам космической техники пришлось решать такую задачу: из чего сделать сопло двигателя, если температура истекающих газов гораздо выше, чем температура плавления любого металла? Данные разведки могут противоречить друг другу. Шахматист во время партии всё время работает в условиях избыточной информации. Играя в домино, наоборот, порой норовишь заглянуть в кости к соседу. Показания свидетелей обычно противоречивы, врач затрудняется в диагнозе, учитель, взяв новый класс, далеко не сразу начинает понимать, на каком языке с ним разговаривать.

Можно ли отразить такого рода интеллектуальную деятельность при решении математических задач? Думаю, что не только можно, но и нужно.

Причём решать такие задачи можно уже в младших классах. Вот примеры:

1. В одном из карманов 5 фантиков. В одном из карманов 10 фантиков. Сколько фантиков в одном из карманов?

2. У мальчика было 10 конфет. Он дал соседу 3 конфеты, а 80% всех конфет съел сам. Сколько он съел конфет?

3. Я был на 5-м этаже 12-этажного дома. И решил покататься на лифте. Сначала я поднялся на 2-й этаж, потом спустился на 4-й, а потом поднялся на 6-й, потом опустился на 10-й, потом поднялся на 3-й. На каком этаже я оказался?

Ну и так далее. Идея ясна, а разработка её может составить методическое исследование.

Вернёмся вновь к проверке-3. Некоторую специфику такой проверки мне хотелось бы показать на геометрических задачах. В них проверка-3 сводится, по сути дела, к доказательству существования фигуры с заданными в условии свойствами, в частности с заданными значениями некоторых величин. Если задача дана в общем виде, то возникают иногда непростые ситуации исследования. Такое исследование может уводить очень далеко от исходной задачи. Вот пример тому: «Найти площадь поверхности тетраэдра, шесть рёбер которого известны». Сложить четыре площади граней — это пустяк, а выяснить, существует ли тетраэдр с заданными рёбрами,— вполне серьёзное задание.

Исследование условия задачи на непротиворечивость можно свести к таким случаям:

1. Противоречие обнаруживается в процессе вычисления неизвестной величины. Задача: «Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1, образует с основанием угол 60°, с боковой гранью угол 60°. Вычислить его объём». В процессе вычисления объёма оказывается, что квадрат одного из рёбер меньше нуля.

2. Противоречие не обнаруживается при вычислении неизвестной величины. При этом:
а) знаний ученика хватает, чтобы его быстро обнаружить. *Задача:*«Периметр треугольника равен 6. Его стороны относятся как 1:2:3. Чему равна длина его средней стороны?» Для установления противоречия достаточно вспомнить неравенство треугольника, которое здесь не выполняется;
б) знаний ученика хватает, чтобы обнаружить противоречие, но требуется специальная работа. *Задача:*«Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1. С тремя разными его рёбрами она составляет углы 30°, 45°, 60°. Вычислить его объём».Длины рёбер можно найти, умножив длину диагонали на косинус соответствующего угла, после чего получаем ответ. Однако численные данные в задаче таковы, что сумма квадратов трёх измерений параллелепипеда не равна квадрату его диагонали, что и показывает противоречивость условия.

Или такая *задача:* «Диагонали трех неравных граней прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2, 3. Чему равна диагональ самого параллелепипеда?»

Решение, Обозначим ребра параллелепипеда как *x, y, z*. Получаем систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=4 \\ z^2+x^2=9 \end{cases}.$$

Из неё следует, что $x^2+y^2+z^2=7$. Поэтому диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{7}$.Однако $\sqrt{7}<3$, и получается, что диагональ параллелепипеда меньше диагонали грани, чего не может быть.

Немного поразмышляв над рисунком параллелепипеда, мы видим, что из диагоналей его граней можно образовать треугольник. Но тогда необходимо для них выполнение неравенства треугольника, что не соблюдено в данных задачи.

Хорошо, поменяем данные. Пусть диагонали граней параллелепипеда равны 2, 3, 4. Теперь неравенство треугольника выполняется, и, естественно, мы не ждём противоречий. Проделаем те же выкладки и получим диагональ параллелепипеда, равную $\sqrt{14{,}5}$. Однако $\sqrt{14{,}5}<4$, а потому и этот ответ неверен. Опять нарушены какие-то необходимые условия существования прямоугольного параллелепипеда. Какие?

Попробуем разобраться с задачей в общем виде. Пусть исходные диагонали граней равны a, b, c ($a>b>c$). Тогда диагональ параллелепипеда d равна $\sqrt{0{,}5(a^2+b^2+c^2)}$.И необходимо выполнение неравенства $d>a$, упрощая которое мы приходим к неравенству $b^2+c^2>a^2$. Вот в чём дело. Треугольник, составленный из диагоналей граней параллелепипеда, должен быть остроугольным! Теперь ясно, почему получается противоречие с диагоналями, равными 2, 3, 4. Здесь $2^2+3^2<4^2$, а поэтому треугольник с этими сторонами тупоугольный, что и вступает в противоречие с необходимым условием существования параллелепипеда.

(Замечу, что остроугольность треугольника, образованного диагоналями граней, может быть обнаружена при внимательном рассмотрении самого параллелепипеда. Ведь каждый угол такого треугольника меньше соответствующего угла в грани параллелепипеда, т. е. меньше прямого угла.

И вот уже новый вопрос: а является ли это условие достаточным для существования прямоугольного параллелепипеда?

И, наконец, вопрос для обсуждения: давать ли такую задачу вообще и если давать, то в какой редакции и в каком месте курса?

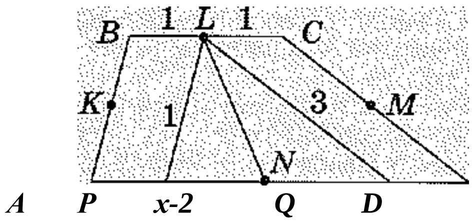
А вот задача, сюжет которой взят из вступительных экзаменов в один из петербургских вузов: найти угол между соседними боковыми гранями правильной четырёхугольной пирамиды , если расстояние от центра её основания до бокового ребра в два раза больше расстояния от него до боковой грани. Ответ - 60^0 - получается чуть ли не устно, но он не является верным, так как такой угол всегда тупой, что следует сразу же хотя бы из теоремы косинусов для трёхгранного угла. Исследование этой задачи в общем виде показывает, что отношение этих расстояний больше $\sqrt{2}$ в любой такой пирамиде, а потому условие задачи противоречиво.

в) знаний ученика может быть недостаточно для обнаружения противоречия. Задача: «Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 2. Чему равна гипотенуза треугольника?» Возможен такой вариант изложения планиметрии, когда площадь прямоугольного треугольника изучается до теоремы Пифагора. Тогда гипотенуза может быть найдена как частное от деления произведения катетов на высоту к гипотенузе (лучше сказать: произведение двух высот делится на третью высоту). После знакомства учеников с теоремой Пифагора оказывается, что вычисленная таким образом гипотенуза не удовлетворяет теореме Пифагора.

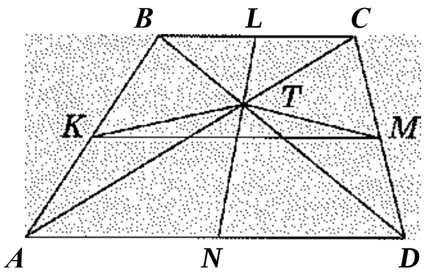
Надо заметить, что противоречие может обнаруживаться при одном способе решения и не обнаруживаться при другом. Вот пример: «Найти tgα, если $0{,}5\pi<\alpha<\pi$ и $\sin(\alpha/2)=0{,}6$». В первом решении мы найдём сначала $\cos(0{,}5\alpha)=0{,}8$. Затем находим $\sin\alpha=0{,}96$, $\cos\alpha=0{,}28$ по формулам двойных углов и получаем положительный тангенс угла во второй четверти, что неверно. Но cosα можно найти, зная sin α и то, что угол α лежит во второй четверти. Тогда косинус получится отрицательным и соответственно тангенс отрицательным. При втором способе решения противоречие в условии не обнаруживается. Но оно существует, о чём говорит сам факт расхождения полученных результатов при вычислении тангенса двумя способами. Его можно найти, анализируя условие. В самом деле, так как (π/4) < (α/2) < (π/2) , то sin (α/2) > $\frac{\sqrt{2}}{2}$ > 0,6.

Рассмотрим ещё одну *задачу:*

В трапеции *ABCD AD* — большее основание, *AB*= 1*, BC* = 2*, CO* = 3. Найдите *AD,* если равны средние линии трапеции (рис. 64, *а).*



а)



б)

Рис. 64 а), б)

Обозначим *AD = x,* середины сторон *AB, BC, CD, DA* соответственно *К, L, M, N.* Заметим, что *КМ*= (*x* + 2)⁄2.

Проведем *LP* параллельно *AB* и *LQ* параллельно *CD.* Тогда получим, что *AP* =1, *QD*=1, *PQ* = *x*-2.

В треугольнике *PQL LN* является медианой. Так как *KN*=*КМ,* то *LN* = (*x* + 2)⁄2,

Из треугольника *PLQ* запишем выражение, в котором участвует медиана *LN:*
$(2LN)^2 + PQ^2 = 2\,(LP^2 + LQ^2)$. Отсюда получим такое уравнение: $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 20$**.** Решая его, получим $x = \sqrt{6}$.

Зададимся вопросом: будет ли найденное значение для величины *x* ответом в задаче? Нет, не будет. Мы получили пока только «предответ». Так как для решения задачи было составлено уравнение, то на переменную *x* необходимо наложить ограничения, вытекающие из условия задачи. Для начала заметим, что *x*>2, так как *AD* — большее основание трапеции. Далее, так как *AD*<*AB* + *BC*+*CD,* то *x*<6. Итак, 2< *x* <6. Найденное нами значение *x* удовлетворяет этому неравенству. И вроде бы наш «предответ» становится ответом.

Но вдруг требуется что-нибудь ещё? Оказывается, да. В решении использовался треугольник *PLQ*. Для его существования необходимо, чтобы для его сторон выполнялось неравенство треугольника. Поэтому должны одновременно выполняться такие неравенства:

X – 2 < 4, 1< *x* - 2 + 3, 3 < *x* – 2 + 1. Решив эту систему, получаем, что 4 < *x* < 6.

И что же мы видим? Найденный нами «предответ» не удовлетворяет новым ограничениям. А потому не является ответом. Но тогда наша задача не имеет решения.

И появляются новые вопросы. Вот один из них: «Почему при выбранных данных задача не имеет решения? А какими должны быть данные, чтобы задача имела решение?»

Чтобы разобраться в этом, решим задачу в общем виде. При этом попытаемся выяснить, какие из найденных нами ограничений на параметры обеспечивают существование решения. Иначе говоря, какие из полученных необходимых условий являются и достаточными?

Пусть в трапеции *ABCD AD = a, BC*=*b, CD = c, AD = d, d > b.* В соответствии с предыдущими выкладками получим: $(d + b)^2 + (d - b)^2 = 2\,(a^2 + c^2)$, откуда следует, что $d^2 = a^2 + c^2 - b^2$,

$d = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.   (1)

Выпишем первоначальные ограничения на значение *d,* исходя из того, что *AD*>*BC, AD*<*AB* + *BC*+*CD*:

$\sqrt{a^2+c^2-b^2} > b$, $\sqrt{a^2+c^2-b^2} < a+b+c$.

Второе неравенство выполняется всегда, а первое неравенство приводится к такому:

$b^2 < (a^2+c)/2.$ (2)

Однако выполнение неравенства (2) не является достаточным для существования решения — именно это мы и видели в исходной задаче: $2^2 < (1^2 + 3^2) / 2$, а решение не существует. Поэтому поиск продолжается.

Из треугольника *PLQ* имеем систему таких неравенств:

$d - b < a + c$, $a < d - b + c$, $c < d - b + a$. (3)

Она приводится к неравенству $b + |a-c| < d < a + b + c$. Считая для определённости, что $a>c$, мы приходим к неравенству

$$b + a - c < \sqrt{a^2+c^2-b^2} < a+b+c. \qquad (4)$$

Правая часть неравенства выполняется всегда, а левая часть неравенства после упрощений приводится к такому виду $b<c$ (5)

Итак, в трапеции с равными средними линиями необходимо выполнение неравенства (5). Перескажем его словами: известное меньшее основание трапеции должно быть **короче** наименьшей боковой стороны.

Становится ясно, почему исходная задача не имела решения: в ней меньшее основание трапеции равно 2 и **длиннее** наименьшей боковой стороны, равной 1. И если бы мы знали про ограничение (5) заранее, то никакого уравнения можно было не составлять.

Теперь надо убедиться в том, что неравенство (5) является достаточным для получения ответа. Иначе говоря, требуется доказать, что при выполнении неравенства (5) существует неравнобокая трапеция, в которой равны средние линии. Для этого достаточно доказать существование треугольника *PLQ* со сторонами a, c, $\sqrt{a^2+c^2-b^2} - b$. Записав три неравенства треугольника — для каждой его стороны, мы легко убедимся в том, что они все выполняются при условии $b<c<a$. В этом месте кончается геометрия, а потому напрашивается «опустить занавес».

Впрочем, нет. Поиски необходимых условий могут быть достаточно занимательными.

Вернёмся к задаче в общем виде. Равенство (1) хорошо известно в «мире четырёхугольников». Оно равносильно перпендикулярности диагоналей четырехугольника со сторонами *a, b, c, d*. (Вот краткое тому доказательство. Четырехугольник *KLMN*, вершины которого лежат в серединах сторон четырёхугольника, в нашем случае трапеции,— параллелограмм. Равенство средних линий данной трапеции равносильно равенству диагоналей параллелограмма *KLMN*. Параллелограмм с равными диагоналями — это прямоугольник. Поэтому *KL* перпендикулярно *LM*. Но $KL \parallel AC$, $LM \parallel BD$, и, значит, *AC* перпендикулярно *BD*.

Сделаем ещё один рисунок (рис.62, б). Пусть точка *T*—точка пересечения диагоналей трапеции. Известно, что она лежит на средней линии *LN*. Треугольники *TAB, TBC, TCD, TDA* прямоугольные. Поэтому $TK=AB/2 = a/2$, $TM=CD/2 = c/2$. Отсюда имеем $TK+TM=(a + c)/2$. Для точек *K, T, M* имеем $TK+ TM \geq KM$, а в трапеции даже такое: $TK+TM>KM$, откуда $0{,}5(a+ c)> 0{,}5(b + d)$. Поэтому приходим к неравенству $d < a + c - b$. Тем самым мы нашли ещё одно необходимое условие на величину *d*. И оказывается, неравенство (4) требуется усилить. Необходимо, чтобы выполнялось такое неравенство:

$$b + a - c < d < a + c - b. \qquad (6)$$

Это что же — новое необходимое условие, ещё не учтённое нами? Нет! Ведь мы уже установили, что выполнение неравенства (5) является достаточным для существования такой трапеции. Значит, при выполнении этого ограничения должна выполняться и правая часть неравенства (6). Так оно и происходит. Чтобы убедиться в этом, достаточно решить относительно параметра *b* неравенство $\sqrt{a^2+c^2-b^2} < a + c - b$ и увидеть, что оно верно при $b<c$.

Я понимал, что обсуждение вопроса о проверке не может завершиться мнением Г. Дорофеева. Так и произошло. «Математика в школе» в № 2 за 1986 год поместила две публикации: «Знакомить учащихся с условием задания геометрических фигур» — автор Г. Недогарок и «К решению некоторых задач нужны указания» — автор П. Джанджгава. Оба автора пишут о задачах с противоречивым условием — это раз, и оба перенесли свой разговор на геометрию—это два. Первый автор описывает свой опыт работы по решению такого рода задач; второй приводит пример из учебника А.

Погорелова и примеры из материалов самого журнала, в которых существование фигуры, заданной условием, находится под вопросом или попросту невозможно. Один из этих примеров я приведу. «Сторона правильного многоугольника a = 3 см, а радиус вписанной окружности r = 2 см. Найдите радиус R описанной окружности». Разбирая эту задачу, можно увидеть, что такого правильного многоугольника не существует. Что советует в этом случае делать П. Джанджгава? Предлагает провести исследование такой фигуры на существование и записывать ответ в общем виде так: $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$,если $\frac{a}{2r}=tg\frac{\pi}{n}$ для некоторого $n \in N$, n>3.

А что советует в такой ситуации Г. Недогарок? Предлагает строить данную фигуру и решать задачу только в том случае, если она может быть построена. (Эта рекомендация носит общий характер, поэтому я позволил себе использовать её для данной задачи.) Данный многоугольник построить невозможно, а потому задача, как считает автор, решения не имеет. Мне было очень любопытно читать всё это, ибо я увидел точки зрения, не совпадающие с моей.

Ну а что скажет по этому вопросу Г. Дорофеев? И впрямь, в № 5 «Математики в школе» за 1987 год появилась его статья «О существовании конфигурации в геометрических задачах». Он по-прежнему разделяет логический и методический (здесь дидактический) аспекты в задаче. А «...логика ситуаций в текстовых и геометрических задачах совершенно идентична». Есть, правда, в геометрических задачах по сравнению с текстовыми некоторая специфика, но она не существенна. Но раз логика одна и та же, то и работать в геометрических задачах следует так же, как в текстовых. В частности, в задаче с многоугольником, коль скоро из текста условия задачи вытекает его существование, никаких дополнительных ограничений в ответе делать не надо. Так как при выбранных числовых значениях получается противоречивым условие, то это недосмотр автора задачи — в противном случае нужны необходимые комментарии. Из дальнейшего текста статьи видно, что автор скорее противник задач с ложными данными.

Г. Дорофеев последователен в своём желании добиться максимально возможной точности от языка задачи. Он пишет здесь, в частности, о том, что при формулировке задач следует избегать модальностей, которые обычно выражаются словами «должен», «может», «нужно» и т. п. Они допускают неоднозначные толкования, что крайне нежелательно. Автор подчёркивает трудности в осуществлении такого стремления, так как естественный язык «не всегда достаточно точен». Своеобразной иллюстрацией этому положению статьи является пример, приведённый автором: «...свободная от неясностей формулировка... может быть следующей. Дан треугольник ABC со сторонами AB = 4, BC = 5. Найти длину стороны AC, если известно, кроме того, что угол B больше 120°». Дальше идет решение, а затем ответ: «Длина стороны AC — любое число, большее $\sqrt{61}$ и меньше 9».

