11.6 ЕДИНАЯ МАТЕМАТИКА

Разобравшись в той роли, которую векторы могут играть в школьной математике, я пришёл к мысли о построении единого курса — без деления на алгебру, анализ и геометрию, Соответствующие тенденции легко просматривались. Уже в послевоенное время из математического образования исчезли специальные курсы арифметики и тригонометрии. Да и в других странах эта тенденция была заметна - Ж. Дьедонне объяснил, что элементарная геометрия — это та же линейная алгебра, только в другом обличье. В практическом плане задача тоже была привлекательной — казалось, что на этом пути можно было выиграть время по сравнению с традиционными вариантами построения курса в старших классах математической школы.

Центральной идеей *объединённого курса* является возможно более полное слияние аналитических и геометрических методов. Что это значит на практике? Геометрические интерпретации аналитических выражений и аналитическое описание геометрических образов. Двусторонняя подача утверждений: геометрических и аналитических. Примат геометрически наглядной первоначальной подачи теоретического материала. Подчёркивание общего в методах решения аналитических и геометрических задач. Подход к различным разделам математики с более общих позиций, с точки зрения структуры того, что изучается, в первую очередь выделения линейных структур: векторного пространства и, в частности, линейного отображения. Подход к теории на основе элементов теории множеств.

Уместно поговорить специально о площади. Площадь позволяет наглядно интерпретировать самые разные вопросы школьного курса математики, один из ярких примеров тому — интеграл.

Определённый интеграл от положительной функции доступен школьникам потому, что никто из учеников не сомневается в существовании площади криволинейной трапеции. Другой пример: тонкие моменты, связанные с несоизмеримостью, при изучении подобия исчезают, если прибегнуть к площадям. Барьер несоизмеримости нужно «преодолеть» один только раз — при выводе площади прямоугольника, где это делается совершенно естественно (А. Александров).

Площадь может выступать как технический аппарат при доказательстве тех утверждений, в которых «запрятана» размерность 2, а также при доказательстве тригонометрических тождеств. Вот несколько примеров.

1. Формула для квадрата трёхчлена при положительных значениях переменных a, b, c становится прозрачной, если нарисовать квадрат со стороной $a + b + c$ и разбить его на прямоугольники со сторонами a, b, c.

2. А вот как можно вывести (при разумных ограничениях) формулу синуса суммы:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ — она (и ей аналогичные) производит при первом предъявлении устрашающее впечатление, и геометрический подход позволяет его смягчить.

Сделаем такой рисунок (рис. 13).

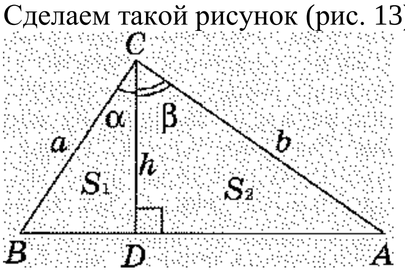


Рис. 13

Пусть S_1 — площадь треугольника BCD, S_2 — площадь треугольника ACD, а S —площадь треугольника ABC.

Имеем $S = 0{,}5ab\sin(\alpha + \beta)$, $S_1 = 0{,}5ah\sin\alpha$, $S_2 = 0{,}5ah\sin\beta$. Тогда

$ab\sin(\alpha + \beta) = ah\sin\alpha + ah\sin\beta \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = (h/b)\sin\alpha + (h/a)\sin\beta \Leftrightarrow$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

Аналогично выводится формула для синуса разности.

3. Эта известная по доказательству теоремы Пифагора картинка (рис. 14) приводит к неравенству $a^2 + b^2 > 4 \cdot 0{,}5 \cdot ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab$ для положительных различных a и b.

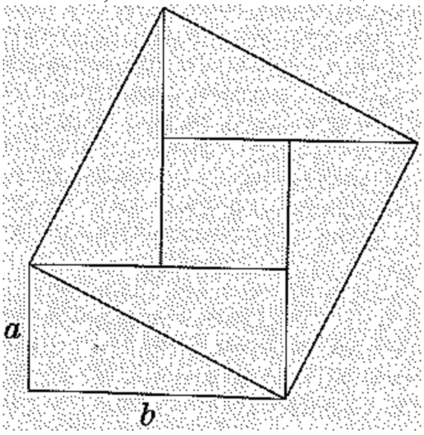


Рис. 14

4. Понятие ориентированной площади прямоугольника можно использовать для объяснения правила знаков при перемножении вещественных чисел.

Одна из возможных интерпретаций такова. Рисунком является прямоугольник, у которого две стороны горизонтальны, а две другие вертикальны. Рисуется он так: берём некоторую точку *O*, проводим из неё две соседние стороны прямоугольника *OA* и *OB,* причем сторона *OA* горизонтальна, а сторона *OB* вертикальна. Другие его стороны: *AC* и *CB*— рисуются для завершения изображения фигуры. При этом ясно, что сторону *OA* можно рисовать как влево от точки *O,* так и вправо от неё, а сторону *OB* вверх или вниз от точки *O.* Если в нарисованном прямоугольнике поворот от *OA* к *OB* идет против часовой стрелки, то в соответствии с тем, что такой поворот считается положительным, мы и площадь прямоугольника *OACB* будем считать положительной. Если же в нарисованном прямоугольнике поворот от *OA* к *OB* идет по часовой стрелке, то площадь прямоугольника *OACB* считаем отрицательной.

Перейдем теперь к числам, к выражению $a \cdot b$. Каждому набору знаков этих чисел поставим в соответствие направления отрезков *OA* и *OB,* причем знаку a ставится в соответствие направление отрезка *OA* (при $a>0$ отрезок *OA* направлен вправо, а при $a<0$ отрезок *OA* направлен влево), а знаку b ставится в соответствие направление отрезка *OB* (при $b>0$ отрезок *OB* направлен вверх, а при $b < 0$ отрезок *OB* направлен вниз). Модуль произведения $a \cdot b$ интерпретируется как площадь нарисованного прямоугольника, а знак произведения — как знак этой площади.

Например, если $a = -2$, а $b = 3$, то нарисованный прямоугольник «покажет» нам, что произведение отрицательно.

На этой же модели несложно показать выполнимость коммутативности умножения и дистрибутивности умножения относительно сложения для произвольных по знаку чисел.

Аналогичная интерпретация известна для сложения чисел, когда их изображают направленными отрезками на ориентированной прямой.

Что удалось сделать на этом пути? Главное — удалось построить единый курс в старших классах математической школы: создать программу, составить различные варианты тематического планирования, сделать «учебник для внутреннего употребления», соответствующий такому пониманию предмета, подобрать задачи по всему курсу, составить дидактические материалы.

Кроме того, был написан проект программы такого курса для обычной школы. Частями мне удалось его реализовать в средних классах.

Для *математической школы* было создано несколько вариантов *программы,* которые уточнялись в практической работе и в ходе различных дискуссий. Приведу один из них.

1. Элементы логики. Простые и сложные высказывания. Равносильные высказывания. Пример переключательных схем. Основные понятия теории множеств. Свойства операций с множествами. Элементы комбинаторики (сочетания). Формула включений и исключений. Начальные задачи теории вероятностей. Бином. Высказывательная форма. Равносильность высказывательных форм. Следование. Необходимость и достаточность. Употребление кванторов для записи высказываний. Характерное свойство. Структура определения и теоремы. Виды теорем. Равносильность уравнений и неравенств. Решение и исследование линейных уравнений и неравенств, квадратных уравнений и неравенств, иррациональных уравнений и неравенств. Равносильность систем двух уравнений с двумя переменными. Решение нелинейных систем. Кривые второго порядка.

2. Элементы теории множеств. Прямое произведение двух множеств. Бинарное отношение. Иллюстрация бинарного отношения с помощью графов и матриц. Примеры отношений: эквивалентность, упорядоченность. Фактор-множество. Элементы комбинаторики (выборки, перестановки, размещения). Отображение множества и функция. Метрическое пространство. Общие понятия о длине, площади, объёме. Алгебраические операции и геометрические отображения. Коммутативная группа. Понятие об изоморфизме. Вещественные числа. Векторное пространство. Группа преобразований плоскости. Группа симметрии фигуры на плоскости. Аксиоматический метод.

3. Векторы на плоскости. Координаты вектора. Действия с векторами. Условие принадлежности точки прямой, лучу, отрезку, полуплоскости в векторной форме. Условие параллельности прямых в векторной форме. Центроид системы точек. Элементы аналитической геометрии на плоскости (условие параллельности прямых, деление отрезка в данном отношении, уравнение прямой в разных видах). Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Преобразования плоскости в координатной форме. Геометрический смысл определителя системы. Скалярное умножение векторов плоскости. Элементы аналитической геометрии на плоскости (расстояние от точки до прямой, угол между прямыми).

4. Комплексные числа. Комплексное число как упорядоченная пара вещественных чисел. Комплексное число в алгебраической, геометрической и тригонометрической формах. Формула Муавра. Нахождение корней. Применения комплексных чисел, включая геометрию. Понятие кватерниона.

5. Аффинная часть стереометрии. Аксиоматика стереометрии. Основные объекты в пространстве. Основные отношения на множестве прямых и плоскостей.

6. Многочлены и уравнения высших степеней. Векторное пространство многочленов. Делимость многочленов. Нули многочленов. Теорема Виета. Двучленные и трёхчленные уравнения. Возвратные уравнения. Однородные многочлены. Симметрические многочлены. Решение уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств высших степеней.

7. Функции и последовательности. Свойства функций. График и линейное преобразование графика функции. Непрерывность и разрывы функции. Теоремы о непрерывных функциях. Приближённое решение уравнений. Предел функции в точке и на бесконечности. Асимптоты графика функции. Последовательность. Признак Вейерштрасса сходимости последовательности. Понятие о числовом ряде. Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия. Применение рядов для приближённых вычислений.

8. Производная и её приложения. Задачи, приводящие к производной. Вычисление производной по определению. Теоремы о дифференцировании. Производная многочлена, дробной функции. Применение производной в приближённых вычислениях. Исследование функции на монотонность, экстремумы. Исследование функции с помощью второй производной. Выпуклость функции. Использование свойств функций для решения задач. Приближённое решение уравнений. Примеры дифференциальных уравнений.

9. Интегрирование функций. Первообразная. Определённый интеграл. Формула Ньютона —

Лейбница. Приближённое вычисление интегралов. Приложения определённого интеграла к вычислению длин, площадей и объемов.

10.Трансцендентные функции. Логарифмическая функция. Производная логарифмической функции. Показательная функция. Производная показательной функции. Некоторые пределы. Примеры дифференциальных уравнений. Разложение логарифмической и показательной функций в степенной ряд. Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств, систем. Тригонометрические функции числового аргумента. Производные от тригонометрических функций. Гармонические колебания. Некоторые пределы. Тригонометрические уравнения и неравенства. Теорема сложения и следствия из нее. Решение уравнений и неравенств с использованием теоремы сложения. Примеры дифференциальных уравнений. Разложение тригонометрических функций в степенной ряд. Показательная форма комплексного числа.Трансцендентные функции в комплексной области.

11.Метрическая часть стереометрии. Скалярное умножение в пространстве. Перпендикулярность в пространстве. Расстояние между объектами пространства. Метод координат в пространстве. Система линейных уравнений с тремя и более переменными. Задача линейного программирования. Понятие об n-мерной геометрии и неевклидовой метрике. Углы в пространстве.

12.Преобразования пространства. Движение в пространстве (перенос, центральная симметрия, симметрия относительно плоскости, поворот, их композиции). Группа симметрии правильного тетраэдра и куба. Гомотетия и подобие. Проектирование. Задачи на проекционном чертеже.

13.Многогранники и тела вращения. Многогранники, их частные виды. Свойства призм и пирамид. Правильные многогранники. Теорема Эйлера. Тела вращения и их свойства. Понятие о сферической геометрии. Решение задач на комбинации тел.

14.Повторение.

Программа трёхлетки в старших классах разрабатывалась из расчёта 10 ч в первом полугодии 10 класса, а затем 8 ч еженедельно.

Основная задача по созданию единого курса математики решалась, как я уже говорил, в старших классах математической школы. Но ещё до этого мне довелось частями решать эту же задачу в обычной девятилетке, причём начиная с 7 класса. Я приведу один пример, очень естественный,— слияния алгебры и геометрии.

Геометрия в 7 классе в те годы основывалась на свойствах расстояния. С помощью его, к примеру, определялись отрезок и прямая. В соответствии с этой тенденцией я рассказывал детям целый раздел под названием «Расстояние на множестве». Основная его идея — использование геометрических представлений для решения уравнений и неравенств с модулями. Конкретно:

1. Свойства расстояния.
2. Расстояние между точками числовой оси.
3. Расстояние от точки до фигуры, в частности до прямой.
4. Множества, задаваемые с помощью расстояния: а) на оси; б) на плоскости.

В результате семиклассники без особого труда решали уравнения и неравенства типа $|x-2| = 1$, $|1-x|<2$, $|x + 3|>1$, $1<|x-4|<2$.

Решали даже и более сложные, такие, как $|x- 7| + |x- 2| = 5$, $|x-7| + |x-2|<5$, $|x-7| + |x-2|>5$.

Замечу, что почти устно можно решать иные примеры с модулями, когда их число больше двух. Вот пример:

Решить уравнение $|x| + |x- 1| + |x-2| = 2$.

Ясно, что при $x>2$ или $x<0$ решений нет. А при $0<x<2$ видно, что $|x| + |x- 2| = 2$. Поэтому $|x- 1| =0$, откуда $x=1$. На плоскости они рисовали фигуры, задаваемые условиями типа $|x| = 1$, $|x|>2$, $|y| <3$, а также пересечения и объединения таких фигур: $|x| \geq 1$ и $|y| \leq$. 3.

Предлагались и такие условия, как $|y| =|x|$, $y > \backslash x \backslash$. Все эти примеры решались только с использованием понятия расстояния.

Чтобы дать общее представление об этом разделе, приведу задание **контрольной работы** по этой теме (на 45 мин).

1. Решить уравнение $|x - 1| = 3$.
2. Нарисовать на плоскости фигуру, отвечающую условию

$$\begin{cases} |x| = 3, \\ |y| = 2. \end{cases}$$

3. Нарисовать на плоскости фигуру, являющуюся множеством точек, удалённых от данной точки A (5, -2) на расстояние, не большее 1.

4. Даны две точки на плоскости: P(4, -1) и Q (2,3). Нарисуйте фигуру, являющуюся множеством точек X, таких, что: а) $XP=XQ$; б) $XP>XQ$; в) $XP < XQ$.

5. Прямоугольник $ABCD$ имеет такие координаты своих вершин:A(0, 0), B(0, 3), C(4, 3), D(4, 0).

а) Чему равно расстояние от точки K(6, 6) до прямоугольника?

б) Запишите координаты какой-либо точки, равноудаленной от прямых AB и AD и при этом: 1) лежащей в прямоугольнике; 2) не лежащей в прямоугольнике. (Ответ на задачу 5«а» даётся с помощью измерительной линейки.)