Но если уж быть занудой от языка, то мы разве нашли длину AC? Мы нашли её границы. Конечно, изъясняться стоит как можно точнее, но давайте вспомним притчу о трёх апельсинах.

Многолетние размышления над этими вопросами, над предложениями Г.Дорофеева, помогли мне сформировать собственную точку зрения, не хочу сказать — окончательную и, разумеется, не бесспорную. Но я могу предложить её ученикам.

Сопоставляя журнальную полемику с собственной практикой, я пришёл к мысли, что вряд ли стоит стремиться к формализации , обучая решению задач, и тем более к канонизации какой-либо точки зрения. Представим себе, что мы приняли сторону Г. Дорофеева и находим максимум квадратного трёхчлена. Ученик находит единственную получающуюся критическую точку и объявляет ее точкой максимума просто потому, что так спрашивается,— кого из моих коллег такое устроит?

Я понимаю термин «задача» достаточно широко: имеется некая информация, из которой предлагается получить другую информацию. При этом «всё может быть» — исходная информация не обязана быть такой, которая обязательно приводит к результату, причем единственному. Более того, задача в некотором смысле даже не столько сам текст, сколько тройка (учитель, текст, ученик). Один и тот же текст может пониматься по-разному, в зависимости от того, кто находится слева и справа от него в этой тройке, что хочет учитель и что может ученик. Вот несколько примеров, подтверждающих такое понимание.

Задание «решить уравнение $x^2 = a$» приводит к разным ответам в зависимости от того, с какими числами знаком ученик. Да и запись $x^2=a$ сама по себе ещё не задача. Её можно понимать как уравнение, которое надо решить, или как задание нарисовать множество точек на плоскости, удовлетворяющих этому уравнению (в системе координат (x,a), или как задание назвать фигуру в пространстве, отвечающую этому условию. А может быть, мы хотим проверить как раз способность ученика увидеть разные ответы об искомой геометрической фигуре в зависимости от того, где фигура ищется: на плоскости или в пространстве.

Для «закрепления пройденного» решим всё же такую задачку: «Периметр треугольника равен 6, его стороны относятся как 1:2:3. Чему равна его средняя по величине сторона?» Решим её в соответствии с приведенными рекомендациями, как я их понял.

1. В. Болтянский.

Обозначим меньшую сторону x. Тогда получим уравнение $x + 2x + 3x = 6 \Leftrightarrow 6x = 6$.Отсюда x=1. Согласно условию $0 < x < 6, 0 < 2x < 6,\ 0 < 3x < 6,, x + 2x > 3x$.

Так как последнее неравенство не выполняется при найденном значении x, то ответ таков: задача не имеет решения.

2. Г.Дорофеев.

Задача сформулирована как задача «на реализованную ситуацию». Значит, полученное значение для x проверять не надо, а потому ответ такой: средняя сторона треугольника равна 2.

Но ещё лучше эту задачу детям не предлагать.

3. П. Джанджгава.

Ответ: средняя сторона треугольника равна 2, если такой треугольник существует.

4. Г. Недогарок.

Ответ: так как такой треугольник построить нельзя, то задача не имеет решения.

5. Моя точка зрения.

Всё зависит от того, при каких условиях появилась эта задача. Если мы учили проверке-3 и хотим выяснить, как её делают ученики, то ответ: задача не имеет решения.

Если мы хотим специально обратить внимание на проверку-3, то задачу надо дополнить вопросом: «Будет ли при этом выполняться неравенство треугольника?» После чего ответ: задача не имеет решения.

Если же мы ещё не обучали проверке-3, то ответ: средняя сторона равна 2.

Чуть - чуть о задачах с недостаточным условием. Возьмем очень простой пример: " Чему равна средняя линия треугольника, параллельная его стороне, которая равна 2"? При этом мы сделаем вид, что не знаем соответствующей теоремы о средней линии треугольника. Ответ « 1» моментально получается из такого рассуждения (не буду называть его доказательством). Треугольник не определяется одной его стороной. Если предлагается всё же найти какой-либо его элемент, то он не зависит от вида треугольника, иначе говоря, является константой. Найдём её в самом простом случае - когда треугольник прямоугольный и заданная сторона является одним из катетов. Такой треугольник легко достраивается до прямоугольника, в котором этот катет является одной из сторон. Искомая средняя линия является половиной средней линии этого прямоугольника, и так как эта средняя линия прямоугольника равна 2, то средняя линия "плохо определённого " треугольника равна 1.

Более интересный пример того же рода дает соответствующее рассуждение в такой задаче: " На дуге окружности даны три точки A, B, C, причем $AB = 5$, $BC = 3$. Чему равно расстояние до прямой BC от середины этой дуги? " Задание всего двух сторон треугольника ABC не определяет однозначно описанную около него окружность, а потому исходная дуга может быть произвольной. Так как предлагается в такой неопределённой ситуации найти некий элемент данного треугольника, то этот элемент не зависит от его вида. Числа 3,5 наводят на мысль о египетском треугольнике. Итак, рассмотрим полуокружность с диаметром AB. Дальнейшее - устно.

Подведу итог. Я предлагаю трактовку, в чём-то отличную и от позиции В.Болтянского, и от позиции Г. Дорофеева.

Текстовая задача — это дидактический жанр в школьной математике. Но, работая в этом жанре, мы выражаем наше отношение к прикладной задаче. Либо мы действуем по канонам прикладной математики — составляем модель, работаем с моделью, проверяем адекватность модели

(В. Болтянский), либо отрицаем эти каноны и действуем из каких-то других (каких?) соображений (Г. Дорофеев).

Что касается геометрических задач, при решении которых используют модельные соображения, то это, как говорится, другая песня. Их содержание связано с математическими объектами, а потому эти задачи не могут считаться прикладными. Но тогда сама методология решения смотрится под другим углом. Она может быть и такой, как в прикладных задачах, но только при ясном обосновании этой точки зрения. Например, можно толковать такой взгляд дидактическими соображениями, считая его полезным для прикладных задач . На практике реализация такого взгляда требует проверки - 3 и получается чересчур хлопотной. Если я начну проверять на существование каждую геометрическую конфигурацию, описанную в задаче, то у меня просто не хватит времени для получения требуемых результатов. Это особенно наглядно в конкурсных задачах, где заданные объекты не вполне традиционны. Вот задача, опубликованная как-то в «Кванте»: «Дана треугольная пирамида *ABCD*. Скрещивающиеся рёбра *AC* и *BD* и *AD* и *BC* этой пирамиды перпендикулярны, рёбра *AB* и *CD* равны, все рёбра пирамиды касаются шара с радиусом *r*. Найдите площадь грани *ABC*». Задача решается как раз составлением системы уравнений, т. е. в решении использована некая модель. Но откуда известно, что такая пирамида существует? А если начать это выяснять, то сколько же это потребует времени? Ясно, что на практике действуют (по умолчанию) какие-то соглашения. Я полагаю, что таким разумным соглашением является следующее: «В геометрических задачах, при решении которых используются уравнения (неравенства, системы), проверка-3 делается только тогда, когда это специально оговорено составителем задачи или тем, кто её предлагает ученикам. В противном случае она не является обязательным элементом решения и к ученику, который её не сделал, не может быть никаких претензий». Похоже на то, что такая точка зрения целесообразна при решении любых геометрических задач, не имеющих прикладного характера.

На этом хотелось бы поставить точку, методисты вроде перестали говорить о проверке в текстовой задаче составлением «обратных задач», но увы... Откроем «Математику в школе» № 5 за 1999 год — статью «О способах проверки решения текстовых задач» или вот в газете «Математика. 1 сентября» N21 за 2005 год появляется статья, в которой воскрешается миф о такой проверке. Причём в рубрике «Курсы повышения квалификации».

Колесо нашей истории вернулось на прежнее место. «Всё течёт, но ничего не изменяется…», как сказал некий остроумец.

Ещё одно. В последнее время воскресла идея обучения школьников решению текстовых задач "арифметически", то есть без составления уравнений. Я помню, как в свои школьные годы решал такие задачи «по вопросам», гордясь тем, что вопросов оказалось 5,6, и т.д.

Иные методисты приводят различные "за" обучению такой технике. Такие «за» существуют, конечно, но стоит задуматься о главном. Мы учим детей математике, и на это времени толком не хватает. Так зачем же учить методам, которых нет в математике, а есть только в концепциях методистов? Всему тому полезному, что есть в "арифметическом" способе решения задач, можно научить и без него.

Разумеется, текстовые задачи с простейшими арифметическими манипуляциями можно оставить, разве что таковых манипуляций не более, скажем, чем 3. Всё остальное - от лукавого.

Вот к месту факт из биографии Ж.Адамара – выдающегося математика, к тому же автора замечательного двухтомника по элементарной геометрии. Так вот, пока его в детстве мучили арифметическими задачами, он математику почти ненавидел. Повернулся он к ней, когда в класс пришёл новый учитель и показал ему красоту предмета.

III.3 Ищите тангенсы!

Ситуация в текстовых задачах часто такова. Рассматривается некий процесс, происходящий во времени. Это может быть механическое движение, выполнение какой-либо работы, покупка товара, смешивание веществ и т.д. Выделяются три величины, характеризующие этот процесс: его объём, время и скорость протекания. Одна из них является постоянной, а две другие либо прямо-, либо обратно пропорциональными. Каждая величина может быть представлена геометрически: длиной отрезка (любая из трёх величин), площадью прямоугольника (произведение величин) или тангенсом некоторого угла (отношение величин). Например, в задаче на движение допускается такая интерпретация величин: скорость движения — это тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике, катеты которого — длины отрезков, изображающих расстояние и время (рис. 65 а); пройденное расстояние — это площадь прямоугольника, стороны которого — длины отрезков, изображающих скорость и время (рис. 65 *б*).

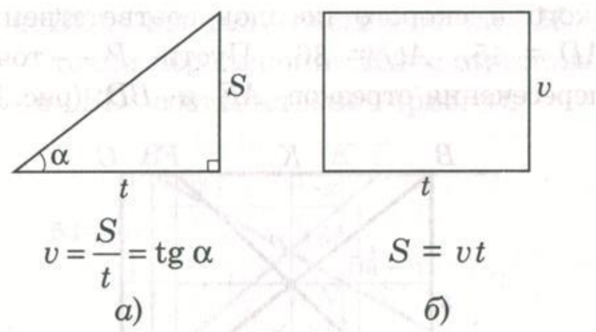


Рис. 65

Аналогично интерпретируются такие тройки величин: объём работы, время работы и производительность труда; стоимость товара, его количество и цена; масса жидкости, масса растворённого в ней вещества и его концентрация. В таком случае классификация текстовых задач согласно сюжету не имеет принципиального значения, именно поэтому далее я разбираю в основном задачи на равномерное движение.

В их интерпретации я буду использовать прямоугольники двух видов. В одном прямоугольнике стороны будут задавать время и расстояние — его используем, когда в задаче есть информация (явная или неявная) о расстояниях. Неявная информация говорит не о конкретных значениях расстояния, а, например, о том, что некие расстояния равны или известна их разность. В другом прямоугольнике стороны будут задавать время и скорость — его используем, когда в задаче есть информация о скоростях (явная или неявная). Неявная информация говорит не о конкретных значениях скоростей, а например, об их отношении или разности.

Прежде всего, укажу основное соотношение между величинами при изучении равномерного прямолинейного движения объекта
s (расстояние) ,v (скорость) , t (время): $v = s / t$. В геометрии ему соответствует формула $\text{tg}\alpha = a / b$ в прямоугольном треугольнике с катетами a и b , в котором против катета a лежит угол α. Может быть использовано также утверждение о том, что скорости разных равномерных движений пропорциональны: если одну из низ обозначить как v, то другую можно записать сразу как kv, где k - коэффициент пропорциональности. Коэффициент чаще всего находится как отношение соответствующих времён или расстояний.

Геометрическая интерпретация (одна из двух) в задаче на движение в общих чертах такова. Рисуется прямоугольник (базовый прямоугольник, короче - база) с горизонтальными и вертикальными сторонами. На его горизонтальной стороне изображаются временные промежутки, а на вертикальной стороне – промежутки расстояния. В другой интерпретации по вертикали изображаем скорость.

Условие задачи порождает её сценарий. Сценарий задачи – это рисунок, на который вначале наносятся данные из условия, затем некоторые результаты, полученные после дополнительных построений; на рисунке – база вместе с некой совокупностью отрезков.

Эту совокупность мы рисуем сами, она отражает условие и данные. Некоторые точки этой фигуры соответствуют смене скорости, местам встречи, началу и концу движения. Такие точки я буду называть узловыми (короче, узлами) сценария. Узлы могут находиться на сторонах базы, причём вершины базы (вершины исходного прямоугольника) я причислю к узлам - по умолчанию. Через узлы проводятся нужные для решения горизонтальные и вертикальные прямые (отрезки), которые проектируют узлы на стороны базы. Полученные проекции отрезков сценария соответствуют промежуткам времени , расстояниям или скоростям. Затем на рисунок наносим данные из условия и полезные для решения задачи переменные.

В базе образуются прямоугольные треугольники. Выделяем в них углы, которые дадут нам затем важную информацию. Отмечаем равенство выделенных углов. Теперь сценарий задачи готов.

Сценарий можно считать удачным, если он позволяет решить задачу. Сразу замечу, что в нём может оказаться избыточная информация, это неопасно.

Работая с тангенсами выбранных нами углов образовавшихся треугольников, получаем соотношения, которые иллюстрируют зависимости между величинами, вытекающие из условия задачи. Исследуя эти зависимости, составим уравнения или систему уравнений, решение которых приводит к ответу на вопрос задачи.

Сразу отмечу, что основное внимание в последующих задачах уделю составлению сценария и его использованию для решения, а сугубо алгебраические выкладки (они несложные) – решение уравнений и систем приводить не буду.

Для начала – примеры перевода текстовой задачи в рисунок.

Задача 1. Из поселка в деревню по одной и той же дороге с постоянными скоростями идут два пешехода. Первый пешеход вышел на час позже, но пришел на час раньше. В каком месте дороги он обогнал второго пешехода?

Р е ш е н и е. Нарисуем прямоугольник $ABCD$. На отрезке AD отложим время, а на отрезке AB — расстояние. Расстояние AK соответствует времени задержки, $AK = 1$, а расстояние LD — времени опережения, $LD = MC = 1$ (рис.66). Проведём отрезки AC и KM — схемы движения пешеходов (если угодно — графики движения в соответствующей системе координат).

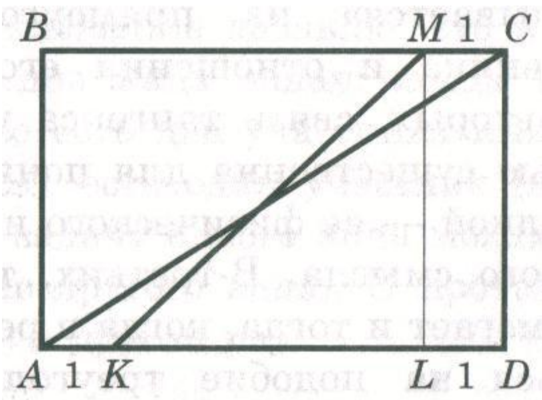


Рис. 66

Из геометрических представлений (вся конфигурация обладает центральной симметрией) ясно, что пересекутся эти отрезки в точке пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, в его центре симметрии. Отсюда делаем вывод: встреча пешеходов произошла посередине дороги. «Увидеть» это рассуждение можно за секунды.

Интересен и другой пример геометрической интерпретации —средней скорости движения.

Задача 2. Объект за время t_1 прошел расстояние s_1, а затем за время t_2 расстояние s_2. Какова средняя скорость его движения за всё время?

Р е ш е н и е. Геометрическая интерпретация такова. На горизонтальном отрезке AC отметим точку K. При этом $AK = t_1$, $KC = t_2$. Из точек K и C проведем перпендикуляры KM и CB такие, что $KM = CF = s_1$, $FB = s_2$. Проведём также отрезки AM, MB, AB , $\angle BAC = x$. (рис. 67).

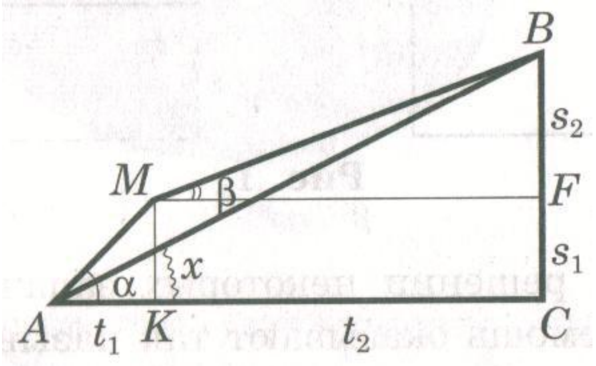


Рис. 67

Теперь имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{KM}{KA} = \frac{s_1}{t_1},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{BF}{FM} = \frac{s_2}{t_2},$$

$$\operatorname{tg}x = \frac{BC}{CA} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{t_1\operatorname{tg}\alpha + t_2\operatorname{tg}\beta}{t_1+t_2} =$$

$$= \frac{t_1}{t_1+t_2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{t_2}{t_1+t_2}\operatorname{tg}\beta.$$

Из полученного равенства для средней скорости $v_{ср.}$ двух движений со скоростями v_1 и v_2 получаем:

$$\nu_{ср.} = \left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\right)\nu_1 + \left(\frac{t_2}{t_1+t_2}\right)\nu_2.$$

*Замечание*1. Это соотношение между величинами напоминает известную геометрическую ситуацию: точка лежит на отрезке и делит его в заданном отношении, тогда координаты концов отрезка определяют координаты этой точки по аналогичной формуле.

*Замечание*2. Если принять временные промежутки t_1, t_2 за 1, то соответствующие исходные скорости v_1 и v_2 будут изображаться длинами катетов *KM* и *FB*. На таком рисунке средняя скорость будет изображаться отрезком перпендикуляра к прямой *AC* из точки *K* до пересечения с прямой *AB*. Таким образом, среднюю скорость можно увидеть на рисунке!