Единство курса математики может подчёркиваться единообразием методических подходов к разным вопросам. Так, хорошо известна схема исследования функции и построения её графика с помощью производной. По аналогии возможны схемы изучения геометрических тел, в первую очередь многогранников, и изучения движений как на плоскости, так и в пространстве.

Займёмся схемой движений. Вначале предполагается изучение общих свойств движений, включающее в себя такие вопросы:

1. Определение движения. Виды движений.
2. Образ пересечения и объединения множеств в результате движении.
3. Обратное движение.
4. Композиция движений.
5. Образы основных фигур при движении: отрезка, луча, прямой, полуплоскости.
6. Инварианты движений: расстояние, угол, отношение между фигурами.

Вкратце раскрою содержание некоторых пунктов.

В первом даётся определение движения, его обозначение — I, приводятся примеры осевой симметрии, центральной симметрии, поворота и переноса. Приводятся контрпримеры отображения плоскости на себя, не являющиеся движениями, хотя бы гомотетия. К движениям относятся и композиции движений. После этого мы получаем возможность говорить о произвольном движении, образ которого создаётся с помощью реального движения листа кальки по основному листу. Возникает вопрос - как задать произвольное движение?

Движение считается заданным, если можно найти образ произвольной точки плоскости, причём однозначно. С помощью листа кальки ученики убеждаются в том, что для однозначного задания движения двух точек на плоскости и их образов мало, необходима ещё одна точка, причем все три не лежат на одной прямой.

Во втором пункте обсуждается и доказывается, что образ пересечения множеств является пересечением образов данных множеств, и то же для объединения множеств. Это утверждение неявно используется во многих задачах на движение. (Доказательство утверждений длинное, и довольно много в нём чисто логического, я и не предполагал, что в классе найдутся ученики, которые смогут его воспроизвести. Однако нашлись.)

В шестом пункте доказывается, что движение сохраняет отношение параллельности или пересечения двух прямых; движение сохраняет расстояние от точки до прямой.

После этого приступаем к изучению конкретных движений. Схема изучения такова:

1. Определение.
2. Способы задания.
3. Построение образов фигур.
4. Неподвижные точки.

5. Обратное движение.
6. Построение прообразов фигур.
7. Композиция движений данного вида.
8. Ориентация плоскости в данном движении.
9. Запись движения в координатной форме.

Содержание пунктов 8 и 9 не являлось программным. (Позволю себе заметить, что программа предопределяет содержание того, что можно требовать от ученика, а не то, что мы с ним обсуждаем,— обсуждать можно всё, что считаешь полезным для развития.) В пункте 8 выясняется вопрос о том, что происходит с ориентацией плоскости в результате данного движения. Обсуждение ведётся на наглядном уровне с использованием образов, основанных на реальном движении. Например: «Мальчик катается на карусели, другой мальчик катается на симметричной карусели. В чём разница в их движениях?» (При исследовании ориентации и при исследовании других движений полезен образ окружности.) Использование ориентации помогает установить, каким движением будет композиция двух данных движений. Вот конкретная задача: является ли композиция двух осевых симметрии осевой симметрией? Обычное решение: брать некоторые точки плоскости, строить их образы и, наблюдая за этим процессом, дать ответ. А вот какое решение я услышал от своего ученика Саши Г.: каждая осевая симметрия меняет ориентацию, поэтому их композиция сохраняет первоначальную ориентацию, а значит, не может быть осевой симметрией. Немудрено, что этот ученик, кончив школу, стал заниматься математикой профессионально.

В пункте 9 даётся координатный вид основных движений за исключением переноса. Рассматриваются три осевые симметрии: относительно оси x, оси y и прямой $y=x;$ центральная симметрия относительно начала координат; поворот на 90° вокруг начала координат по часовой стрелке и против неё. Соответствующая запись координат делалась, в частности, и в матричном виде. Например, симметрия относительно оси x записывалась так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[S_x]{} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Матричную запись удобно использовать в дальнейшем для записи в координатной форме переноса, гомотетии; на занятии кружка или на факультативе можно провести классификациго движений на основе классификации матриц 2 х 2. С помощью координатной записи можно решать задачи, совсем нетрадиционные для семиклассников. Например, исследовать композицию осевых симметрии на коммутативность: верно ли, что $S_x \circ S_y = S_y \circ S_x$?

Однажды в классе, используя координаты, мы доказали, что каждая из этих композиций является центральной симметрией относительно начала координат, а значит, между ними можно поставить знак равенства. И затем я спросил: «А что это всё напоминает?» Ну что могут напоминать такие закорючки семиклассникам? И вдруг одна ученица, довольно незаметная, робко тянет руку: «Мне это напоминает, - тихонько говорит она в застывшей, как студень, тишине класса, - переместительный закон умножения». Увы, она стала не математиком, а поваром.

И только после такого изучения движений мы переходили к решению с помощью движений содержательных геометрических задач.

В целом идея преобразования, приводящая к понятию симметрии, необыкновенно важна, и не только в математике. К сожалению, она весьма скудно отражена в нынешних программах, скорее, для приличия. А надо, чтобы она запала в формирующееся мировоззрение ребёнка, не только в систему его знаний, ввиду своей фундаментальности.

Однако в практической реализации этой идеи есть заметные трудности. Вряд ли возможно (тут я полагаюсь на собственный опыт) построить начальный систематический курс школьной геометрии, основываясь на идеях симметрии; всё-таки это более абстрактное понятие, нежели фигура. Во всяком случае, такое построение кажется мне очень сложной методической задачей. Оставлять же изучение симметрии на самый конец курса почти бессмысленно и с практической точки зрения (известно, как поверхностно изучаются темы, отнесенные под занавес курса), и по существу (если мы хотим, чтобы ученики освоились с этой идеей,— для освоения нет времени). Кроме того, почти невозможно научить школьников решать достаточно содержательные задачи методом преобразований, удаётся разве что только продемонстрировать такую возможность.

С другой стороны, игнорировать громадную эвристическую силу соображений симметрии просто нелепо. Если ученик видит симметрию, то из каких таких принципиальных соображений запрещать её использование? Вряд ли их можно обнаружить и остаётся предположить только одно: запретив, мы избавляем себя от учительских хлопот, последующих за этим разрешением. Ведь если разрешить, то каким образом использовать симметрию? Ссылаться на неё, коли она видна, но пусть и не обоснована (что подозрительно в «традиционном» преподавании), использовать только иногда (а когда?) или лишь после прохождения соответствующей теории? Ещё вопрос: а что делать теперь с учеником, не увидевшим (или не захотевшим увидеть — на всякий случай! — вдруг вздумают придраться) симметрию там, где она есть? Общего ответа я на этот вопрос дать не берусь, а скажу лишь, что делаю сам. Мне очевидно, что опору на симметрию надо только поощрять, даже до того, как она изучалась в классе, ведь куда хуже, если её не видят.

«Однако,— говорю я детям,— с симметрией надо быть аккуратным». Шучу: «Из соображений симметрии у человека два сердца!» В классной работе, идущей на скорости, приветствую фразу типа: «Из соображений симметрии центр вписанного шара лежит там-то...», даже если симметрия не была ещё предметом изучения. А если работа домашняя, то требую необходимое обоснование: о какой симметрии конкретно идет речь и почему она имеет место в данном случае.

Говоря о движении, мы сталкиваемся в самом начале с небольшой дилеммой. Что будем «двигать» — всё пространство или фигуры в нём (точнее, ограниченные фигуры)? На практике при решении задач, как правило, «двигают» фигуры. С позиций теории удобнее говорить о движении всего пространства. (Аналогия: при изучении, например, линейной функции мы рассматриваем её сразу на множестве вещественных чисел, а не на каком-либо конкретном отрезке.)

Мелочь, конечно, потому что в конце концов эти разные подходы сводятся воедино, но она показывает отношение к тому, что считается «первичным» — теория или практика. Я предпочитаю идти от практики и «двигать» фигуры, в иных учебниках предпочитали «двигать» пространство. Привожу пример: вы сидите у одного конца праздничного стола и вас заинтересовало содержимое тарелки на противоположном конце. Что вы двигаете — скатерть или всё же тарелку?

Здесь будет уместно заметить, что знание свойств композиции различных преобразований разнообразит решение многих задач. Один пример — из анализа. Пусть даны всюду определённые взаимно обратные функции $f(x)$ и $g(x)$. Будут ли взаимно обратными функции $f(-x)$ и $g(-x)$? Переведём задачу на геометрический язык. Так как графики взаимно обратных функций $f(x)$ и $g(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$, то можно рассматривать их вместе как некую фигуру M, симметричную относительно этой прямой. Графики функций $f(-x)$ и $g(-x)$, рассмотренные вместе, можно рассматривать как фигуру N, симметричную M относительно оси y. И ответ на вопрос «виден» — фигура N не будет симметрична относительно прямой $y = x$. А потому ответ на поставленный вопрос отрицателен. Этот результат можно получить цепочкой очевидных записей: $(x,y)\to(-x,y)\to(y,-x)\to(-y,-x)$. Мы берём точку и последовательно отражаем её от трёх прямых: оси ординат, биссектрисы первого координатного угла и опять от оси ординат. Сравнив выражения в первой и последней скобках, видим, что нужной нам симметрии относительно биссектрисы первого координатного угла нет. Результат, легко получаемый и без всяких выкладок, при небольшом напряжении наглядной интуиции.

Вот как выглядит решение — без рисунка! — известной задачи о гомотетичности двух произвольных окружностей (для большей определённости неравных).

Пусть сначала даны две концентрические окружности — их гомотетичность очевидна. Пусть затем даны две неравные окружности O_1 и O_2. Введём в рассмотрение окружность O_3, концентричную с окружностью O_2 и равную окружности O_1. Дальнейшее —устно. Окружность O_3

может быть получена из окружности O_1 параллельным переносом. Параллельный перенос есть композиция двух центральных симметрии. Центральная симметрия является частным случаем гомотетии. Тогда окружность O_2 получается из окружности O_1 композицией трёх гомотетий, Известно, что композиция двух гомотетий является гомотетией (или переносом). Поэтому композиция трёх гомотетий (в нашем случае) является гомотетией. Всё.

Геометрические преобразования, как известно (после Ф. Клейна), определяют сам предмет геометрии. Известны попытки реализовать эту точку зрения полностью, построив на этой основе полный курс (Ф. Бахман, частично В. Шван, их последователи, есть соответствующие фрагменты в работах З. Скопеца). Геометрические преобразования полезны для развития, интересны, имеют громадные применения, в некоторой степени доступны детям. Поэтому велик соблазн внедрить их в школьное образование с самого начала систематического курса, внедрить хотя бы как метод решения задач. Было много попыток в этом направлении, но у нас в школе они не прижились (упомяну только учебники В. Болтянского с соавторами, учебники под редакцией А. Колмогорова, книгу С. Крыговской, прекрасные книги В. Болтянского и И. Яглома, а также задачник Г. Саранцева). Почему же этого не происходит?

Моё объяснение таково: овладение ими требует более развитого абстрактного мышления. Откуда же оно возьмётся? Разве что от менее абстрактного изучения геометрических фигур на основе треугольников. Хорошо бы преподавать в школе два курса геометрии: Геометрия I - на основе треугольников - и геометрия II - на основе преобразований. А где взять для этого время? Может быть, когда - нибудь, используя компьютер…Мечты, мечты…

Добавлю ещё вот что. Рассказывая детям о преобразованиях, я провожу такое сравнение. Человека можно изучать с разных сторон: анатомия, физиология - это одна сторона. Но есть ещё и психология, социальная психология. Человека помещают в разные обстоятельства и смотрят за его поведением: что в его поведении стабильно, а что меняется. То есть, интересны инварианты его поведения (кто такой "я" ?- на эту тему есть книга И. Кона "Загадка человеческого "Я"). Но это и есть идеология преобразований - давайте начнём что-то делать с фигурой и проследим за её свойствами: какие остаются, а какие исчезают. Никогда не стоит упускать случая продемонстрировать нечто общее в математике и в реальной жизни.

Не лишне заметить, что преобразования помогают и при изучении основ анализа. Примеров много, приведу только один. Речь пойдёт о формулах приведения. В школьном курсе этот раздел – какая – то «псевдоматематика». В самом деле, в стандартной записи функции, если аргумент подвергается линейному преобразованию, то он стоит на первом месте. А в школьных формулах приведения он почему – то отправлен на второе место. Похоже, что это сделано для удобства мнемонического запоминания этих формул, и только то.

Какова цель этих формул? Таблицы тригонометрических функций составлены для углов первой четверти. Когда требуется по таблицам найти значения тригонометрических функций других углов, то требуется «загнать» их в этот промежуток.

Каково математическое содержание этих незатейливых формул с геометрической точки зрения? Имеется график $y = f(x - a)$ или $y = f(a - x)$, каждый из которых получается движением из графика тригонометрической функции f. Благодаря свойству «ётности» (чётности или нечётности) тригонометрической функции f выполняется равенство $f(a - x) = \pm f(x - a)$. Поэтому график $y = f(a - x)$ может рассматриваться как не имеющий самостоятельного значения.

В общем случае график $y = f(x - a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси x (буду дальше называть его сдвигом, можно при желании уточнить – горизонтальным сдвигом). При смене знака аргумента у тригонометрической функции добавляется симметрия относительно оси ординат (для чётного косинуса) или относительно начала координат (для нечётных синуса, тангенса и котангенса). Требуется установить связь между точками нового графика $y = f(x - a)$ и точками исходного графика $y = f(x)$, находящимися в первой четверти, образно говоря, «вернуть» их, куда – то убежавших, в первую четверть.

Разберу процедуру «возвращения» угла для косинуса. Из чётности косинуса следует, что

$\cos(a - x) = \cos(x - a)$. Из периодичности косинуса следует, что $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

Рассматриваются два (всего два !) преобразования аргумента.

Первая формула приведения основана на «полупериодичности» косинуса:

$$\cos(x \pm \pi) = -\cos x \,.$$

Словесно: изменение аргумента косинуса на полупериод меняет косинус на противоположный.

Эту формулу (как и все формулы приведения) можно получить из теоремы сложения. Её можно получить также из графика косинуса.

Известно общее утверждение (для любой функции), что график $y = f(x - a)$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом на a: вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

Отсюда получаем, что график $y = \cos(x - \pi)$ получается из графика $y = \cos x$ сдвигом последнего вправо на π. Ничего не рисуя, можно «увидеть», что получена кривая, симметричная относительно оси абсцисс графику $y = \cos x$. А если это сходу не «видно», то можно нарисовать соответствующую картинку.

Аналогично получаем формулу для $\cos(x + \pi)$. Впрочем, можно заметить, что аргумент $x + \pi$ отличается от аргумента $x - \pi$ на 2π и поэтому $\cos(x + \pi) = \cos(x - \pi)$ в силу его периодичности.