Задачу 3 В.Арнольд включил в свой известный задачник « От 5 до 15». О ней он говорит, что именно с неё у него начался интерес к математике.

Задача 3. Из пункта P_1 в пункт P_2 вышел турист, одновременно с ним из пункта P_2 в пункт P_1 вышел другой турист. Они встретились в полдень. Оставшуюся часть пути первый турист прошел за 9 ч, а второй — за 4 ч. Какое время показывали часы, когда туристы вышли навстречу друг другу?

Р е ш е н и е. Нарисуем базу *ABCD*. На луче *AD* будем откладывать время, на луче *AB*

— расстояние. Временные промежутки обозначим так: от начала отсчета времени (точки A) до времени встречи туристов — $AK = t$, от времени встречи до времени прихода первого туриста в пункт P_2 — $KD = 4$, от времени прихода первого туриста в пункт P_2 до времени прихода второго туриста в пункт P_1 — $DF = 5$ (рис. 66).Узел T соответствует моменту встречи туристов. Соответствующие расстояния обозначим так: $AM = S_1$, $MB = S_2$.

Сценарий готов. (рис.68)

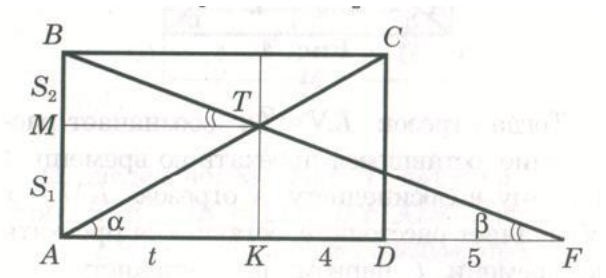


Рис. 68

Из этого рисунка видно, что

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{TK}{AK} = \frac{CD}{AD}, \text{ иначе } \frac{S_1}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t+4},$$

откуда получаем, что $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{4}{t}$.

Аналогично

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{BM}{MT} = \frac{TK}{KF}, \text{ иначе } \frac{S_2}{t} = \frac{S_1}{9},$$

откуда получаем, что $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{t}{9}$.

Приравняв выражения, полученные для $\dfrac{S_2}{S_1}$, найдем, что $t = 6$.

Итак, туристы вышли в 6.00.

Задача 4. Скорый поезд проходит расстояние между двумя городами за 36 ч, а пассажирский — за 45 ч. Через какое время поезда встретятся, если выйдут одновременно из этих городов навстречу друг другу?

Р е ш е н и е. Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB — расстояние. Отрезки AD и $AG = BF$ ($G \in AD$, $F \in BC$) показывают время движения пассажирского и скорого поездов соответственно, $AD = 45$, $AG = 36$.

Узел P — точка пересечения отрезков AF и BD .

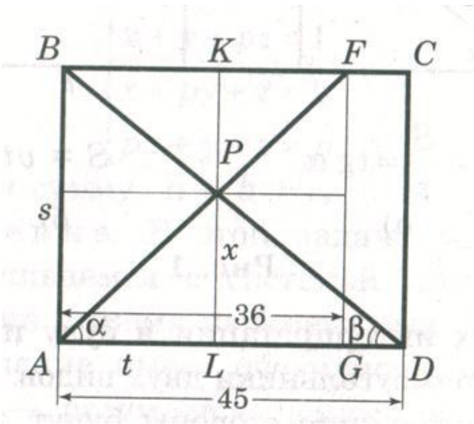


Рис. 69

Проведём через точку P вертикальный отрезок KL ($K \in BC$, $L \in AD$). Тогда отрезок LP обозначает расстояние, пройденное скорым поездом, отрезок PK — расстояние, пройденное пассажирским поездом, а отрезок AL — время до встречи поездов.

Введём обозначения: $AB = s$ (расстояние между городами), $LP = x$, $AL = t$. Сценарий готов. (Рис.69)

Запишем тангенсы углов α и β (скорости поездов):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PL}{AL} = \frac{x}{t} = \frac{s}{36},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{PL}{LD} = \frac{x}{45-t} = \frac{s}{45}.$$

Имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{t} = \dfrac{s}{36} \\ \dfrac{x}{45-t} = \dfrac{s}{45}. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим уравнение относительно t:

$$\frac{t}{45-t} = \frac{4}{5},\quad \text{откуда } t = 20.$$

О т в е т: через 20 ч.

Замечание. Возможно и более простое решение. Воспользуемся тем фактом, что если два тела, расстояние между которыми равно s, одновременно начинают двигаться навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2, то время t, через которое они встретятся, вычисляется по формуле

$$t = \frac{s}{\nu_1 + \nu_2}.$$

Пусть $AB = s$. Запишем тангенсы углов α и β на рис. 68:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PL}{AL} = \frac{FG}{AG} = \frac{s}{36},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{PL}{LD} = \frac{AB}{AD} = \frac{s}{45}.$$

Тогда искомое время

$$t = \frac{s}{\frac{s}{36} + \frac{s}{45}}, \text{ откуда } t = 20.$$

Геометрическая основа задачи 4 хорошо известна. Пусть из концов отрезка *AB* проведены в одну сторону от прямой *AB* два перпендикуляра известной длины: *AD* и *AF*. Пусть точка *P* – точка пересечения отрезков *BD* и *AF*. Требуется найти расстояние от точки *P* до прямой *AB*. Хорошо известен ответ в этой задаче, когда она задана в общем виде: если длины перпендикуляров *a* и *b*. В общем виде ответ таков: искомое расстояние равно $ab / (a + b)$. Эта формула сразу даёт нужный ответ в этой и аналогичных задачах.

Задача 5. Поезд проходит расстояние между городами *A* и *B* за 10 часов 40 минут. Если бы скорость поезда была на 10 км/ч меньше, то он пришёл бы в *B* на 2 часа 8 минут позже. Определить расстояние между городами и скорость поезда.

Р е ш е н и е. Нарисуем базу *ABCD*. На этом рисунке *AB* - расстояние между городами, *AD* - время, которое затратил бы поезд при меньшей скорости, *AM* - время, которое затратил поезд при большей скорости, *AK* - 1 час (это время введено, чтобы изобразить разность скоростей) , Узлы *G*, *H* таковы, что *GH* - разность скоростей.

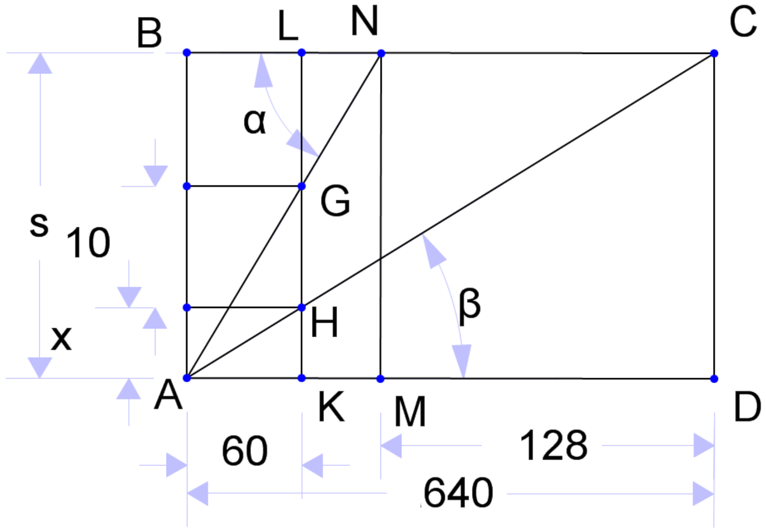


Рис. 70

Согласно условию задачи, имеем: $AD = 640$, $MD = 128$, $GH = 10$. Обозначим $KH = x$, $AB = s$. Сценарий готов. (Рис. 70)

Тогда $\text{tg}\ \alpha = (x + 10) / 60 = s / 640$, $\text{tg}\ \beta = x / 60 = s / 768$. Решая эту систему, получаем $s = 640$ км.

Ответ: расстояние между городами 640 км.

Иногда возможна такая интерпретация задачи на движение, в которой задействована лишь одна скорость (рассматривается тангенс одного угла). Вот классический пример.

Задача 6. Из пункта P_1 в пункт P_2 по течению катер плывет 5 ч, а обратно — 7 ч. За какое время доплывет из пункта P_1 в пункт P_2 плот?

Р е ш е н и е. Нарисуем базу *ABCD*. Пусть *AB* — удвоенное расстояние *AM* между пунктами, $BM = AM = KL = s$; $AK = 5$ — время, которое катер плыл по течению (из P_1 в P_2), $KD = 7$ — время, которое катер плыл против течения (из P_2 в P_1). Узел *L* соответствует времени движения по течению, узел N таков, что DN — расстояние, которое проплыл бы катер, двигаясь все 12 ч по течению.

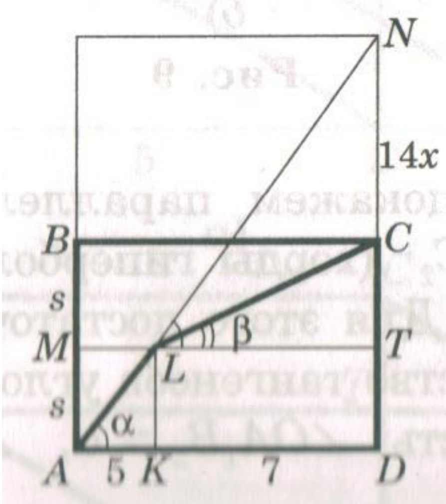


Рис. 71

Из условия задачи следует, что $CN = 2x \cdot 7$, где x — скорость течения. Сценарий готов. (Рис.71)

Тогда

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{LK}{AK} = \frac{NT}{LT}, \quad \text{иначе} \quad \frac{s}{5} = \frac{s+14x}{7}.$$

Решив это уравнение, получим $x = \frac{s}{35}$.

Отсюда время движения плота — 35 ч.

Задача 7. Турист отправляется в поход из населённого пункта к живописному водопаду, до которого 9 км, после чего возвращается. Дорога сначала идёт в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. В гору турист идёт со скоростью 4 км / ч, по ровному месту – со скоростью 5 км / ч, а под гору со скоростью 6 км / ч. Весь путь он проделал за 3 часа 41 минуту («поразительная» точность данных, как правило, обеспечивает «хорошие» численные результаты) . Какова длина плоского участка пути ?

Р е ш е н и е. Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB — расстояние. Отрезок AD показывает время туриста в пути. Согласно условию, $AD = 3\,\frac{41}{60}$, $AB = 9$. Узлы такие: K, L - точки, которые соответствует смене скоростей на пути к водопаду; M - точка, соответствующая окончанию движения к водопаду; N, P - точки , которые соответствует смене скоростей на пути от водопада.

Обозначим $AK_2 = x$, $K_2L_2 = y$, $AK_1 = t_1$, $K_1L_1 = t_2$, $L_1M_1 = t_3$, $M_1N_1 = t_4$, $N_1P_1 = t_5$, $P_1D = t_6$. $\angle LKP = \beta$, $\angle KAK_1 = \alpha$, $\angle MLN = \gamma$.

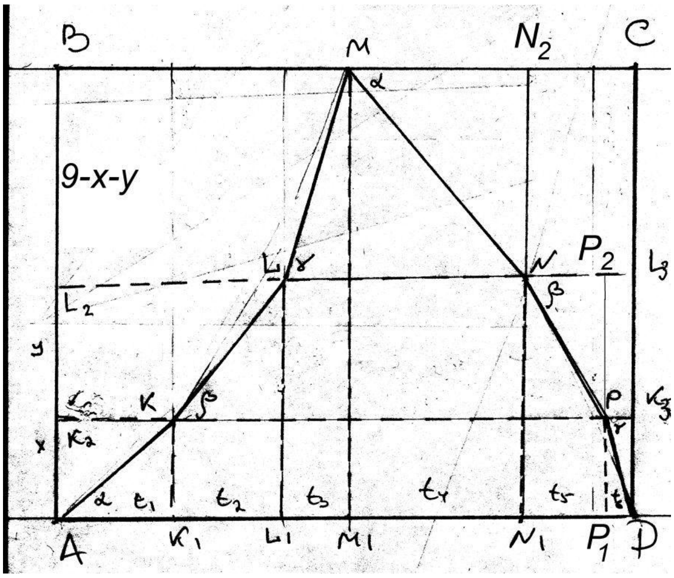


Рис. 72

Из условия следует, что $BL_2 = 9 - x - y$. (Также видно, что времена t_6, t_5, t_4 связаны соответственно с временами t_1, t_2, t_3 , но не надо «бояться» вводить много переменных, в дальнейшей работе постепенно исключая их из рассмотрения.) Также из условия и рисунка имеем: $\angle NMN_2 = \alpha$, $\angle PNL_3 = \beta$, $\angle DPK_3 = \gamma$. Сценарий завершён. (рис.72)

Из него имеем:

$\operatorname{tg} \alpha = x / t_1 = (9 - x - y) / t_4 = 4$, $\operatorname{tg} \beta = y / t_2 = y / t_5 = 5$.

$\operatorname{tg} \gamma = x / t_6 = (9 - x - y) / t_3 = 6$

Выразим из полученных выражений для тангенсов временные промежутки, сложим их все и решим, согласно условию, уравнение

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 3 \frac{41}{60}$.

Получим $y = 4$. Этот результат является ответом на вопрос задачи.

Задача 8. Расстояние между пунктами A и B равно s км. Одновременно из пункта A по направлению к B выходят первый и второй пешеходы, а из пункта B им навстречу – третий. Первый и третий пешеходы повстречались через 3 ч после начала движения. В тот момент, когда первый пешеход оказался в пункте B, второй пешеход находился в 10 км от этого пункта. Определите скорость второго пешехода, если известно, что скорости пешеходов постоянны, причём скорость второго пешехода больше скорости третьего на 2 км/ч, но меньше, чем скорость первого.

Р е ш е н и е. Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB — расстояние. Отрезок AD показывает время первого и второго пешеходов на всём их пути. Узлы: точка K соответствует месту встречи первого и третьего пешеходов, точка N соответствует месту, в котором находился второй пешеход в тот момент, когда встретились первый и третий пешеходы, точка Q соответствует месту, в котором оказался второй пешеход, когда первый пришёл в пункт B . $GN = AP$, $AM = KG$. Отрезок AG изображает время движения первого и третьего пешеходов до их встречи , отрезок AM изображает расстояние, которое прошёл первый пешеход до встречи с третьим, отрезок BM изображает расстояние, которое прошёл третий пешеход до встречи с первым. В соответствии с условием задачи имеем: $AG = 3$, $CQ = 10$, $AB = s$. Обозначим $DG = t$, $BM = x$, $\angle QAD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$ (рис. 71). Из условия задачи следует, что $AM = s - x$, $AP = x + 6$, $\angle ACB = \angle CAD = \beta$. Сценарий готов. (Рис. 73)

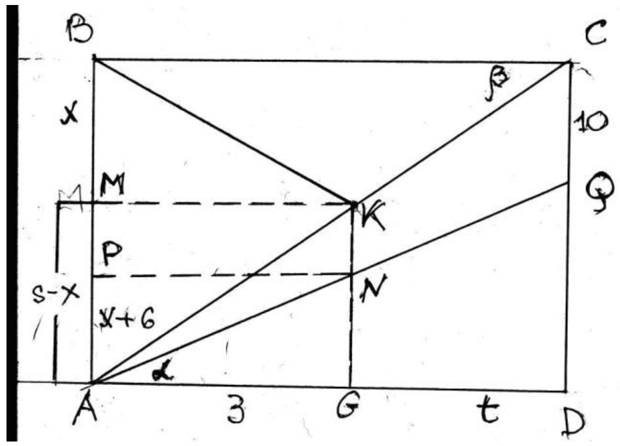


Рис. 73

Теперь получаем:

tg α = $(6 + x) / 3 = (s - 10) / (3 + t)$.

tg β = $(s - x) / 3 = s / (3 + t)$.

Из этой системы получаем $x = s (s - 16) / 2 (s - 5)$.

И окончательный результат: скорость второго пешехода равна $(s - 10) (s - 4) / 6 (s - 5)$.

В условии задачи 14 движутся также три объекта. Особенность задачи , по сравнению с предыдущей – «выход» рисунка за пределы базы.

В задаче 9 движутся три объекта, сценарий включает в себя стоянку двух объектов.

Задача 9. Из города в деревню одновременно направились бегун и первый пешеход, а в тот же момент из деревни в город вышел второй пешеход. Скорости пешеходов были равны. Встретившись, бегун и второй пешеход некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом бегун побежал с прежней скоростью, равной 12 км / ч, а второй пешеход уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал бегун, а затем через промежуток времени в два раза большей длительности, чем время стояния бегуна и второго пешехода, одновременно пришли оба пешехода. Найдите скорость пешеходов.

Р е ш е н и е. Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB — расстояние. Отрезок AD показывает время первого и второго пешеходов на всём их пути. Узлы: точка P соответствует месту встречи бегуна и второго пешеходов, точка Q соответствует месту, в котором расстались бегун и второй пешеход, точка G соответствует месту, в котором бегун финишировал.

Отрезок AK показывает время движения бегуна и второго пешехода до их встречи, отрезок KL показывает время стояния бегуна и второго пешехода, отрезок LM показывает время, за которое бегун достиг деревни, расставшись со вторым пешеходом. Отрезок AN показывает расстояние, которое преодолел бегун до встречи со вторым пешеходом, отрезок BN показывает расстояние, которое прошёл второй пешеход до встречи с бегуном. Обозначим $KL = t$, $AK = x$, $LM = y$, $AN = s_1$, $BN = s_2$, $\angle CAD = \angle PBF = \alpha$, $\angle CQR = \beta$, $\angle APN = \angle QGT = \gamma$. Из условия задачи следует, что $LD = 1{,}5x$, $MD = GC = 2t$. Сценарий готов (рис.74).