Вторая формула приведения основана на «четвертьпериодичности» косинуса:

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \ \mu \sin x.$$

Для доказательства воспользуемся сдвигом графика $y = \cos x$. График $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ смещён вправо относительно графика $y = \cos x$ на $\frac{\pi}{2}$. Можно «увидеть», что получен график $y = \sin x$. При необходимости для подтверждения «увиденного» можно нарисовать соответствующую картинку.

Аналогично получаем формулу для $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Впрочем, можно заметить, что аргумент $x + \frac{\pi}{2}$ отличается от аргумента $x - \frac{\pi}{2}$ на π и поэтому $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ в силу «полупериодичности» косинуса.

Покажу на примере, как работает эта техника. Пусть требуется «привести» $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

Сначала в силу чётности косинуса меняем порядок выражения в скобках:
$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$. Затем пользуюсь «полупериодичностью» косинуса, увеличиваем аргумент на π, получаем: $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. И затем в силу «четвертьпериодичности» косинуса получаем окончательный результат : $-\sin x$.

Можно действовать иначе, привожу такую цепочку равенств:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Здесь первое равенство вытекает из «полупериодичности» косинуса, второе – из его чётности, третье – из его «четвертьпериодичности».

Возможны и другие цепочки равенств, например,

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$

Перейдём к синусу. Разберу процедуру «возвращения» угла для синуса.

Из нечётности синуса следует, что $\sin(a - x) = -\sin(x - a)$. Из периодичности синуса следует, что $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

Формулы приведения для синуса могут быть получены совершенно аналогично.

Первая формула приведения основана на «полупериодичности» синуса:

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x .$$

Вторая формула приведения основана на «четвертьпериодичности» синуса:

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos x.$$

Можно не заниматься их выводом специально, а использовать переход от синуса к косинусу по формуле «четвертьпериодичности» косинуса: $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. И тогда, к примеру,

$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x - \pi) = -\cos x.$

Вот пример тому, как работает эта техника. Пусть требуется «привести» $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

Сначала в силу периодичности синуса переходим к выражению $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Затем пользуемся «четвертьпериодичностью» синуса, окончательный результат : $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

Можно действовать иначе: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$. Первый знак равенства основан на «полупериодичности» синуса, второй знак равенства основан на его «четвертьпериодичности». Возможен и такой вариант: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

Формулы «четвертьпериодичности» - не велика премудрость. Они отражают тот простой факт, что графики синуса и косинуса сдвинуты относительно друг друга на $\pi / 2$.

Разберу процедуру «возвращения» угла для тангенса. Из нечётности тангенса следует, что $\mathrm{tg}(a - x) = -\mathrm{tg}(x - a)$. Из периодичности тангенса следует, что $\mathrm{tg}(x \pm k\pi) = \mathrm{tg}\, x$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

Формула приведения для тангенса одна; она основана на «полупериодичности» тангенса*:*

$$\mathrm{tg}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}\, x .$$

Для получения равенства достаточно увидеть, что происходит с графиком тангенса при сдвиге на $\frac{\pi}{2}$ в ту или иную сторону.

Для котангенса можно действовать буквально так же, как для тангенса. Иначе формулу приведения для котангенса можно получить, перейдя к нему от уже полученной формулы для тангенса.

Немного тренировки и всё начнёт получаться быстро.

«На сладкое» ко всем геометрическим рассуждениям о том, что происходит с графиком тригонометрической функции при сдвиге, полезно добавить известную механическую интерпретацию: считать, что по оси абсцисс идёт время и толковать сдвиг графика как опережение или отставание при изучении некоторого процесса – это толкование помогает при изучении гармонического колебания.

Что важно здесь для дифференцированного преподавания: одни ученики могут пойти по пути мнемонического запоминания, другие – «смыслового», им достаточно запомнить существенные свойства тригонометрических функций и влияние движений на их графики. На втором пути не нужно мнемоники и можно действовать из наглядных представлений. Мы прекрасно к тому же знаем, что механическая память может подвести и всегда полезно знать другие варианты получения формулы. Не надо «позорить» математику и делать из неё нечто, что можно только вызубрить.

В заключение – несколько общих соображений. Формулы приведения появились для работы с таблицами тригонометрических функций. Сейчас, когда эти таблицы стали архаизмом благодаря инженерным калькуляторам, зачем они так важны сейчас? Встречаются, правда, примеры, где эти формулы работают для других целей. Например, требуется установить знак выражения cos 100 или решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$ на промежутке (99, 101). Но, опять же, их использование имеет смысл только при отсутствии хорошего калькулятора.

Поэтому сохранение этих формул в рамках общего образования – зряшное дело. Кому они будут нужны после школы? И уж если их оставлять, то с математическим содержанием.

Оно, по – моему, таково. Формулы приведения слишком специальны, их достаточно трактовать как частный случай общего понятия о построении графика функции при линейном преобразовании аргумента. С этой позиции нет принципиальной разницы в выражениях, к примеру, $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ещё. Когда надо построить график $y = f(a - x)$ для произвольной функции f, в частности, тригонометрической, и для произвольного значения параметра a (например, $\sin(x - 1)$) не помогут никакие формулы приведения, а использование движений (сдвига и симметрий) приводит к нужному результату.

Добавлю для полноты картины вот что. Формулы приведения можно получить, рассматривая не только сдвиги, но и симметрию относительно прямой, параллельной оси ординат.

Известно, что график $y = f(a - x)$ симметричен графику $y = f(x)$ относительно прямой $x = a/2$. Отсюда следует, что график $y = \sin(\pi - x)$ симметричен графику $y = \sin x$ относительно прямой $x = \pi/2$. В результате этой симметрии, как можно «видеть» без рисунка (но можно и нарисовать), получается график $y = \sin x$. Отсюда: $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Возможен и другой вариант. Выражение $f(a - x)$ можно представить в виде $f(-(x - a))$. Потому график $y = f(a - x)$ может быть получен из графика $y = f(x)$ композицией сдвига на вектор $(a, 0)$ и последующей симметрией относительно прямой $x = a$.

А вот по какой схеме можно проводить в старших классах изучение многогранников:

1. Способ построения.
2. Выпуклость.
3. Вид какой-либо развёртки.
4. Ортогональные проекции на три попарно перпендикулярные плоскости.
5. Наличие среди рёбер или граней параллельных; перпендикулярных.
6. Форма некоторых сечений.
7. Существование описанной сферы.
8. Существование вписанной сферы.

Далее, если указаны для этого многогранника определяющие его размеры, можно перейти к вычислению его параметров:

1. Диаметр (наибольшее расстояние между его точками).
2. Расстояние между некоторыми рёбрами.
3. Расстояние от рёбер до параллельных граней.
4. Расстояния между параллельными гранями.
5. Углы между рёбрами.
6. Углы между рёбрами и гранями.
7. Углы между гранями.
8. Границы для площадей и периметров некоторых сечений.
9. Радиус описанной сферы.
10. Радиус вписанной сферы.
11. Площадь поверхности.
12. Объём.

Разумеется, никто не обязан всё это делать в одной задаче. К этой схеме можно ещё что-то и добавить. Не в этом дело. Просто при изучении геометрических тел хочется иметь хоть некоторый порядок.

Реализация единого курса, как мы видим, привела к множеству частных методических задач. Как, например, рассказать о действительных числах? В едином курсе я предпочел аксиоматический подход. Между прочим , доказывал детям, что $1 > 0$ (1 —нейтральный элемент поля действительных чисел относительно умножения, 0 — нейтральный элемент этого поля относительно сложения). Ученики, по-моему, были потрясены этим событием вплоть до следующего урока, где было доказано, что $2 \cdot 2 = 4$.