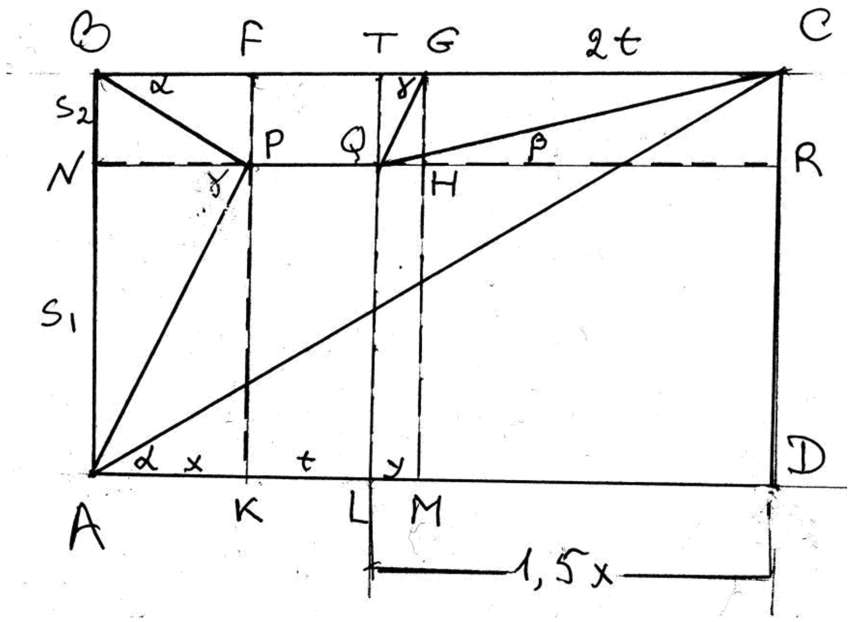


Рис. 74

Из него видно, что

$\operatorname{tg} \alpha = (s_1 + s_2) / (2{,}5x + t) = s_2 / x$.

$\operatorname{tg} \beta = s_2 / 1{,}5x$,

$12 = \operatorname{tg} \gamma = s_2 / y = s_1 / x$.

Решив эту систему, учтя, что $y = 1{,}5x - 2t$, получим $\operatorname{tg} \alpha = 6$.

(При решении системы может возникнуть необходимость ввести дополнительную переменную x / t или – при другом способе – решать однородное уравнение второй степени с переменными x и t .)

В условии задачи 10 возвращаемся к двум объектам, сценарий допускает несколько вариантов.

Задача 10. Путь из города *A* в город *B*, расстояние между которыми 200 км, пролегает сначала по шоссе, затем по грунтовой дороге. Из города *A* в город *B* выехал первый автомобиль, скорость которого на шоссе равна 80 км /ч, а по грунтовой дороге – 60 км / ч. Одновременно с первым из города *B* в город *A* выехал второй автомобиль, скорость которого по шоссе равна 60 км / ч, а по грунтовой дороге – 50 км / ч. Известно, что автомобили встретились через 1 ч 30 мин после своего выезда. Определите, на сколько раньше первый автомобиль прибыл в город *B*, чем второй автомобиль – в город *A*.

Р е ш е н и е. Поскольку в условии задачи не указано, где встретились автомобили – на шоссе или на грунтовой дороге, то придётся рассмотреть 3 случая.

1. Рассмотрим самый простой случай, предположим, что они встретились в том месте, где шоссе пересекается с грунтовой дорогой.

Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB — расстояние. Узлы: точка M соответствует месту встречи автомобилей, точка G соответствует времени финиша второго автомобиля. Отрезок AD показывает время первого автомобиля на всём пути, отрезок AG показывает время движения на всём пути второго автомобиля, отрезок $AP = 1{,}5$ показывает время движения автомобилей до их встречи , отрезок PD показывает время движения первого автомобиля от момента встречи до конца пути, отрезок PG показывает время движения второго автомобиля от момента встречи до конца пути, отрезок AL показывает расстояние, которое прошёл первый автомобиль до встречи, отрезок LB показывает расстояние, которое прошёл второй автомобиль до встречи

Обозначим $BL = s$, $\angle MBQ = \alpha, \angle MAP = \beta$.

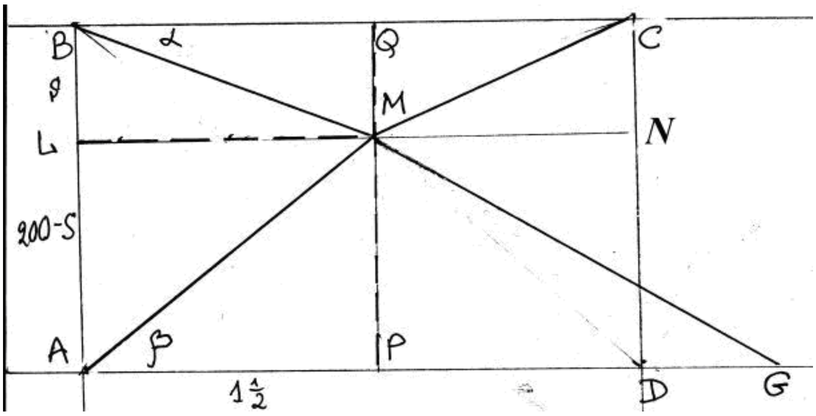


Рис. 75

Из условия следует, что $LA = 200 - s$. Сценарий готов. (Рис.75)

Из него, учитывая заданные скорости, видно, что

tg α = 50 = s / 1,5 , откуда s = 75 ,

tg β = 80 = (200 – s) / 1,5 , откуда s = 80.

Полученное противоречие показывает невозможность такого случая.
(Разумеется, этот результат ясен и без рисунка, но рисунок в этом случае полезен для полноты общей картины решения задачи.)

2. Рассмотрим случай их встречи на грунтовой дороге.

Нарисуем базу *ABCD*. На луче *AD* будем откладывать время, на луче *AB* — расстояние. Отрезок *AD* показывает время первого автомобиля на всём пути. Узлы: точка *M* соответствует месту встречи автомобилей, точка *K* соответствует месту выхода первого автомобиля на грунтовую дорогу. Отрезок *AP* = 1,5 показывает время движения автомобилей до их встречи, отрезок *PD* показывает время движения первого автомобиля от момента встречи до конца пути, отрезок *AN* показывает время движения первого автомобиля до момента выхода на грунтовую дорогу , отрезок *NP* показывает время, которое затратил первый автомобиль от момента выхода на грунтовую дорогу до встречи, отрезок *LB* показывает расстояние, которое прошёл второй автомобиль до встречи, отрезок *QL* изображает расстояние, которое прошёл первый автомобиль от момента выхода на грунтовую дорогу до встречи, отрезок *QA* изображает расстояние, которое прошёл первый автомобиль до выхода на грунтовую дорогу . Обозначим *LQ*

$= x$, $AN = t$, $BL = s$, $\angle MBC = \alpha, \angle KAN = \beta$, $\angle CKT = \gamma$. Из условия следует, что $AL = 200 - s$, Сценарий готов. (Рис. 77)

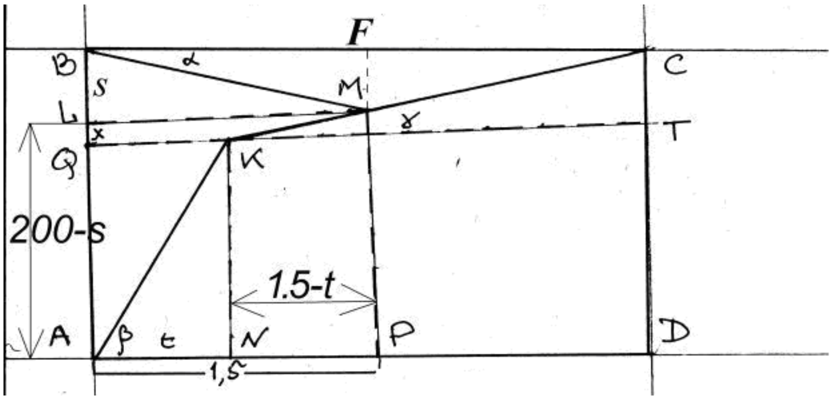


Рис. 77

Из него, учитывая заданные скорости, видно, что

tg $\alpha = 50 = s / 1{,}5$, откуда $s = 75$, тогда $AL = 125$,

tg $\beta = 80 = (125 - x) / t$, откуда $x = 125 - 80t$.

tg $\gamma = 60 = x / (1{,}5 - t)$, откуда $x = 90 - 60t$.

Приравняв полученные значения для x, получим $t = 1\frac{3}{4}$.

Так как в рассматриваемом случае $t < 1{,}5$, то получаем противоречие, которое показывает невозможность встречи автомобилей на грунтовой дороге.

3. Рассмотрим третий случай – автомобили встретились на шоссе.

Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB — расстояние. Узлы: точка N соответствует месту встречи автомобилей , точка T соответствует месту выхода второго автомобиля на шоссе. Отрезок AD показывает время до встречи, $AD = 1{,}5$, отрезок AP показывает время движения второго автомобиля по грунтовой дороге , отрезок LB показывает расстояние, которое прошёл второй автомобиль до встречи, отрезок BM показывает расстояние, которое прошёл второй автомобиль по грунтовой дороге, отрезок LM показывает расстояние, которое прошёл второй автомобиль по шоссе. Обозначим $LM = x$, $AP = t$, $\angle BTM = \alpha, \angle TNQ = \beta$. Из условия следует, что $AL = 120$, Тогда $BL = 80$, $BM = 80 - x$. Сценарий готов. (рис.78)

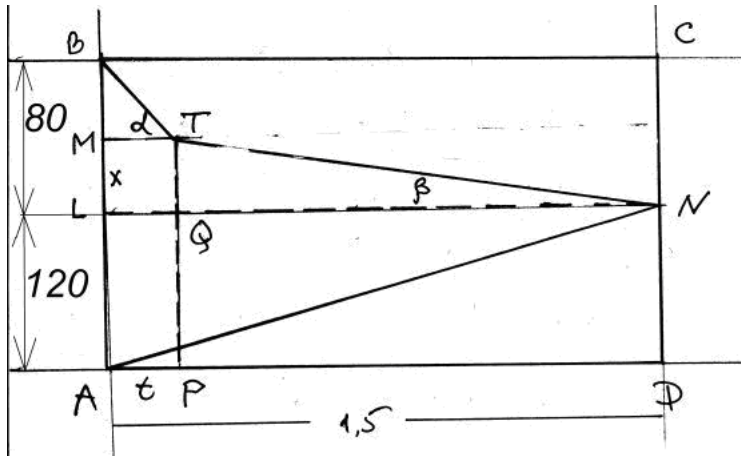


Рис. 78

Из него, учитывая заданные скорости, видно, что

tg $\alpha = 50 = (80 - x) / t$,

tg $\beta = 60 = x / (1{,}5 - t)$.

Из этой системы получим $t = 1$.

Дальнейшие вычисления очевидны.

В решении задачи 11 геометрические соображения становятся более разнообразными.

Задача 11. Две группы туристов направляются одновременно из пункта *A* в пункт *B*, находящийся в *s* км от *A*. Первая группа сначала идёт пешком. Вторая группа едет на автомобиле. Проехав некоторую часть пути, она продолжает далее двигаться пешком. Автомобиль же возвращается до встречи с первой группой, которая с этого момента продолжает путь на автомобиле и прибывает в *B* одновременно со второй группой. Какое время затратила каждая группа на путь от *A* до *B*? Скорость каждой группы туристов - *v* км/ч, скорость автомобиля - *w* км/ч.

Р е ш е н и е. Нарисуем базу *ABCD*. На луче *AD* будем откладывать время, на луче *AB* — расстояние. Отрезок *AD* показывает время первой и второй группы туристов на всём их пути. Узлы: точка *K* соответствует месту, в котором туристы второй группы начали идти пешком, точка *L* соответствует месту, в котором первая группа села на автомобиль. Отрезок *AP* показывает время движения автомобиля со второй группой туристов, отрезок *PQ* показывает время автомобиля от расставания со второй группой до встречи с первой группой, отрезок PD показывает время, которое вторая группа затратила на путь пешком. Отрезок QD показывает время, которое первая группа ехала на автомобиле, отрезок AN показывает расстояние, которое прошла первая группа пешком, отрезок NM показывает расстояние, которое проехал автомобиль без туристов, отрезок NB показывает расстояние, которое первая группа проехала на автомобиле. Обозначим $AP = x$, $PQ = y$, $QD = z$, $AN = s_1$, $NM = s_2$, $MB = s_3$, $\angle KAD = \alpha$, $\angle LAQ = \beta$. Из условия задачи (постоянства скорости автомобиля) следует равенство соответствующих тангенсов, а затем и равенство соответствующих углов, т.е. $\angle CLG = \alpha$, из постоянства скорости туристов следует по аналогичным соображениям, что $\angle CKF = \beta$. Сценарий почти готов. (Рис.79а)

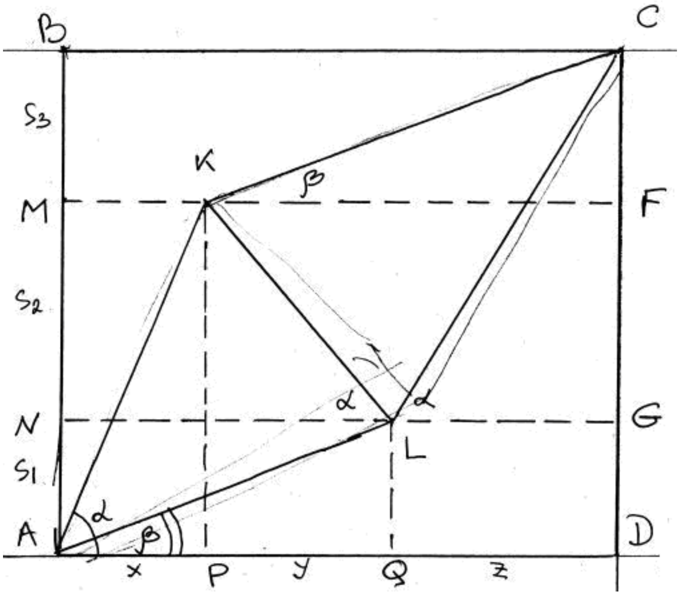


Рис. 79а

Из равенства углов KAP и CLG следует параллельность отрезков AK и LC, из равенства углов LAQ и CKF следует параллельность отрезков AL и KC. Значит, $AKCL$ - параллелограмм, откуда следует равенство его противоположных сторон: $AK = LC$, $AL = KC$. Но тогда равны и проекции этих сторон на прямые AD и AB. Отсюда следует, что $AP = QD$ ($x = z$) , $AN = MB$ ($s_1 = s_3$). Сценарий готов. (Рис. 79б)

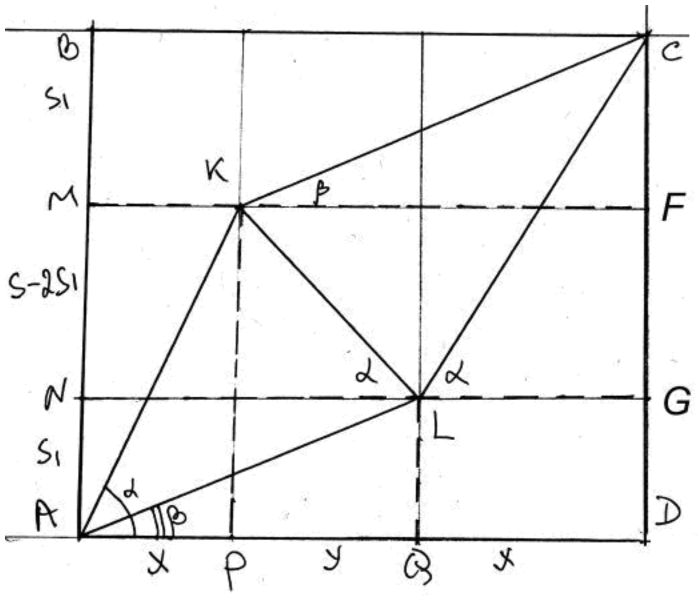


Рис. 79б

Из него видно, что

tg $\alpha = w = (s - s_1) / x = (s - 2s_1) / y$.

tg $\beta = v = s_1 / (x + y)$.

Осталось решить эту систему, что несложно, хотя и длинновато.

Ответ: время движения равно $s\,(v + 3w) / (w\,(3v + w))$.

Замечание. Несложно понять, что эта задача может быть сформулирована как чисто геометрическая – о параллелограмме внутри прямого угла, расположенного специальным образом. При этом известны углы, которые его соседние стороны образуют с одной из сторон прямого угла и его проекция на эту сторону. А найти надо его проекцию на другую сторону прямого угла.

Задача 12 решается как чисто геометрическая. Её ответ затем интерпретируется в терминах движений.

Задача 12. Два туриста вышли одновременно - один из *A* в *B*, а другой – из *B* в *A*. Каждый шёл с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в m км от *A*, второй раз – в n км от *A*. Найти расстояние между *A* и *B*.