11.7. О ПОЛЬЗЕ МНОЖЕСТВ

Одним из основных столпов этой программы была теория множеств. Термин «теория множеств» я употребляю здесь с некоторой опаской. То, что было введено в школе: понятия множества, элемента множества, включения множеств, их равенство и простейшие операции с множествами, а также свойства этих операций,— ну какая же это теория множеств, когда всё это можно показать и даже доказать на простейших рисунках—кругах Эйлера? Вместе с тем всё это полезно в школьном курсе, так как способствует упрощению восприятия. Что же касается самого теоретико-множественного подхода, то его, как показал А.Александров (Математика в школе.—1984.—№ 1), вряд ли возможно игнорировать даже в простейших ситуациях. Именно этот подход скрывается, например, в такой вполне безобидной фразе: «Отрезок состоит из точек». Тут вот что любопытно. Один из первых моих выпускников в математическом классе сказал однажды, что не понимает как раз этой фразы, очень удивив - а что же тут непонятного? Как всё-таки прекрасно, что есть дети, думающие не так, как мы, а глубже, интереснее! Хорошо бы нам всегда их понимать. Кстати, когда говорят о том, что в математической школе легко работать («Там же все дети способные!»), я только отшучиваюсь. Мыслить в унисон с ними, понимать их аргументацию, быстро находить рациональное зерно в их оригинальных соображениях и приводить убедительные контрпримеры, когда они говорят чепуху,— всё это требует чрезвычайного напряжения. И сколько раз я «садился в лужу», особенно к концу рабочего дня, не сосчитать!

Вот примеры того, как простейшие множественные понятия могут быть использованы . Первый **пример** — объяснение необходимости и достаточности, причём в средних классах. Известно, что свободное владение этой терминологией отсутствует даже у иных выпускников. Напомню, в чём дело. Пусть есть утверждение вида $p \Rightarrow q$ (из p следует q). Тогда p называется достаточным условием для q, а q называется необходимым условием для p. Несложно понять фразу: «Если число делится на 10, то оно делится на 5». Но сформулировать ту же мысль в терминах необходимости и достаточности получится сходу далеко не у всех. Причина, по всей вероятности, в том, что соответствующее умственное действие не является достаточно обобщённым.

Для решения этой методической задачи я использовал некоторые положения теории поэтапного формирования умственных действий, развитой П. Гальпериным. Согласно ей, формирование умственного действия проходит в нескольких формах: материализованной, внешнеречевой и умственной. Освоение умственного действия начинается в материализованной форме, которая характеризуется тем, что объект действия задан ученику в виде реальных предметов или моделей. Далее, в формировании умственного действия решающую роль играет ориентировочная основа действия. Из всех её типов наиболее существенным является тот из них, в котором ориентиры деятельности представлены в обобщённом виде и в полном составе.

В нашем случае материализованная форма деятельности — та форма, в которой ученики оперируют с объектами, доступными для наглядного восприятия,— появляется в результате перевода задачи на язык, использующий множества. Именно: каждая высказывательная форма имеет множество истинности. Множество истинности высказывательной формы $P(x)$ при необходимости запишем так: $\hat{P}$. Тогда запись высказывания $P(x) \Rightarrow Q(x)$ равносильна тому, что $\hat{P} \subset \hat{Q}$ Понятия множества и подмножества к этому времени ученикам были известны. Запись $A \subset B$ может быть проиллюстрирована кругами Эйлера (рис. 15).

Рис. 15

Первая часть работы состоит в том, чтобы добиться понимания учениками записи $A \subset B$. При этом каждое упражнение выполняется в материализованной форме, т. е. с кругами. Вот примеры таких упражнений:

1. $A \subset B$. Верно ли, что $B \subset A$?
2. $A \subset B$, $B \subset C$. Верно ли, что $A \subset C$?
3. $A \subset B$, $X \subset A$. Верно ли, что $X \subset B$?
4. $A \subset B$, $B \subset A$. Могут ли обе эти записи быть верными?
5. $A \subset B$, $C \subset B$. Верно ли, что $A \subset C$? $C \subset A$?
6. $A \subset B$, $A \subset C$. Верно ли, что $B \subset C$? $C \subset B$?

Теперь рисунок, соответствующий записи $A \subset B$, начинает «перетолковываться». Используя обычные житейские представления, формулируются два утверждения:

1. Чтобы элемент *x* принадлежал множеству *B*, достаточно, чтобы он принадлежал множеству *A*.
2. Чтобы элемент *x* принадлежал множеству *A*, необходимо, чтобы он принадлежал множеству *B*.

Этот рисунок можно «подать» как задачу о «попадании в две мишени: *A* и *B*». Ответ: чтобы попасть в мишень *B*, достаточно попасть в мишень *A*, а чтобы попасть в мишень *A*, необходимо попасть в мишень *B*. Дальше начинается «сворачивание фраз». В конце концов приходим к таким фразам: «*A* достаточно для *B*» и «*B* необходимо для *A*»,

Следующий этап работы заключается в том, что ученики переводят информацию, заданную на кругах, на язык «необходимости и достаточности». Рисуются схемы (рис. 16), и ученики к каждому из рисунков формулируют фразу с использованием терминов «необходимо» и «достаточно».

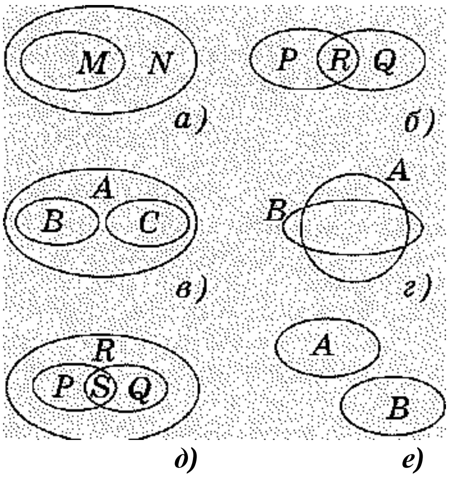


Рис. 16

На следующем этапе работы информация поступает к ученикам через речь. Они должны нарисовать схему услышанного. А диктуются такие, к примеру, фразы:

1) *A* достаточно для *B*;
2) *P* необходимо для *Q*;
3) *M* необходимо для *N*. *N* необходимо для *P*;
4) *A* достаточно для *B*, *B* достаточно для *C*;
5) *X* достаточно для *Y*, *Y* необходимо для *Z*;
6) *X* необходимо для *Y*, *Y* достаточно для *Z*.

Схему ученики могут рисовать сразу, не записывая условия.

И только теперь переходим к решению содержательных задач. На простейших примерах устанавливается предписание для выполнения данного умственного действия. Пусть, например, даны две высказывательные формы: $x \vdots 10$ и $x \vdots 5$. Требуется их связать термином «необходимо» или «достаточно». Пусть A — множество истинности первой высказывательной формы, а B — множество истинности второй высказывательной формы. Нарисуем условно множество A. Берём любой элемент из A, т. е. любое число, делящееся на 10, и спрашиваем себя - а будет ли этот элемент принадлежать множеству B, т. е. делиться на 5? Ответ — да, и в случае такого ответа сразу рисуем круг, содержащий A. Полученную схему ученики уже умеют формулировать нужным образом.

Дальнейшая работа состоит в тоё, что от материализованной формы действия мы переходим к внешнеречевой, а затем и к умственной. Процесс этот небыстрый, и торопиться не следует. Реальный успех ясен только к концу обучения. Надо прорешать много упражнений для подкрепления сделанной работы, да и затем не упускать случая поупражняться. И хотя такое решение данной методической задачи кажется громоздким, я не знаю более эффективного способа для начального усвоения этих понятий.