Р е ш е н и е. Нарисуем базу *ABCD*. На луче *AD* будем откладывать время, на луче *AB* — расстояние. Отрезок *AD* показывает время второго туриста на всём пути (будем считать – для некоторого удобства - что каждый из них финишировал там же, где начал движение). Узлы: точка *K* соответствует месту, в котором туристы встретились первый раз, точка *L* соответствует месту, в котором туристы встретились второй раз, точки *P* и *M* соответствуют времени поворота, точка *Q* соответствует времени финиша туриста, вышедшего из *A*. Отрезок *AQ* показывает время первого туриста на всём пути. Отрезок *BP* показывает время движения первого туриста на путь от *A* до *B*. Отрезок BK_2 показывает время от начала движения до первой встречи, отрезок BL_1 показывает время от начала движения до второй встречи, отрезок AK_1 показывает расстояние от пункта *A*, которое прошёл первый турист до места первой встречи, отрезок BK_1 показывает расстояние от пункта *B* до места первой встречи, отрезок LL_1 показывает расстояние от пункта *B* до места второй встречи,

Обозначим $AB = a$, $K_1K = x$, $\angle KBA = \alpha$, $\angle KAB = \beta$. Из постоянства скоростей следует: $\angle PLL_1 = \beta$, $\angle CLL_1 = \alpha$

Сценарий готов. (Рис.80)

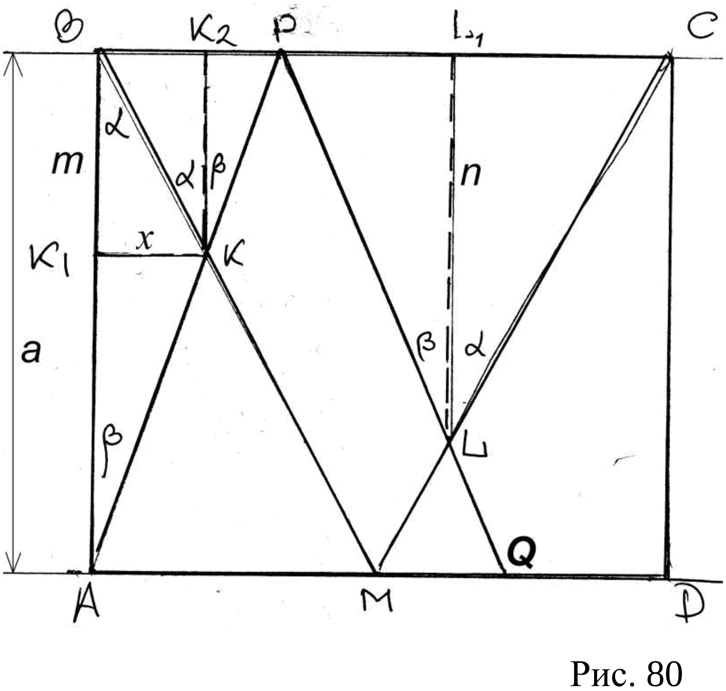


Рис. 80

Из него найдём $AD = 2a$ tgα, $BP = a$ tgβ ; $AK_1 = x$ ctgβ, $BK_1 = x$ ctgα, откуда $x = a$ / (ctgα + ctgβ) . Тогда $m = a$ ctgα / (ctgα + ctgβ) .

Далее: $CP = BC – BP = AD – BP = a$ (2tgα - tgβ), а также

$CP = n$ (tgα + tgβ), откуда получаем $n = a$ (2tgα – tg β) / (tgα + tgβ) .
Возвращаясь к условию задачи, приходим к системе
$m = a$ ctgα / (ctgα + ctgβ) , $n = a$ (2tgα – tg β) / (tgα + tgβ). Обозначим
tgα / tg β = t. Приходим к системе $m = a / (t + 1)$, $n = a (2t – 1) / (t + 1)$
Отсюда имеем $t = (m + n) / 2m$ и, окончательно, $a = (3m + n) / 2$.
Ответ: расстояние между пунктами A и B равно $(3m + n) / 2$.

В условии задачи 13 два объекта движутся в одном и том же направлении, причём по окружности. Метод решения от этого не меняется, но есть небольшая техническая деталь - рисунок выходит за пределы базы (как и в задаче про катер).

Задача 13. Две материальные точки движутся по окружности. Они начали движение из одного места и движутся равномерно, но с разными скоростями. Первая точка проходит круг на a быстрее второй. Вторая точка ещё не закончила первый круг, а вторая её уже догнала и произошло это за время b . (Время измерялось в секундах.) Какое время показывала каждая точка на одном круге?

Р е ш е н и е. Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB — расстояние. Отрезок AD показывает время второй материальной точки на одном круге. Узлы: точка M соответствует времени завершения первой точкой одного круга, точка K соответствует времени, за которое первая точка обогнала вторую на круг. Точка T - пересечение прямых AM и KP. Отрезок AN показывает время первой точки от начала движения на одном круге, отрезок AP показывает время от начала движения до первой встречи точек, отрезок $DQ = KP$ показывает расстояние от A, которое прошла вторая точка до места первой встречи, Обозначим $AP = b$, $ND = a$, $NP = x$, $AB = s$, $DQ = s_0$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle AMB = \beta$.
Далее: $MF = x$, $AN = b - x$, $PD = a - x$, $CQ = s – s_0$, $TF = s_0$, $\angle AMB = \beta$.
Сценарий готов. (Рис. 81)

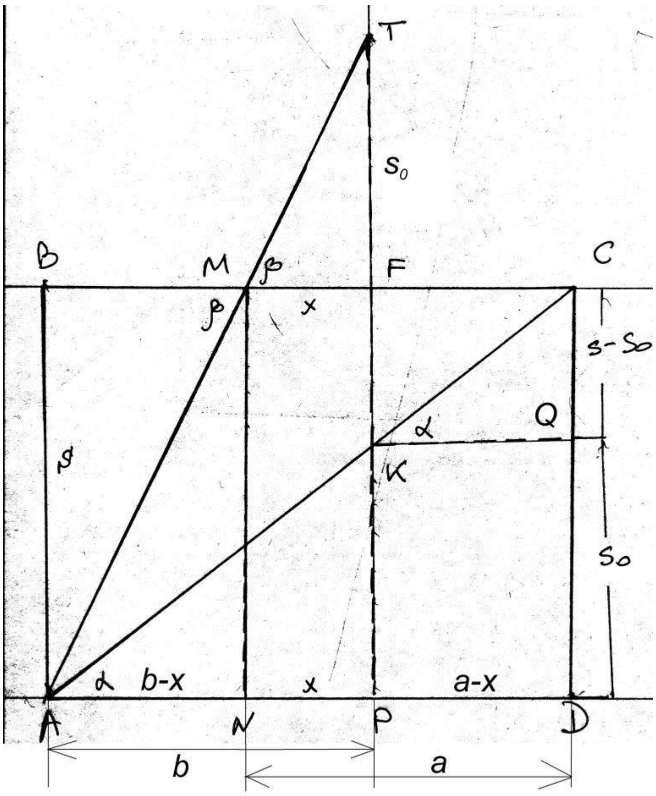


Рис. 81

Из него видно, что

$\operatorname{tg} \alpha = s_0 / b = s / a + b - x$.

$\operatorname{tg} \beta = s / (b - x) = s_0 / x$.

Для решения этой системы выразим s_0 / s из каждого уравнения. Приравняв полученные выражения для s_0 / s, получим уравнение (квадратное), из которого можно найти *x*. Полученное для *x* значение должно удовлетворять ограничениям, вытекающим из сценария . Ответ получается не очень красивый. Для получения симпатичного по виду результата, хотя бы и числового, возьмём $a = 3$, $b = 90$.

В условии задачи 14 три объекта движутся в одном и том же направлении, причём по кольцевой трассе. Рисунок также выходит за пределы базы.

Задача 14. Три гонщика стартовали одновременно и движутся с постоянными скоростями в одном и том же направлении по кольцевой трассе. В момент старта второй гонщик находился перед первым на расстоянии 1/3 длины трассы, а третий гонщик перед вторым на таком же расстоянии. Первый гонщик впервые догнал второго в момент, когда тот завершил первый круг, а ещё через 10 мин первый гонщик впервые догнал третьего. Второй гонщик тратит на круг на 2 мин 30 сек меньше, чем третий. Сколько времени тратит на круг первый гонщик?

Р е ш е н и е . Нарисуем базу *ABCD.* На луче *AD* будем откладывать время, на луче *AB* — расстояние. Отрезок *AD* показывает время первого и второго гонщиков до встречи. Узлы: точка *P* соответствует месту, в котором встретились первый и третий гонщики, точка C_1 соответствует месту, в котором встретились первый и второй гонщики, точки *A, K, L* показывают места старта первого, второго и третьего гонщиков соответственно. Отрезок *AH* показывает время первого и третьего гонщика до встречи. Отрезок AB_1 показывает расстояние, которое прошёл первый гонщик до места встречи со вторым гонщиком, отрезок *HP* показывает расстояние до места встречи первого и третьего гонщиков, отрезок *PG* показывает расстояние, пройденное третьим гонщиком до встречи с первым. Обозначим $AK = KL = LB = a$, $PT = x$, $AD = t$, $\angle PAD = \alpha$, $\angle PLN = \gamma$. Согласно условию, $DH = 10$, Сценарий готов. (Рис.82)

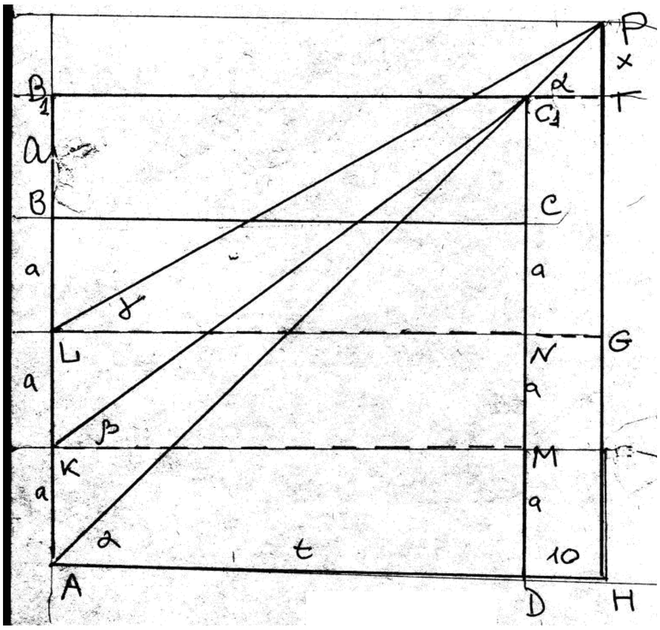


Рис. 82

Из него получаем:

tg $\alpha = 4a / t = x / 10$, tg $\beta = 3a / t$, tg $\gamma = (x + 2a) / (t + 10)$. Отсюда

$x = 40a\ /\ t$, расстояние, которое прошёл третий турист до встречи равно $2a + x = 2a + (40\ a\ /\ t)$) и tg $\gamma = 2a\ (t + 20)\ /\ t\ (t + 10)$. Тогда время третьего туриста на одном круге (его длина равна $3a$) равно $3at\ (t + 10)\ /\ 2a\ (t + 20) = 3t\ (t + 10)\ /\ 2\ (t + 20)$.
Так как время второго туриста на одном круге равно t , то из условия задачи получаем уравнение $3t\ (t + 10)\ /\ 2\ (t + 20) - t = 5/2$. Отсюда $t = 20$, tg $\alpha = a\ /\ 5$ и время первого туриста на круге – 15 минут.

Замечание. В ходе решения, ввиду кольцеобразности трассы, пришлось «надстраивать» исходный прямоугольник *ABCD* другими прямоугольниками. Такую надстройку следует учесть при решении задач о движении объектов по окружности, когда число кругов больше одного.

Перейду к задачам, в интерпретации которых используется прямоугольник второго вида (его стороны представляют время и скорость).

Задача 15. Если скорость поезда, указанную в расписании, увеличить на v_1, то он придет в конечный пункт раньше срока на время t_1. Если ту же скорость уменьшить на v_2, то поезд придет в конечный пункт с опозданием на время t_2. Каковы скорость поезда и время его движения согласно расписанию?

Р е ш е н и е. Нарисуем базу *ABCD*. На луче *AD* будем откладывать время, на луче *AB* — скорость. Пусть $AD = t_0$ — время поезда в пути согласно расписанию, $AD_1 = t_0 - t_1$ — время движения с увеличенной скоростью, $AD_2 = t_0 + t_2$ — время движения с уменьшенной скоростью; $AB = v_0$ — скорость поезда согласно расписанию, $AB_2 = v_0 - v_2$ — уменьшенная скорость, $AB_1 = v_0 + v_1$ — увеличенная скорость.

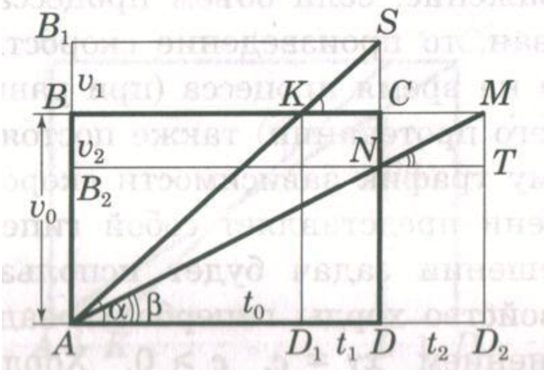


Рис. 83

Сценарий готов. (Рис. 83) На основе этого рисунка запишем тангенсы углов α и β:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SC}{KC} = \frac{KD_1}{AD_1}, \text{ иначе } \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_0}{t_0 - t_1},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{MT}{NT} = \frac{ND}{AD}, \text{ иначе } \frac{v_2}{t_2} = \frac{v_0 - v_2}{t_0}.$$

Из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\nu_1}{t_1} = \dfrac{\nu_0}{t_0 - t_1} \\ \dfrac{\nu_2}{t_2} = \dfrac{\nu_0 - \nu_2}{t_0} \end{cases}$$

находим t_0 и v_0:

$$t_0 = \frac{t_1 t_2 (v_1 + v_2)}{v_1 t_2 - v_2 t_1}, \; v_0 = \frac{v_1 v_2 (t_1 + t_2)}{v_1 t_2 - v_2 t_1}.$$

Далее будем опираться на простое соображение: если объём процесса фиксирован, то произведение скорости процесса на время процесса (при равномерном его протекании) также постоянно, а потому график зависимости скорости от времени представляет собой гиперболу. В решении задач будет использоваться свойство хорды гиперболы, заданной уравнением $xy = c$, $c > 0$. Оказывается, хорда этой гиперболы (отрезок, соединяющий две её точки) параллельна двум отрезкам, также связанным с этой гиперболой (они соединяют проекции точек гиперболы на оси координат).

Пусть C_1 и C_2 — две точки на данной гиперболе, лежащие в первой координатной четверти, A_1 и A_2 — их проекции на ось x (соответственно), а B_1 и B_2 — проекции точек C_1 и C_2 на ось y (соответственно). (Рис.84)

Сначала докажем параллельность отрезков A_1B_2 и A_2B_1 . Для этого достаточно установить, что тангенсы углов OA_1B_2 и OA_2B_1 равны, что моментально следует из уравнения гиперболы.

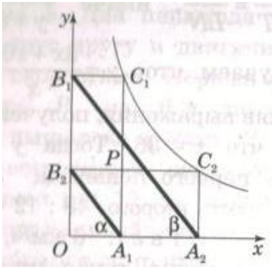


Рис. 84

Теперь докажем параллельность отрезков C_1C_2 (хорды гиперболы) и A_1B_2 (рис.85).

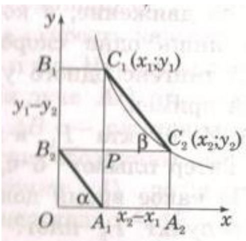


Рис. 85

Для этого достаточно установить равенство тангенсов углов OA_1B_2 и PC_2C_1. Пусть $\angle OA_1B_2 = \alpha$, $\angle PC_2C_1 = \beta$, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OB_2}{OA_1} = \frac{y_2}{x_1} = \frac{c}{x_1x_2},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{PC_1}{PC_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{c}{x_1} - \frac{c}{x_2}}{x_2 - x_1} = \frac{c}{x_1x_2}.$$

Из того, что $A_1B_2 \parallel A_2B_1$ и $A_1B_2 \parallel C_1C_2$, следует параллельность хорды C_1C_2 и отрезка A_2B_1.

Это свойство хорды гиперболы работает при решении задачи про катер, причём использоваться может любая из этих трёх параллельностей. Приведу два возможных способа решения.

Нарисуем базу $ABCD$. На луче AD будем откладывать время, на луче AB — скорость. Пусть $AD = 5$ — время, затраченное катером на движение по течению, $AK = 7$ — время, затраченное им на движение против течения, $AM = v$ — собственная скорость катера, x — скорость течения, $AB = v + x$ — скорость по течению, $AN = v - x$ — скорость против течения. Площади прямоугольников $ABCD$ и $ANLK$ соответствуют заданному расстоянию, а потому равны, значит, можно применить только что полученные результаты.

Сценарий готов. (Рис. 86)

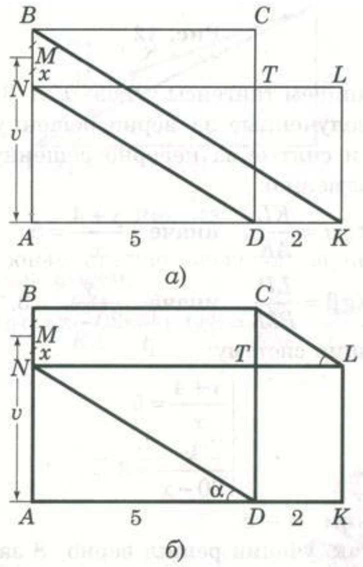


Рис. 86 а), б)

Способ 1. $DN \parallel KB$ (см. рис.86, *а*),

$$\operatorname{tg}\angle ADN = \frac{AN}{AD} = \frac{v - x}{5}, \quad \operatorname{tg}\angle AKB = \frac{AB}{AK} = \frac{v + x}{7}.$$

Так как выражения равны, то из уравнения $\frac{v-x}{5} = \frac{v+x}{7}$ получаем, что

$v = 6x$. Дальнейшее очевидно.

Способ 2. $CL \parallel DN$ (рис. 86, *б*),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AN}{AD} = \frac{CT}{TL}, \quad \text{иначе} \quad \frac{v-x}{5} = \frac{2x}{2},$$

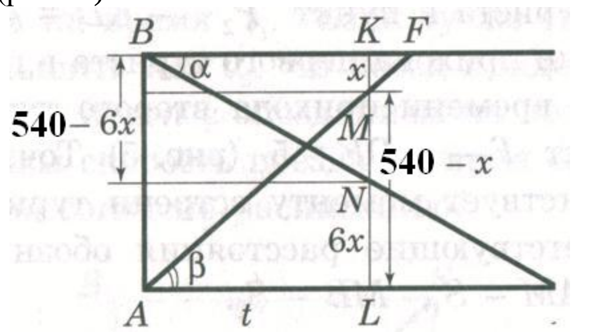
откуда $v = 6x$. Дальнейшее очевидно.

И третья параллельность приводит к тому же результату.

Умея решать задачи на движение, аналогичные тем, которые я привёл, можно решать в той же технике задачи с другим содержанием.

Задача 16. В каждом из двух сосудов было по 540 литров воды. Из первого сосуда вода вытекает со скоростью 25 литров в минуту, из второго – со скоростью 15 литров в минуту. Через сколько времени в одном из них воды останется в 6 раз больше, чем в другом?