Вот ещё один пример использования понятия множества в школьном курсе — на этот раз речь пойдёт о доказательствах некоторых теоретических утверждений стереометрии. Нам понадобится операция пересечения множеств и её свойства. Доказательства этих свойств очевидны, как только сделаны соответствующие рисунки для самого общего случая, и я их приводить не буду.

Итак, если даны множества A, B, C, то:

1) $A \cap B = B \cap A$;
2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
3) $\varnothing \cap A = \varnothing$;
4) если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.

Из этих свойств ясно, что когда мы имеем пересечение нескольких множеств, то его результат можно находить в любом порядке. Если в записи пересечения одно и то же множество встречается несколько раз, то его достаточно оставить даже в единственном числе. Кроме того, в записи пересечения нескольких множеств без скобок можно эти скобки расставлять как нам угодно.

Теперь заметим, что параллельность двух прямых a и b на плоскости можно записать так: $a \cap b = \varnothing$; принадлежность прямой a плоскости α можно записать так: $a \cap \alpha = a$; параллельность прямой a и плоскости α можно записать так: $a \cap \alpha = \varnothing$; параллельность двух плоскостей α и β можно записать так: $\alpha \cap \beta = \varnothing$,

Перейдём к задачам.

Задача 1. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c, плоскости β и γ пересекаются по прямой a, плоскости γ и α пересекаются по прямой b, прямые a и b пересекаются в точке A. Доказать, что прямая c пересекает прямую a и прямую b, причём в одной и той же точке.

Решение. Любопытно, что эту задачу можно решить безо всякого рисунка. Сначала перепишем условие с помощью множеств: $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = a$, , $\alpha \cap \gamma = b$, $a \cap b = A$. Нас интересует пересечение трёх прямых: a, b и c, т.е. множество $c \cap a \cap b$,

Имеем: $c \cap a \cap b = (\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) \cap (\alpha \cap \gamma) = (\beta \cap \gamma) \cap (\alpha \cap \gamma) = a \cap b = A$.

Отсюда и получается нужный нам результат.

Задача 2. Пусть три плоскости пересекаются по трём различным прямым, причём никакие две из этих прямых не пересекаются. Доказать, что каждая из данных прямых не пересекает той плоскости из данных, в которой она не лежит.

Решение аналогично.

Задача 3 (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, но сама не лежит в плоскости α, то она параллельна α. Доказать.

Решение. Пусть a и b лежат в плоскости β. Тогда $a \cap \alpha = (\alpha \cap \beta) \cap \alpha = a \cap (\alpha \cap \beta) = a \cap b = \varnothing$, что и требовалось получить.

Задача 4 (признак параллельности прямых). Если прямая a параллельна плоскости α, а плоскость β проходит через a и пересекает α по прямой a_1 , то $a \parallel a_1$. Короче это можно сказать так: прямая, параллельная плоскости, параллельна своей проекции на эту плоскость (имеется в виду параллельная проекция). Доказать

Решение. $a \cap a_1 = a \cap (\alpha \cap \beta) = (a \cap \alpha) \cap \beta = \varnothing \cap \beta = \varnothing$.

Задача 5. Две плоскости параллельны и пересекаются третьей. Доказать, что полученные в пересечении прямые параллельны.

Задача 6. Имеются две пары пересекающихся плоскостей. Плоскости этих пар соответственно параллельны. Доказать, что прямые пересечения плоскостей параллельны.

Не следует думать, что такого рода доказательства заменяют традиционные, они только иллюстрируют возможности использования множеств и только в таком качестве сообщаются ученикам. Да и сами утверждения, доказанные с их помощью, достаточно просты. Но вот более серьёзный пример.

Задача 7. Два круговых сечения шара имеют одну общую точку. Доказать, что окружности кругов имеют общую касательную.

Традиционное решение в этой задаче достаточно муторное. Поэтому перейдём к множествам.

Решение. Пусть первый круг K_1 получился при пересечении шара *Ш* и плоскости α, а второй круг K_2 получился при пересечении шара *Ш* и плоскости β. Так как эти круги по условию имеют общую точку, то плоскости этих кругов имеют общую прямую, которую обозначим через *a:*
$\alpha \cap \beta = a$. Рассмотрим теперь пересечение прямой a с шаром:

$$a \cap Ш = (\alpha \cap \beta) \cap Ш = (\alpha \cap Ш) \cap (\beta \cap Ш) = K_1 \cap K_2 = A.$$

Но тогда прямая a имеет с каждым кругом одну общую точку, а значит, является касательной к окружности каждого круга.

В этом решении весьма любопытно то, что нигде явно не использовалось определение шара, а значит, задача допускает какие - то обобщения, которые можно поискать вместе с учениками.

Задача 8. К сфере проведены две касательные плоскости, которые пересекаются по некоторой прямой. Доказать, что эта прямая не имеет со сферой общих точек.

Задача 9. Две сферы имеют одну общую точку. Через эту точку проведена плоскость, касательная к одной из сфер. Доказать, что плоскость будет касаться и другой сферы.

Задача 10. Доказать, что плоскость, опорная к цилиндру и проходящая через его образующую, пересекает плоскость основания цилиндра по прямой, опорной к его основанию.

(Плоскость называется опорной к фигуре, если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку, а вся фигура лежит с одной стороны от этой плоскости. Аналогичное определение для опорной прямой.)

Задача 11 Два цилиндра имеют одну общую образующую. Через неё проводится плоскость, опорная к одному из них. Доказать, что она будет опорной и к другому.

В задачах 10 и 11 вместо цилиндров в условии можно рассматривать конусы.

Я привёл только два примера использования множеств в преподавании. Но есть и другие. Используя множества, гораздо легче говорить о равносильности уравнений и неравенств, о нахождении фигуры по характерному свойству для её точек и т. д.

Разговор с учениками о множествах значим не только с практической стороны, он как бы приобщает их к философским проблемам математики. Здесь, в этом разговоре, главную роль играют бесконечные множества. Беседы о разных видах бесконечности (актуальной и потенциальной), о проникновении в бесконечность, начатом древними греками, далее Б. Больцано и Г. Кантором, о множествах счётных и несчётных, об иерархии бесконечностей, об аксиоме выбора и континуум-гипотезе, о конструктивной математике и, разумеется, о парадоксах в теории множеств, от которых у детей глаза лезут на лоб,—такие беседы позволяют даже считать математику «наукой о бесконечности», правильно это понимая.

К сожалению, последовательная точка зрения на множества в школьном курсе геометрии может привести к терминологическим сбоям (но не содержательным). Вот пример. Пусть отрезок a

является пересечением фигур P и Q. Предположим, в результате движения образом фигуры P является фигура P_1, образом фигуры Q является фигура Q_1, образом отрезка a является отрезок a_1, разумеется, равный по длине отрезку a. Мы можем написать такое равенство: $P \cap Q = a$, можем написать такое равенство: $a = a_1$, но у нас "рука не повернётся" написать равенство $P \cap Q = a_1$, хотя транзитивность отношения равенства ясна "сама собой ". Дело в том, что равенство в теории множеств не идентично равенству для геометрических фигур. А если геометрическая фигура - это множество, то тут и начинается терминологический сбой: фигура - это множество, но равенство фигур не есть равенство множеств. Поэтому для большей точности в терминологии и пришлось в своё время в школьном курсе вводить достаточно специальный термин "конгруэнтность". И буря по этому поводу в кругах учительских была громадная. Думаю, что будь соответствующий термин более благозвучным, он бы сохранился. Впрочем, полагаю, без него можно обойтись, если помнить, с чем мы работаем, когда пишем такой привычный знак равенства. И так можно: $P \cap Q = a$, и так можно: $a = a_1$, а вот так: $P \cap Q = a_1$ - уже нельзя.