Р е ш е н и е. Нарисуем базу *ABCD*. На горизонтальной стороне *AD* будем откладывать время, на вертикальной стороне *AB* будем откладывать объём воды в баке. На стороне *AD* отложим отрезок *AL*, длина которого обозначает искомое время *t*. Отрезок *AD* показывает время опорожнения одного сосуда. Пусть *BF* - отрезок, который изображает время опорожнения другого сосуда. Проведём вертикальный отрезок *KL*. На этом отрезке обозначим два узла: *M* и *N* - пересечения соответственно с отрезками *AF* и *BD*. Тогда отрезок *LN* обозначает объём воды оставшийся ко времени *t* в первом сосуде, а отрезок *KM* обозначает объём воды, оставшийся ко времени *t* во втором сосуде. Сценарий готов (рис.87).



(Рис. 87)

Запишем дважды тангенсы углов (скорости истекания) на этом рисунке. Получим:
tg α = (540 – 6*x*) / *t* = 15, tg β = (540 – *x*) / *t* = 25. Решая эту систему, получаем, *x* = 40 и *t* = 20.

Задача 17. Бассейн наливается первой трубой за 4 часа. Через 2 часа после открытия первой трубы открыли вторую трубу, через которую весь бассейн может наполниться за 6 часов. За какое время был наполнен весь бассейн?

Р е ш е н и е Нарисуем базу *ABCD*. На горизонтальной стороне *AD* будем откладывать время, на вертикальной стороне *AB* будем откладывать объём воды *V* в бассейне. На стороне *AD* отложим отрезок *AL*, длина которого обозначает искомое время *t*. Отрезок *AD* показывает время наполнения бассейна одной трубой. Пусть *BF* - отрезок, который изображает время бездействия другого насоса. Отрезок *GM* на луче *AD* показывает время наполнения бассейна другой трубой. Через узел *P* , соответствующий времени наполнения бассейна, проведём вертикальный отрезок *KL*.Тогда отрезок *LP* = V_1 обозначает объём воды, поступившей ко времени *t* от первой трубы, а отрезок *PK* обозначает объём воды, поступившей ко времени *t* от второй трубы. Сценарий готов (рис. 88).

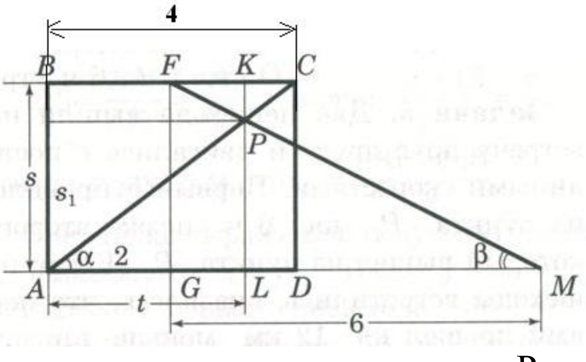


Рис. 88

Запишем дважды тангенсы углов (скорости истекания) на этом рисунке. Получим:
tg α = V_1 / *t* = *V* / 4 , tg β = V_1 / (8 - *t*) = *V* / 6. Решая эту систему, получаем *t* = 3, 2 часа.

Задача 18. Школьник во время тестовой работы решал 20 задач. За каждую верно решённую задачу он получал 5 баллов. За каждую неверно решенную задачу с него снимали 3 балла. В итоге школьник набрал 4 балла. Сколько задач он решил верно?

Р е ш е н и е. Для упрощения рисунка будем считать, что сначала школьник получал только верные ответы, а уже затем — только неверные. Нарисуем базу $ABCD$, пусть его сторона AD изображает число решённых задач, а на стороне AB отложим число набранных баллов. Пусть $AK = x$ — число задач, решённых верно, $KD = 20 - x$ — число задач, решённых неверно, AB — число баллов за верные ответы, $CM = BN = y$ — число снятых баллов, $AN = 4$ — итоговая сумма баллов. Сценарий готов. (Рис.89)

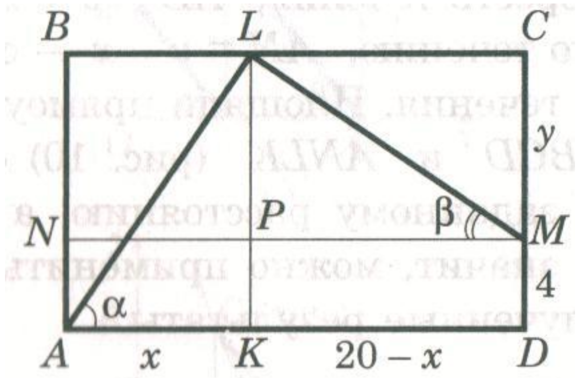


Рис. 89

Запишем тангенсы углов α и β (баллы, полученные за верно решённую задачу и снятые за неверно решённую соответственно):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{KL}{AK}, \quad \text{иначе} \quad \frac{y+4}{x} = 5,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{LP}{PM}, \quad \text{иначе} \quad \frac{y}{20-x} = 3.$$

Решив систему

$$\begin{cases} \dfrac{y+4}{x} = 5 \\ \dfrac{y}{20-x} = 3, \end{cases}$$

получим $x = 8$.

Итак, ученик решил верно 8 задач.

Замечание. Процесс, описанный в этой задаче, не является непрерывным, он дискретен, но для приведённого решения мы его полагаем непрерывным. Разумеется, в подобных ситуациях необходима коррекция полученного результата — он может быть натуральным числом.

Ещё одна подобная задача навеяна известным монологом о раках эстрадного артиста Р.Карцева: его персонаж полон переживаний в такой ситуации: вчера на рынке продавались крупные раки по 5 руб. за штуку, а сегодня раки стоят дешевле — по 3 руб. за штуку (бывали и такие цены), но они мелкие. Допустим, что на имеющуюся в наличии сумму денег персонаж мог купить мелких раков на десять больше, чем крупных. Какой суммой располагал герой монолога?

Задача 19. В колбе было 140 *г* десятипроцентного раствора марганцовки. В неё долили 60 *г* тридцатипроцентного раствора марганцовки. Каково процентное содержание марганцовки в полученном растворе?
Р е ш е н и е. Нарисуем базу $ABCD$. На стороне AD откладываем массы раствора, на стороне AB - наличие марганцовки в растворе. Концентрация марганцовки – это отношение массы марганцовки к массе раствора, то есть тангенсы соответствующих углов. На стороне AD отложим отрезок $AL = 140$ и отрезок $LD = 60$. На стороне AB отложим отрезок AK , соответствующий массе марганцовки старой концентрации, Тогда отрезок $KB = QC$ показывает массу добавленной марганцовки. Узел P соответствует моменту добавления нового раствора к старому.

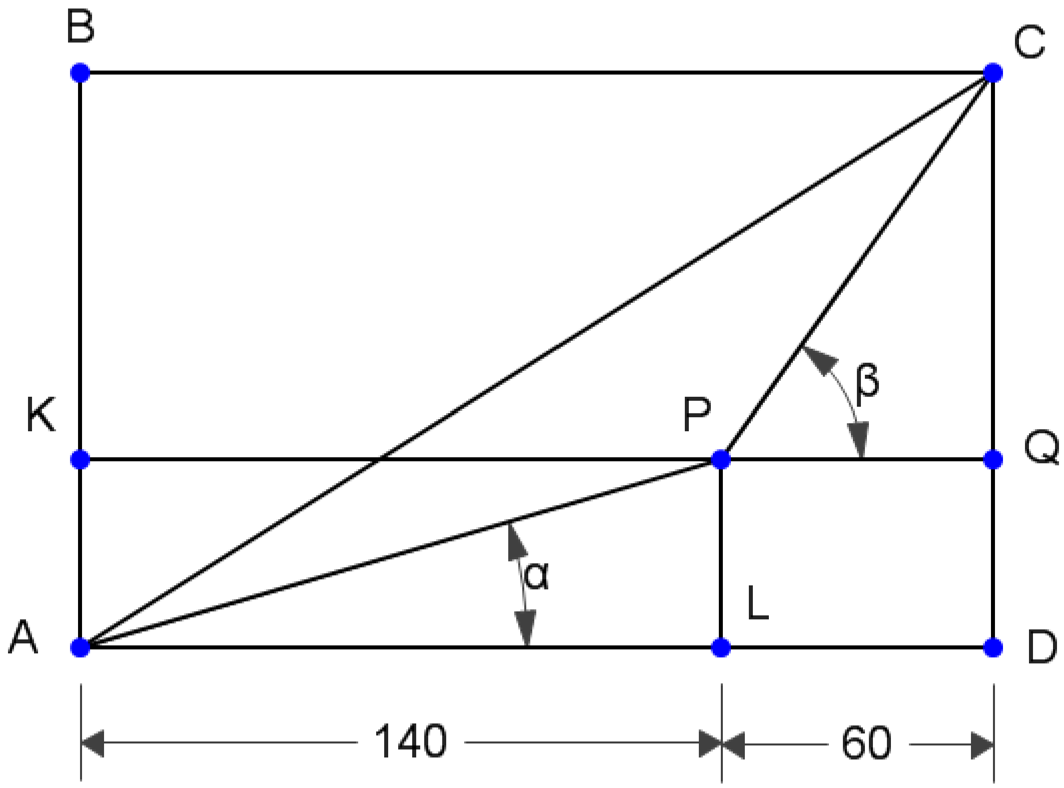


Рис. 90

Тангенс угла *PAK* равен первой концентрации и равен 0, 1; тангенс угла *CPQ* равен второй концентрации и равен 0,3; тангенс угла *CAD* равен полученной концентрации. Сценарий готов. (Рис.90)

Имеем : $\operatorname{tg}\angle CAD = CD/AD = (CQ + QD)/AD = (0{,}3\,PQ + 0{,}1\,AL)/AD =$
$(0{,}3\cdot 60 + 0{,}1\cdot 140)/200 = 0{,}16$.

Получился шестнадцатипроцентный раствор марганцовки.

Замечание. Решение этой задачи (и аналогичных задач) согласно старинному «правилу креста» можно «увидеть» и обосновать такой же геометрической иллюстрацией. «Правило креста» сводится к равенству

$\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_3-\alpha_1}=\frac{m_1}{m_2}$, в котором α_1 – наименьшая концентрация, α_2 – наибольшая концентрация, α_3 – концентрация смеси , m_1 и m_2 – исходные массы. Доказательство можно увидеть из соответствующего рисунка (аналогичного предыдущему).

Ясные связи текстовых задач с планиметрией приводят к мысли о том, что их, эти связи, можно обогатить – в первую очередь использованием разнообразных геометрических фактов. Тому уже были приведены примеры. Добавлю ещё несколько задач (без решения), указав при этом на используемую геометрию.

Задача 20.

Из пункта A в пункт B в 12.00 вышел пешеход и в это же время из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Они встретились, после чего продолжили движение в прежнем направлении, только теперь пешеход сел на велосипед, а велосипедист пошёл пешком. Скорости пешеходов, как и велосипедистов, одни и те же. Оба завершили маршрут в 16.00. В какое время они встретились?

К простому решению задачи приводит признак равнобедренного треугольника (по равенству двух его углов) .

Задача 21.

Из деревни к озеру в 8.00 вышел турист. До озера было 20 км. В 12.00 он заметил слева по ходу громадную сушину. Дойдя до озера, он тут же повернул обратно и, идя с той же скоростью, оказался у той же сушины в 14.00. На каком расстоянии от деревни находится эта сушина?

Для решения можно использовать свойства равнобедренного треугольника и центральную симметрию прямоугольника.

Задача 22.

Из пункта A в пункт B в 12.00 вышел пешеход и в это же время из пункта B в пункт A по той же дороге выехал велосипедист. В 14.00 велосипедист приехал в пункт A и в это же время из пункта B в пункт A по той же дороге выехал второй велосипедист. Второй велосипедист приехал в пункт A в 16.00 и в это же время пешеход пришёл в пункт B. Сколько времени прошло между встречами пешехода и велосипедистов?

В решении задачи используется известное свойство диагонали параллелограмма. Именно: если в параллелограмме $ABCD$ провести отрезки BK и DL (K - середина AD, L - середина BC), то диагональ AC разделится этими отрезками на равные части.

Задача 23.

Два путника вышли одновременно навстречу друг другу. Первоначальное расстояние между ними было 10 км. После встречи они продолжили движение и финишировали одновременно, когда расстояние между ними было равно 2 км. С момента их старта до финиша прошло 6 часов. Всё это время они шли с одной и той же скоростью. Через сколько часов после старта они встретились?

В решении используется подобие треугольников.

Задача 24.

Два путника вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B в 12.00. Первый в 15.00 финишировал в B , а второй – в 18.00 в A. Сколько было времени, когда они встретились?

В решении задачи используется свойство медиан треугольника., который является половиной прямоугольника – базы.

Задача25.

Турист вышел на маршрут и добрался до озера. Устроив привал на озере, он затем вернулся обратно. Известны: общее время на маршруте, время, проведённое у озера и скорость туриста. Как найти расстояние от старта до озера?
В решении задачи используется такой факт: в равнобокой трапеции равны проекции боковых сторон на большее основание.

Задача 26.

Из пункта *A* в 12.00 выехал на машине автолюбитель, а из пункта *B* в это же время - два велосипедиста. Один из велосипедистов поехал в том же направлении, что и автолюбитель, а другой – навстречу ему. Водитель встретил велосипедиста в 16.00. Скорость автомобиля в 4 раза больше скорости каждого велосипедиста. В какое время водитель догнал второго велосипедиста?

Для решения этой задачи можно воспользоваться свойством биссектрисы угла треугольника.

Что даёт перевод текстовой задачи в геометрическую? Он позволяет «увидеть» скорость, время и всю ситуацию в целом, то есть привлечь для решения двумерные наглядные образы. Уже неплохо. Далее, геометрическая интерпретация облегчает проверку задачи: соответствия составленной модели условию и самого условия задачи на непротиворечивость, ибо она, сия проверка, сводится к выяснению существования и свойств, достаточно простой геометрической конфигурации.

Особо любопытно то, что после перевода текстовой задачи на двумерную геометрическую модель, она может быть решена с помощью компьютерных технологий. Об этом речь пойдёт далее.

Геометрическое решение приведённых выше задач может основываться не только на сравнении тангенсов углов, но и на подобии треугольников. Тангенсы углов я полагаю более уместными. Во-первых, информация для решения «вычерпывается» из прямоугольного треугольника и отношения его катетов. Во-вторых, связь тангенса угла со скоростью существенна для понимания производной — её физического и геометрического смысла. В-третьих, тангенс угла помогает и тогда, когда в решении опираться на подобие треугольников невозможно.

Приведённая техника решения текстовых задач на движение легко переводится на технику работы с графиками линейной функции в системе координат. Однако для задач на работу, концентрацию, стоимость введение системы координат не вполне естественно, поэтому я и решил воспользоваться для геометрической интерпретации именно прямоугольником.

После решения текстовых задач такого типа указанным способом становится ясно, как их придумывать. Надо нарисовать прямоугольник, а в нём ломаные или отрезки. Если рисунок позволяет так ввести одни геометрические величины так, что по ним находятся другие, то можно эту задачу переформулировать как текстовую задачу на движение (или с другим сюжетом) .

Введённая терминология (база, узел, сценарий) произвольна.

111.4. РАЗРУШЕНИЕ «СТЕНЫ»

Одна из проблем преподавания математики — внедрение в голову ученика её многочисленные внутренние связи. Всеми силами я стараюсь разрушить «стенку» в детском сознании между разными математическими дисциплинами, разделами, темами, методами.

На этом пути встречается много симпатичного и даже эффектного — в силу неожиданной смены точки зрения.

Приведу такой пример. Пусть мы заняты повторением в конце 11 класса. Все уже хорошо знают, что неотрицательность дискриминанта квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ гарантирует существование его корня. На практике выяснять знак выражения $b^2 - 4ac$ бывает довольно хлопотно, если, к примеру, числа a, b, c достаточно велики: например, мы имеем дело с квадратным трёхчленом $184x^2 - 253x + 211$.

Но есть более простые способы убедиться в том, что корни трёхчлена существуют. Для этого достаточно проверить справедливость любого из следующих неравенств:

1. $c\,(a + b + c) < 0$.
2. $c\,(a - b + c) < 0$.
3. $|a+c| < |b|$.

Доказательство несложно. Обозначим $ax^2 + bx + c$ как $f(x)$. Тогда $f(1) = a + b + c$, $f(0) = c$, $F(-1) = a - b + c$.

Условие (1) равносильно неравенству $f(0)\cdot f(1) < 0$. Условие (2) равносильно неравенству
$f(0)\cdot f(-1) < 0$. Условие (3) равносильно неравенству $f(-1)\cdot f(1) < 0$.

Из каждого полученного неравенства и следует в силу непрерывности квадратного трёхчлена существование его нуля, причём можно даже указать, на каком промежутке мы «изловили» этот нуль.

Вот ещё один из примеров такой работы. Ученикам кажется, что доказательство неравенств и решение неравенств — разные вещи. Тем удивительнее для них, что вполне возможно иной раз заменить доказательство неравенства его решением.

Этот метод я проиллюстрирую на неравенствах, которые можно привести к виду квадратных неравенств. Для овладения им достаточно знать свойства квадратного трёхчлена.

Начну с хорошо известного примера.

1, Доказать неравенство $x^2+xy + +y^2 \ge 0$. Запишем выражение в левой части неравенства так:

$$T(x) = x^2+y\,x + y^2.$$

Тем самым мы представляем его как квадратный трёхчлен по переменной x, а y считаем параметром. Его старший коэффициент, т. е. коэффициент при x^2, равен 1, а дискриминант $-3y^2 \le 0$. При таких условиях трёхчлен неотрицателен при любом значении переменной x, что и требовалось доказать.

Замечу, что в таких симметричных выражениях (в нашем примере — левая часть) можно в качестве переменной брать любую букву. В нашем случае можно было бы с тем же успехом провести доказательство, считая выражение в левой части квадратным трёхчленом по переменной y, x — параметром.

Конечно, такое решение менее красиво, чем известное, когда всё неравенство умножается на 2 и представляется суммой квадратов. Но последний способ слишком эффектен, чтобы превратиться в метод.

Вот ещё неравенство, поинтереснее.

1. Доказать, что при $x \ge 0$ и $y \ge 0$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+4\ge 0.$$

Введём вспомогательную переменную $t=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. Тогда

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=t^2-2$$

и данное неравенство сводится к такому $t^2 - 3t + 2 \ge 0$. Ему равносильна совокупность $t \ge 2$ или $t \le 1$.

Возвращаясь к переменным x и y, видим, что для справедливости исходного неравенства достаточно выполнения одного из условий:

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ или $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq 1$. Но так как $x > 0$ и $y > 0$, то выполняется первое из них. Значит, верно и исходное неравенство.

Для дальнейшего напомню некоторые свойства квадратного трёхчлена. Пусть требуется выяснить, при каких значениях x положителен квадратный трёхчлен $T(x) = Ax^2 + Bx + C$, если $A > 0$. Тогда

$$Ax^2 + Bx + C > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D < 0 \\ x \in \boldsymbol{R} \end{cases} \vee \begin{cases} D = 0 \\ x \neq x_1 \end{cases} \vee \begin{cases} D > 0 \\ x > x_2 \vee x < x_1 \end{cases}$$

(Здесь D - дискриминант трёхчлена; x_1, x_2 - его корни; $x_2 > x_1$) .

Ещё одно утверждение о трёхчлене таково. Пусть требуется выяснить, при каких условиях выполняется неравенство $T(x) > 0$ при всех значениях x , больших, чем некоторое число α. По-прежнему считаем, что $A > 0$. Тогда, если $D < 0$, неравенство верно при любых значениях x , в том числе и при $x > \alpha$. Если $D = 0$, неравенство верно при всех значениях x, кроме корня трехчлена. Если же $D > 0$, то достаточно потребовать, чтобы больший корень трёхчлена был меньше, чем α. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы выполнялось условие $\begin{cases} -\frac{B}{2A} < \alpha \\ T(\alpha) > 0 \end{cases}$.

В частности, для того, чтобы выполнялось неравенство $T(x) > 0$ при $x > 0$, достаточно выполнения системы

$$\begin{cases} B > 0 \\ C > 0\ . \end{cases} \qquad (\ *\ )$$

Разберём стандартную задачу такого типа: «найти все значения параметра a, такие, что $x^2 + ax + 1 > 0$ при $x > 0$».

Имеем $A = 1>0$, $D = a^2-4$.

Рассмотрим все три возможных случая:

1) $a^2-4<0 \Leftrightarrow -2<a<2$. Тогда $T(x)>0$ при всех $x\in R$, в том числе и при $x>0$.

2) $a^2-4 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \vee a = 2$. Тогда при $a = 2$ $T(x)= x^2 + 2x+1=(x+1)^2>0$ для всех $x \neq -1$, а значит, и при всех $x>0$.

При $a = -2$ $T(x)= x^2 - 2x+1=(x-1)^2>0$ для всех $x \neq 1$ и заданное требование не выполняется.

3) $a^2-4>0 \Leftrightarrow a < -2 \vee a > 2$. Условие (*) выглядит в этом случае так:

$$\begin{cases} a > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 0\ .$$

Тогда

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 2 \\ a < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a > 2 \\ a > 0 \end{cases}$$

Окончательно: $T(x)> 0$ при $x>0$, если $a > -2$.

Вернёмся теперь к доказательству неравенств. Наиболее просто они будут получаться тогда, когда дискриминант квадратного трёхчлена не положителен.

2. Доказать, что $a^2 + b^2+1\geq ab + a + b$.

$T(a) = a^2 - (b+1)a + b^2- b+1 \geq 0$.

$A = 1>0$, $D = -3(b-1)^2$.В случае $D <0$ ($b \neq 1$), $T(a)>0$ при всех значениях a. В случае $D = 0$ ($b=1$)

исходное неравенство имеет вид $a^2 - 2a+1 \geq 0$, что верно.

В силу симметричности выражения его можно рассматривать как квадратный трёхчлен по переменной *b*.

3. Доказать, что $(ab + ac + bc)^2 \geq 3abc\,(a + b + c)$.

$T(a) = (b^2 - bc + c^2)\, a^2 - bc\,(b + c)\, a + b^2c^2 \geq 0$.

$A = (b^2 - bc + c^2) \geq 0,\ D = -3b^2c^2(b-c)^2 \leq 0$.

Если $b^2-bc + c^2 = 0$, то $b = c = 0$ и исходное неравенство примет вид $0 \geq 0$, что верно. Если $b^2 - bc + c^2 > 0$, то из неположительности D следует исходное неравенство.

Немногим более сложны те случаи, когда дискриминант трёхчлена отрицателен.

4. Доказать, что если $a>b>c$, то $a^2b + b^2c + c^2a > a^2c + c^2b + b^2a$.

$T(a) = a^2-(b + c)a + bc>0,\ A = 1 >0,\ D = (b-c)^2>0$.

Нулями трёхчлена $T(a)$ являются $a_1 = c,\ a_2 = b$.

Поэтому $T(a)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > b \\ a < c \end{array}\right.$.

Так как по условию $a>b$, то исходное неравенство верно.

Наиболее труден для решения случай знакопеременного дискриминанта.

5. Доказать, что если $b>0$, то $4ab\,(3-a)-4a\,(1+b^2) \leq b$.

$T(a) = 4\,ba^2 + 4\,(b^2-3b+1)a + b \geq 0,\ A = 4b>0,\ D=16(b-1)^2(b^2-4b+1)$. При $b = 1$ $D = 0$ и данное неравенство верно. При $b \neq 1$ знак дискриминанта зависит от знака трёхчлена $b^2 - 4b + 1$, который обозначим $T(b)$. Решив соответствующие неравенства, видим следующее;

$T(b) \leq 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \leq b \leq 2+\sqrt{3}$.

$$T(b) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b > 2+\sqrt{3} \\ b < 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \quad (1)$$

Если $2-\sqrt{3} \leq b \leq 2+\sqrt{3}$, то $T(b) \leq 0$, т. е. дискриминант исходного трёхчлена неположителен, а тогда данное неравенство верно.

Если же $\left[\begin{array}{l} b > 2+\sqrt{3} \\ b < 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$, то $T(b) > 0$,

т. е. дискриминант исходного квадратного трёхчлена положителен. Учитывая условия, видим, что это возможно при $b > 2+\sqrt{3}$ или $0 < b < 2-\sqrt{3}$. Чтобы исходное неравенство было верным в случае положительного дискриминанта при $b>0$, достаточно выполнения системы $B > 0$, $C>0$. Здесь имеем $C>0$ по условию,

$$B > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b > 0{,}5(3+\sqrt{5}) \\ b < 0{,}5(3-\sqrt{5}) \end{array}\right. \quad (2)$$

Но совокупность неравенств (2) следует из совокупности неравенств (1).

Окончательно: при всех $b > 0$ данное неравенство верно.

6. Доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\ \cos(\alpha + \beta) \geq 0$.

$T(\cos\alpha) = \cos^2\alpha - 2\cos\beta\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha + \cos^2(\alpha + \beta) \geq 0$.

$A = 1>0.\ D = -4\cos^2(\alpha + \beta)\sin^2\beta \leq 0$.

Исходное неравенство становится очевидным.

Есть и другая идея доказательства неравенств с помощью свойств квадратного трёхчлена. Покажу её на примере доказательства такого неравенства:

7. $a^2(1+b^4) + b^2(1+a^4) \leq (1+a^4)(1+b^4)$.

После соответствующей перегруппировки получаем

$a^4(b^4-b^2+1)-a^2(b^4 + 1) + b^4-b^2+1 \geq 0$.

Обозначив $a^2 = z$, имеем квадратный трёхчлен относительно z. Его первый коэффициент $b^4 - b^2 + 1$ положителен при любых значениях b, значит, трёхчлен имеет минимум. Найдём его согласно известному выражению $(4AC - B^2) / 4A$. Минимум имеет такой вид:

$(b^2 - 1)((b^2 - 1)^2 + 2(b^4 + 1)) / 4(b^4 - b^2 + 1)$. Ясно, что он неотрицателен, но тогда неотрицателен и весь трёхчлен, что и требовалось доказать.

Ещё одна возможность показать связи в математике при доказательстве неравенств состоит в использовании выпуклости функции. Я уже упоминал об этом, говоря о неравенстве Коши, теперь чуть подробнее.

Выпуклость функции устанавливается с помощью знака второй производной. Для функции $f(x)$, выпуклой вниз на промежутке Δ, верны такие неравенства:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

Они оба очевидны из геометрических соображений.

Первый пример (несложный, для иллюстрации метода) будет связан с использованием выпуклости вниз функции
$f(x) = 1/x$ при $x>0$.

8. Доказать, что при $a>0$ и $b>0$ выполняется неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$.

Положим $x_1 = \frac{a}{b}$, $x_2 = \frac{b}{a}$ $(a \ne b)$.

Применим неравенство (1) для этих значений x:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{2}{x_1+x_2} = \frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}},$$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}.$$

Тогда $\dfrac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}} < \dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 > 4 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} > 2$

При $a = b$ достигается равенство.

9. Доказать, что при $a + b + c = 0$ $3^a + 3^b + 3^c > 3$. Для доказательства достаточно воспользоваться выпуклостью вниз показательной функции 3^x и неравенством (2). Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$. Тогда, с одной стороны, $f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) = f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3^{\frac{a+b+c}{3}} = 3^0 = 1$.

С другой стороны, $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3} = \dfrac{3^a+3^b+3^c}{3}$.

По неравенству (2) $1 < \dfrac{3^a+3^b+3^c}{3}$, откуда и следует нужное неравенство. ($3^a+3^b+3^c=3$ при $a=b=c=0$.

Использование функциональных соображений для доказательства неравенств я понимаю как частный случай использования динамических соображений в статической ситуации. Или - чуть иначе - использования непрерывного для дискретного. Многочлен - это статика и дискретное. Функция - это динамика и непрерывное. Статическая ситуация рассматривается как моментальный снимок какого-то динамического процесса. Но коль скоро есть процесс, то есть и его скорость. Отсюда прямая дорога к использованию производной, а затем интегрирования. Дальнейшее развитие эта идеология подтверждается весьма разнообразно и в алгебре, и в геометрии, тому я приведу содержательные примеры. Сейчас - только самый простенький. Косинус - это скорость изменения синуса и наоборот (с учётом знака). И формулу для синуса суммы двух углов можно получить из формулы для косинуса суммы дифференцированием последней. Стоит заметить, что столь же важна, если можно так выразиться, и противоположная идеология - изучение непрерывного с помощью дискретного, динамического, исходя из статического. Самый яркий пример - построение графика функции по точкам, эффектным образом представленное на экране дисплея.

Использование разных разделов математики для решения геометрических задач – дело известное. Менее известно, что использование функциональных соображений при решении геометрических задач имеет эвристическую ценность. Я формулирую « слабый признак постоянства функции» в таком виде: если величина принимает три одинаковых значения на концах заданного промежутка и в его середине, то она является постоянной. Основой такого допущения является то, что при решении задач по геометрии зависимость величин редко бывает отличной от линейной или квадратичной, а тогда этот признак верен.

Приведу пару примеров использования этого признака.

1) Внутри квадрата требуется найти экстремальные значения периметра вписанного прямоугольника, причём каждая его сторона параллельна диагонали квадрата.

Можно заметить, что когда одна из вершин вписанного прямоугольника совпадает с вершиной квадрата, то прямоугольник вырождается в отрезок и его «периметр» равен удвоенной диагонали квадрата. Таких случаев два. Тот же результат мы получаем, если взять вершины вписанного прямоугольника в серединах сторон квадрата. Возникает предположение, что это выполняется при любом положении вершин вписанного прямоугольника, что затем и подтверждается. Так оказывается, что периметр такого прямоугольника постоянен. (Замечу, что параллельность сторон прямоугольника диагоналям квадрата является избыточным условием и дана только для упрощения.)

Аналогична задача о прямоугольном сечении правильного тетраэдра.

2) ABD и BCD – равносторонние треугольники. По отрезку AB от B к A равномерно движется точка P, по отрезку BC от C к B с такой же скоростью движется точка Q. Они начали движение одновременно. Найдите наименьшее и наибольшее значения угла PDQ (Рис. 91а).

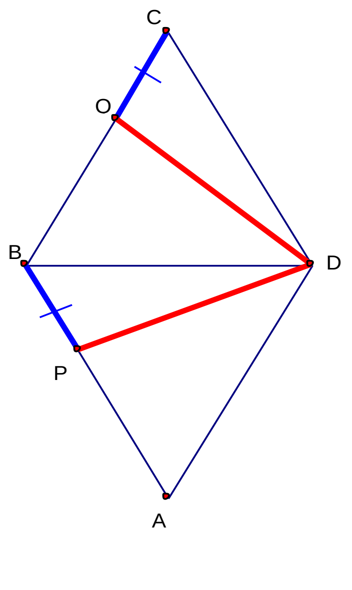


Рис. 91 а.

Первоначально угол PDQ равен 60 градусам. Когда точка Q совпадёт с точкой B, а точка P совпадёт с точкой A, то угол PDQ по-прежнему будет равен 60 градусам. Кроме того, когда точка Q окажется в середине отрезка CB, а точка P в середине отрезка PA, то угол между лучами DP и DQ по-прежнему 60 градусов. Это позволяет предположить, что угол в течение всего времени останется равен 60 градусам. Так оно и оказывается. (Рис. 91б).

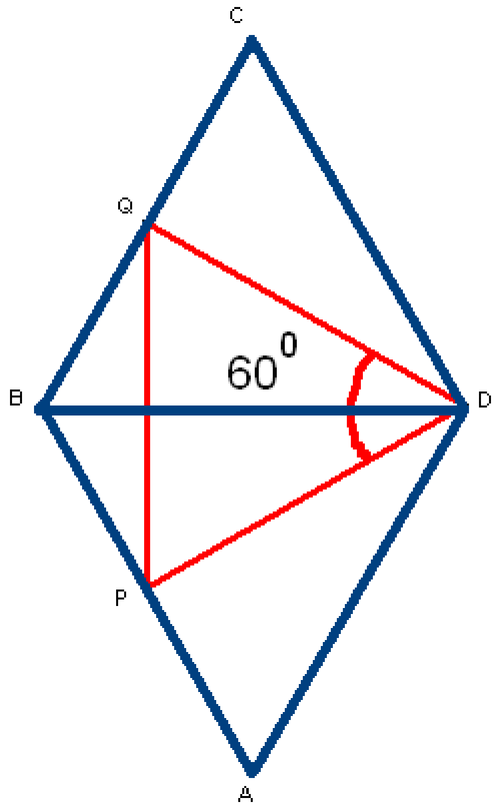


Рис. 91б.

Ещё один пример такого рода – задачи о центрально симметричном графике.

Центральная симметрия на плоскости хорошо известна из курса планиметрии как один из видов движения, а потому она обладает всеми свойствами движения. В частности, она сохраняет любую симметрию фигуры. И центрально симметричные графики хорошо известны из школьного курса. Это график линейной функции (у него бесконечное множество центров симметрии – любая его точка), график дробно – линейной функции (гипербола, для неё центром симметрии является точка пересечения асимптот), график кубической функции общего вида (у него центром симметрии является точка перегиба).

Хорошо известны задания на нечётность функции, то есть проверяется симметрия графика относительно начала координат.

Новизна заданий, появившихся в последнее время в том, что требуется установить, имеется ли центр симметрии в произвольной точке, и только в частности, в начале координат.

Вот пример такой задачи, реально предлагавшейся на вступительном экзамене: найти центр симметрии графика функции

$y = \log_3 (3x -3 + 3\sqrt{x^2 - 2x + 2})$.

Этот тип задач интересен сам по себе, ибо позволяет дать разнообразные решения одной и той же задачи, идущие притом из разных разделов школьной математики.

Теоретическая основа решения таких задач весьма проста. В результате центральной симметрии относительно точки с координатами (a,b) точка с координатами

(x, y) переходит в точку с координатами ($2a$ - x, $2b$ - y).
(1)
Такова координатная запись центральной симметрии (на плоскости).

Покажу это. Пусть точка (x_1,y_1) в результате центральной симметрии относительно точки (a,b) перешла в точку (x_2,y_2). Тогда точка (a,b) является серединой отрезка с концами в точках (x_1,y_1) и (x_2,y_2). Согласно формуле для координат середины отрезка, когда заданы координаты его концов, получаем, что каждая из координат центра симметрии отрезка является средним арифметическим координат его концов, то есть выполняются такие равенства:a = ($x_1 + x_2$) /2, b = ($y_1 + y_2$) /2.

Отсюда $x_2 = 2a - x_1$, $y_2 = 2b - y_1$ и обратно –

$x_1 = 2a - x_2$, $y_1 = 2b - y_2$. (2)

. Полученные равенства позволяют решать две практические задачи: первая – по координатам двух точек находить их центр симметрии; вторая – зная координаты одной из точек и центра симметрии, находить координаты другой точки.

Пусть теперь (x_1,y_1) и (x_2, y_2) –точки графика функции y = f (x) . Тогда выполняются равенства y_1 = f(x_1) и y_2 = f(x_2).

Если график центрально симметричен относительно точки (a,b), то ордината b центра симметрии является средним арифметическим для y_1 , y_2

и тогда $b = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. Отсюда получаем: $y_2 = 2b - y_1 = 2b - f(x_1) = 2b - f(2a - x_2)$.

Координата x_2 произвольная, поэтому, опуская индексы, получим уравнение:

$y = 2b - f(2a - x)$. (3)

Её график центрально симметричен графику функции f (x) относительно точки (a,b).

Также имеем:

$b = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, а так как $x_2 = 2a - x_1$, то

$b = \dfrac{f(x_1) + f(2a - x_1)}{2}$.

Поскольку точка x_1 произвольная, то избавимся от индекса:

$b = \dfrac{f(x) + f(2a - x)}{2}$.

Числителю этой дроби можно придать симметричный вид, если заметить, что числа в скобках равноудалены от числа a , а потому могут быть записаны как $a - x$ и $a + x$ соответственно.

Приходим к равенству $b = \dfrac{f(a - x) + f(a + x)}{2}$.

Итак, точка (a,b) является центром симметрии графика функции y = f (x) если при всех значениях x из области её определения выполняется равенство

$f(a + x) + f(a - x) = 2b$ (4)

В формуле (4) важны два момента: 1) для центральной симметричности графика функции f необходимо и достаточно, чтобы функция $S(x) = f(a + x) + f(a - x)$ была постоянной;
2) значение этой постоянной даёт удвоенную ординату центра симметрии.

Для поиска центра симметрии видны три основных пути. (Разумеется, возможно их сочетание, то есть последовательное применение.)

Первый путь – «алгебраический». (Название этого пути и последующих условны.) Используем формулу (4) и теорему о тождественном равенстве двух многочленов.

Пример 1. Имеет ли центр симметрии график функции $y = x^3 - x^2$?

Для данной функции равенство $f(a + x) + f(a - x) = 2b$ сводится после преобразований к виду $x^2(3a - 1) + a^3 - a^2 = b$.

Для всех значений x оно выполняется при $a = \frac{1}{3}$. Затем находим $b = -\frac{2}{27}$.

Итак, центром симметрии графика данной функции является точка ($\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}$).

Пример 2. Есть ли центр симметрии у графика функции
$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

Работа по формуле (4) не приводит к функции, тождественно равной константе, поэтому у этого графика нет центра симметрии.

Алгебраическое решение не всегда бывает успешным. В этом можно убедиться на следующем примере:

Пример 3. Имеет ли центр симметрии график функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$?

Для данной функции равенство $f(a + x) + f(a - x) = 2b$ сводится после преобразований к виду $\ln(a + x + \sqrt{(a+x)^2+1})(a - x + \sqrt{(a-x)^2+1}) = 2b$.

Тупиковое, я думаю, равенство, если идти в «лоб». Попробуем идти « в обход» – как все «нормальные герои» (известно из фильма «Айболит – 66»).

Если это равенство выполняется тождественно, то оно выполняется и при $x = 0$. Подставим это значение для x и придём к равенству

$\ln((a + \sqrt{a^2+1})(a + \sqrt{a^2+1})) = 2b$. А далее, учитывая, что $a + \sqrt{a^2+1} > 0$ при любых значениях a , к равенству $\ln(a + \sqrt{a^2+1}) = b$. И что дальше? Сначала – только предположения. А почему бы константе b не быть нулём? Попробуем.

Приходим к уравнению $a + \sqrt{a^2+1} = 1$, откуда следует, что $a = 0$. Посмотрим, что происходит при $a = 0$. Исходное равенство

$\ln(a + x + \sqrt{(a+x)^2+1})(a - x + \sqrt{(a-x)^2+1}) = 2b$

превращается в равенство $\ln((x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1})) = 2b$, откуда получаем: $\ln 1 = b \Rightarrow b = 0$.

Итак, при $a = 0$ и $b = 0$ условие (4) выполняется, а потому график центрально симметричен, причём центр симметрии – начало координат. Отсюда – нечётность самой функции, в начале работы совсем неочевидная.

Однако получилось не слишком просто.

Второй путь в нахождении центра симметрии – «геометрический». И не мудрено – ведь понятие центральной симметрии – из геометрии.

Перечислю утверждения, которые понадобятся для дальнейшего.

1. Центральная симметрия графика сохраняется в результате движения, в частности, при сдвиге (параллельном переносе). Поэтому для выяснения того, является ли точка (a,b) центром симметрии графика, достаточно сдвинуть фигуру на вектор ($-a,-b$) . Полученный график достаточно проверить на центральную симметрию относительно начала координат, то есть полученную функцию на нечётность. Добавлю: наклонный сдвиг является композицией горизонтального и вертикального сдвигов - в любом порядке.

2. Если графики двух функций имеют центры симметрии в точках с одной и той же абсциссой, то график их суммы (разности) также будет иметь центр симметрии в точке с этой абсциссой.

Доказательство несложно. Пусть есть функции f и g, графики которых центрально симметричны. График каждой из этих функций получается сдвигом из графика нечётной функции: пусть график функции f получается сдвигом на вектор (a,b) из центрально симметричного относительно начала координат графика функции F, а график функции g получается сдвигом на вектор (a,c) из центрально симметричного относительно начала координат графика функции G. Тогда график суммы функций $f + g$ получается из графика суммы нечётных функций $F + G$ сдвигом на вектор (a,$b + c$) .

3. Если график функции имеет центр симметрии, то будет иметь центр симметрии график функции, являющейся суммой данной функции и линейной функции. Это утверждение – простое следствие из предыдущего, ибо график линейной функции имеет бесконечное число центров симметрии. Абсциссой каждого из этих центров может быть любое число.

4. Если график функции f имеет центр симметрии, то будет иметь центр симметрии график функции, полученный из данной деформацией вдоль оси ординат, то есть график функции kf при $k > 0, k \neq 1$.

Пример 4. Имеет ли центр симметрии график функции $y = \sqrt[3]{x+1}-1$?

Двумя последовательными сдвигами: на вектор (0,1) и вектор (-1,0), то есть сдвигом на вектор (- 1, 1) переходим к графику функции $\sqrt[3]{x}$, который имеет центр симметрии – начало координат, так как эта функция нечётная.

Пример 5. Имеет ли центр симметрии график функции $y = \dfrac{x}{x+1}$?

Исключив из дроби целую часть, получим $y = 1 - \dfrac{1}{x+1}$. Двумя последовательными сдвигами: на вектор (0,-1) и вектор (1,0), то есть сдвигом на вектор (1,-1) этот график переводится в график нечётной функции $y = -\dfrac{1}{x}$. Отсюда следует, что центр симметрии этого графика есть точка (-1,1).

Пример 6. Имеет ли центр симметрии график функции $y = \sin x + \cos x$?

Преобразуем это выражение известным способом:

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Далее используем сдвиг вдоль оси абсцисс и деформацию вдоль оси ординат. Приходим к функции $y = \sin x$, график которой центрально симметричен в силу её нечётности.

Пример 7. Имеет ли фигура центр симметрии, если эта фигура задаётся неравенствами $y > x^2$ и $y < 2 - x^2$;

Сдвигом на вектор (0,-1) переходим к неравенствам $y > x^2 - 1$ и $y < 1 - x^2$. Их пересечение центрально симметрично, центр симметрии – начало координат. В самом деле, фигура эта покрывается центрально симметричными (относительно начала координат) отрезками, концы которых лежат на данных параболах.

Пример 8. Имеет ли центр симметрии график функции

$y = x + \ln\dfrac{x^2+2x}{x^2+10x+24}$?

Эта функция является суммой линейной функции и функции, график которой центрально симметричен.

Докажем центральную симметричность такого логарифма.

Для этого запишем его чуть иначе:

$$\ln\frac{x^2+2x}{x^2+10x+24}=\ln\frac{x(x+2)}{(x+4)(x+6)}.$$

Нули числителя и знаменателя – это числа -6, - 4, - 2, 0.

Видна симметрия этого множества чисел относительно x = -3.

Сдвигом графика функции $\ln\frac{x(x+2)}{(x+4)(x+6)}$ на 3 вдоль оси абсцисс приходим к такому его уравнению $y(x)=\ln\frac{(x-3)(x-1)}{(x+1)(x+3)}$.

Тогда $y(-x)=\ln\frac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x-3)}$. Так как выражения $\frac{(x-3)(x-1)}{(x+1)(x+3)}$ и $\frac{(x+3)(x+1)}{(x-1)(x-3)}$, стоящие под знаком логарифма, взаимно обратные, то $y(x)+y(-x)=0$, что означает нечётность функции $\ln\frac{x(x+2)}{(x+4)(x+6)}$, а потому центральную симметричность её графика.

Но тогда и график исходной функции центрально симметричен относительно точки (- 3, 0).

Пример 9. Имеет ли центр симметрии график функции $y=\frac{x-1}{x^2+1}$?

Рассмотрим функцию $y=\frac{x^2+1}{x-1}$. После исключения целой части из дроби получим уравнение $y=x+1+\frac{2}{x-1}$. Эта функция является суммой линейной функции и дробно – рациональной функции. График последней есть гипербола, а потому имеет центр симметрии. Тогда и сама исходная функция имеет центр симметрии.

Пример 10. Имеет ли центр симметрии график уравнения $x=\frac{y+2}{y-2}$?

Переобозначим переменные (геометрически это означает отражение от прямой $y=x$) , получаем уравнение для дробно - линейной функции $y=\frac{x+2}{x-2}$.

Её график – гипербола, а потому график центрально симметричен. Затем отражаем гиперболу относительно прямой $y=x$. В результате этих преобразований получаем центрально симметричную фигуру (гиперболу) . Её центром симметрии является образ центра симметрии гиперболы

$$y=\frac{x+2}{x-2}.$$

Пример 11. Имеет ли центр симметрии фигура, которая задаётся неравенством $|x+1|\geq|y-1|$?

Сдвигом на вектор (1,-1) переводим эту фигуру в фигуру, которая задаётся неравенством $|x|\geq|y|$. Поскольку полученная фигура центрально симметрична, такой же будет исходная фигура.

Третий путь – «функциональный». На этом пути используются свойства данной функции: область определения (для центрально симметричного графика она симметрична относительно нуля), нули функции, наличие асимптот. Коли этого не достаточно, находим первую производную и критические точки, а если и этого мало, то находим вторую производную и точки перегиба. Если у функции есть «подозрительная» точка, то можно предположить, что она является абсциссой возможного центра симметрии. Вообще говоря, «подозрительная» точка не обязана быть единственной и каждую из них приходится проверять. После того как найдена одна, вторую ищем с некоторыми оговорками. Дело в том, что если фигура имеет два центра симметрии, то, как известно из геометрии, она самосовмещается сдвигом. Для функций это означает периодичность или, в более общем случае – возможность её представления в виде суммы линейной функции и периодической нечётной функции.

Не каждая «подозрительная» точка является абсциссой центра симметрии, даже если он есть.

Пример 12. Имеет ли центр симметрии график функции $y = (x – 1) / (x + 1)$?

Исключив из дроби целую часть, получим $y = 1 - \frac{2}{x+1}$. Асимптотами графика этой функции являются прямые $x = -1$ и $y = 1$, а точка их пересечения (-1, 1) есть центр симметрии, в чём можно убедиться в соответствии с (4) .

Пример 13. Имеет ли центр симметрии график функции $y = x^3 - x^2$? (Возвращаемся к примеру 1.)

Найдём «подозрительные» точки функции, приравняв производную нулю. Получим точки $x = 0$ и $x = 2/3$. Если график функции имеет центр симметрии, то его абсцисса делит пополам отрезок оси x между этими точками, то есть его абсцисса равна 1/3 . Соответствующая ордината равна

$-\frac{2}{27}$. Осталось проверить по формуле (4) , что найденная точка действительно является центром симметрии графика.

Есть другой вариант этого способа отыскания «подозрительных» точек. Тождественное равенство $f (a + x) + f (a – x) = 2b$ означает, что функция $S(x) = f (a + x) + f (a – x)$ является константой. Но тогда её производная тождественно равна нулю.

Для функции $y = x^3 - x^2$ $S (x) = (x + a)^3 - (x + a)^2 + (x - a)^3 - (x - a)^2$ производная $S' (x)$ равна $12ax - 4x = 4x (3a - 1)$. Она тождественно равна нулю при $a = \frac{1}{3}$.

Далее находим центр симметрии согласно (4).

Ещё один способ – использовать перегибы графика, коли они есть. Если график имеет один центр симметрии и одну точку перегиба, то эти точки совпадают. Поэтому можно свести поиск «подозрительной» точки к поиску точки перегиба. В примере 3 вторая производная равна нулю при

$x = 1/3$.

Пример 14. Имеет ли центр симметрии график функции $y = |x - 1| - |x - 3|$?

«Подозрительная» точка $x = 2$, являющаяся нулём функции. Сдвинем график на 2 вдоль оси абсцисс. Получим график, уравнение которого таково:

$y = |x + 1| - |x - 1|$. Эта функция нечётная, следовательно, её график центрально симметричен, а потому центрально симметричен исходный график.

Пример 15. Имеет ли центр симметрии график функции $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$?

«Подозрительная»точка $x = 2$. А что дальше? Сдвинем график на 2 вдоль оси абсцисс. Получим график, уравнение которого таково:

$y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}$. Видна нечётность этой функции, следовательно, её график центрально симметричен, а потому центрально симметричен исходный график.

Пример 16. При каком значении *a* имеет центр симметрии график функции

$$y = \frac{a+a^x}{a-a^x}\ ?$$

«Подозрительной» является точка разрыва $x = 1$. Составим сумму

вида f (1+x) + f (1 – x). Упрощая выражение $\frac{a+a^{1+x}}{a-a^{1+x}} + \frac{a+a^{1-x}}{a-a^{1-x}}$, получаем 0, откуда следует, что точка (1,0) является центром симметрии графика при $a > 0$, $a \neq 1$.

Пример 17. Имеет ли центр симметрии график функции $y = x + \cos x$?

Все три пути ведут к решению. Приведу сначала «алгебраический» путь решения. Именно, проверяется условие (4). Рассмотрим выражение
($x + a + \cos(a + x) + (a - x) + \cos(a - x)$. Очевидными преобразованиями оно сводится к виду $2a + 2\cos a \cos x$.
Это выражение является тождественной константой, если $\cos a = 0$, то есть если

$a = \frac{\pi}{2}(2n-1)$, где $n \in$ Z. Тем самым установлено наличие центра симметрии, более того, оказалось, что центров симметрии бесконечно много, а также – каковы их абсциссы. Если взять $n = 1$, то «первой» абсциссой будет $\frac{\pi}{2}$, первой ординатой, соответственно, будет также $\frac{\pi}{2}$.

Перейду теперь на «геометрический» путь. Для этого вначале сведём уравнение этой функции к уравнению такой функции, про которую известно, что её график имеет центр симметрии, именно к нечётной функции
$y = x + \sin x$. Имеем:

$x + \cos x = x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$. Отсюда видно, что график функции $y = x + \cos x$ получается из графика функции $y = x + \sin x$ сдвигом на вектор

$\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Можно также использовать приведённое выше косвенное соображение 3. Функция $x + \cos x$ является суммой линейной функции и функцией, график которой имеет центр симметрии, а посему и её график также имеет центр симметрии. Абсцисса его такая же, как у графика функции $y = \cos x$.

Перейду теперь к «функциональному» пути. Найдём производную функции
S (x) = $x + a + \cos(a + x) + (a - x) + \cos(a - x)$.
Она равна $\sin(a - x) - \sin(a + x)$. Приравняв её нулю, получим после упрощения равенство $2\cos a \sin x = 0$. При всех значениях x оно выполняется, если $\cos a = 0$. (Именно этот результат был получен ранее на «алгебраическом» пути.)

Можно действовать иначе. Ищем точки перегиба графика данной функции. Приравняв вторую производную к нулю, получим уравнение $\cos x = 0$, решением которого являются полученные ранее точки $\frac{\pi}{2}(2n-1)$, где $n \in$ Z.

Теперь я покажу пример, в решении которого используются все три пути (иные – частично). Причём начало работы идёт по пути«функциональному».

Пример 18. Имеет ли центр симметрии график кубического многочлена?

Кубический многочлен – это многочлен вида ax^3+bx^2+cx+d при $a \neq 0$.
Рассмотрим его как функцию $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Мы видим, что эта функция является

суммой двух функций, одна из которых линейная. Тем самым вопрос о наличии центра симметрии этой функции сводится к изучению функции $y = ax^3+bx^2$. Для упрощения будем считать, что $a = b = 1$. Поэтому продолжим поиски центра симметрии для функции $y = x^3 + x^2$. Найдём точки перегиба её графика, получим $x = -\frac{1}{3}$.

Теперь выйдем на геометрию – найдём такую кубическую функцию, график которой заведомо центрально симметричен. Такой функцией является $y = (x + \frac{1}{3})^3 + m\,(x + \frac{1}{3}) + n$, ибо её график получается сдвигом из центрально симметричного графика функции $y = x^3$.

Теперь выходим на алгебру и работаем согласно теореме о тождественном равенстве двух многочленов: Из тождественного равенства

$x^3 + x^2 = (x + \frac{1}{3})^3 + m\,(x + \frac{1}{3}) + n$ получаем, что $m = -\frac{1}{3}$, $n = \frac{2}{27}$.

Итак, $y = (x + \frac{1}{3})^3 - \frac{1}{3}(x + \frac{1}{3}) + \frac{2}{27}$.

Следовательно, данная функция имеет центрально симметричный график.

В общем виде ход рассуждений остаётся таким же.

Уместно сделать такое замечание. Для функции $y = x^3 + x^2$ «подозрительной»точкой является также её нуль: $x = -1$.Если проверять её, то ничего бы не вышло. В каком – то смысле удачный выбор «подозрительной» точки - дело случайное. Тут же замечу, что поиск второго центра симметрии для графика многочлена – занятие бессмысленное, ибо многочлен, если его рассматривать как функцию, не является функцией периодической.

Под занавес вернусь к примеру «абитуриентской» математики, приведённому в начале статьи.

Пример 21. Требуется найти центр симметрии графика функции

$$y = \log_3 (3x -3 + 3\sqrt{x^2 - 2x + 2}).$$

Упростим выражение, произведя преобразования и введя новые переменные:

$\log_3 (3x - 3 + 3\sqrt{x^2 - 2x + 2}) = \log_3 (3(x -1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})) =$

$= 1 + \log_3 (x -1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}) = 1 + \log_3 ((x - 1) + \sqrt{(x-1)^2 + 1}) =$

$= 1 + \log_3 (z + \sqrt{z^2 + 1})$. Об этой функции я упоминал, когда говорил о решении задачи на основании (4).

Исследуем график этой функции на центральную симметричность. Очевидно, что $z = 0$ является нулём функции и, тем самым, «подозрительной» точкой. Ещё один способ выйти на «подозрительную» точку - найти точку перегиба графика - получим опять же $z = 0$. Затем удостоверяемся на основании (4) в том, что именно она является центром симметрии данного графика. (Вообще – то известно, что эта функция является нечётной, но сходу сие не видно.)

Прибавление единицы к логарифму суть прибавление к нему линейной функции, а потому исходная функция имеет центр симметрии - точку (0,1).