Учёт контекста необходим и в других случаях, когда знак равенства при буквальном толковании "ведёт себя довольно странно ". Вот пара забавных примеров.

Рассмотрим систему:
$x^2 + y^2 = xy$, $xy = 1$. По транзитивности равенства получаем уравнение: $x^2 + y^2 = 1$. Вроде всё правильно, но как это понимать?

А теперь возьмём такую систему: $x^2 + y^2 = 1$, $xy = 1$. По транзитивности равенства получаем уравнение: $x^2 + y^2 = xy$, откуда приходим к равенству $x = y = 0$. А как понимать эту чушь?

В обоих примерах получается нечто, на первый взгляд, странное. Их стоит привести ученикам, когда идёт разговор о равносильности систем.

11.8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛ

Как можно заметить из приведённой выше программы курса математики в математической школе, в ней не всегда выдержана привычная последовательность прохождения курса, Так, например, сначала изучается логарифмическая функция, а затем показательная. Объяснение довольно простое. Я уже говорил, что надо как-то доказать равенство $(a^x)^y=a^{xy}$ для произвольных показателей. Если это делать «в лоб», то придётся разматывать довольно длинную цепочку скучных фактов из теории действительных чисел. Но можно делать иначе. Определим натуральный логарифм с помощью интеграла (известно, как это делается), а затем логарифм с произвольным основанием. Тогда показательная функция является обратной к логарифмической и все её свойства можно доказать.

Тут я вспоминаю случай с моей ученицей на устном вступительном экзамене в ВУЗ по математике. Ей достался как один из вопросов вывод формулы производной от логарифма. Она написала на листочке :

$(\ln x)' = \left(\int_1^x \frac{dt}{t}\right)' = 1/x$. Экзаменатор увидел это равенство и, сказав, «Ну раз ты это знаешь», отправил восвояси с пятёркой.

Если можно определить через интеграл логарифмическую функцию, то почему этого же не сделать для тригонометрических функций? На этом пути нам понадобятся дополнительные сведения: о несобственных интегралах, длине дуги кривой , замене переменной в определённом интеграле, некоторых интегральных равенствах, а также уверенное владение движениями на плоскости и их композициями. Коротко остановлюсь на этих сведениях.

Сначала надо познакомить учеников с несобственным интегралом и его свойствами. Никаких принципиальных сложностей это не составляет, ибо интеграл этот является пределом функции, являющейся интегралом с переменным верхним (или нижним) пределом. Сходимость несобственного интеграла — это просто существование предела некоторой функции. Для дальнейшего изложения теории потребуется установить сходимость таких интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \qquad (1)$$

и

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad (2),$$

что делается по определению.

Затем ученикам надо показать, как доказывается сходимость интеграла в тех случаях, когда этого нельзя сделать непосредственно — но с помощью признака сходимости. Нам понадобится такой признак сходимости: если под интегралом стоит положительная функция, меньшая на всём рассматриваемом промежутке другой функции, интеграл от которой на данном промежутке сходится, то и первоначальный интеграл сходится. Этот признак сходимости совершенно прозрачен в наглядной интерпретации. На основании этого признака, учитывая сходимость интегралов (1) и (2), выводим сходимость двух важнейших для дальнейшей теории интегралов: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ и $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Для первого интеграла доказываем совершенно не очевидное и даже удивительное равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2} \qquad (3)$$

Для этого сначала покажем, что при $a>0$ выполняется равенство $\int_{\frac{1}{a}}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^a\frac{dx}{1+x^2}$.

Это достигается подстановкой $x = 1/t$ в интеграл левой части равенства. Затем перейдём в этом равенстве к пределу при

$a \to +\infty$. Получим $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$. Тогда $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$,

и в силу чётности подынтегральной функции получаем равенство (3).

Для доказательства сходимости интеграла $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

предполагается знание формулы длины дуги окружности через интеграл, именно: $L=\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

где a и b — абсциссы концов дуги, которая для удобства располагается в верхней полуплоскости и тем самым меньше полуокружности). Полагая в этой формуле $a = 0$ и $b = 1$, мы получаем, с одной стороны, длину четверти окружности, а с другой — несобственный интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, сходимость которого уже установлена. В этом месте возникает беседа с учениками на тему: «Зачем надо доказывать специально сходимость этого интеграла, если он представляет собой длину дуги окружности, в существовании которой никто не сомневается?»

Итак, мы имеем равенство $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi/2$.

Произведём в этом равенстве замену переменной по формуле $x=2t/(1+t^2)$ и получим: $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\pi/4$.

Из этого равенства, учитывая (3), выводим интересное соотношение: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

Оно интересно тем, что число π фигурирует здесь вне всякой связи с кругом. При желании можно было бы даже определить этим равенством π. Число π здесь — это площадь (в несколько расширенном толковании этого понятия) под рациональной кривой $y = 1/(1+x^2)$.

Теперь всё готово для изложения теории тригонометрических функций с помощью интеграла.

1. Функции arctg$x$ и arcctg$x$.

Определение 1. arctg$x$ = $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

Определение 2. arcctg$x$ = $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Оба определения хорошо иллюстрируются графиком (рис. 17).

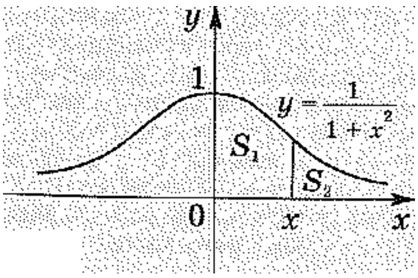


Рис. 17

При $x>0$ имеем S_1 = arctg$x$ и S_2 = arcctg$x$. Из этих определений и равенства $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ получаем соотношение между функциями arctg$x$ и arcctg$x$:

$$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arcctg}x = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда ясно, что изучение arcctg x не имеет самостоятельного значения, и получение его свойств целесообразно поручить ученикам после окончания исследования arctg x, которым мы сейчас и займёмся.

1. Область определения функции arctg x.

Она представляет собой всю действительную ось, что следует из существования данного интеграла.

2. Непрерывность.

Это свойство не требует специального доказательства, ибо уже известна непрерывность площади криволинейной трапеции. Возможен и такой вариант: производная от данной функции существует и равна $\frac{1}{1+x^2}$, а потому непрерывность следует из дифференцируемости.

3. Чётность или нечётность.

Известно, что первообразная от чётной функции нечётна, если её график проходит через начало координат. В данном случае оба условия выполнены, поэтому арктангенс — нечётная функция.

4. Монотонность.

Так как (arctg$x$)'= $\frac{1}{1+x^2}$, то из положительности производной на ***R*** следует возрастание arctg$x$ на ***R*** .

Кроме того, это видно из рисунка при x>0, а при x<0 можно использовать нечётность.

5. Нули функции.

Ясно, что при x = 0 arctg$x$ = 0. Других нулей у арктангенса нет в силу монотонности.

6. Знаки функции.

Из предыдущих двух свойств следует: при x>0 arctg$x$ >0, а при x<0 arctg$x$ <0.

7. Выпуклость.

Так как (arctg$x$)'' = -$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, то при $x > 0$ функция выпукла вверх, а при x<0 выпукла вниз.

8. Поведение на бесконечности.

Из свойств интеграла $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty}$ arctg$x$ = $\frac{\pi}{2}$. В силу нечётности функции $\lim\limits_{x\to-\infty}$ arctg$x$ = -$\frac{\pi}{2}$.

Теперь ясно, что множеством значении арктангенса является промежуток (-$\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$).

10.График функции.

Перейдём к изучению некоторых свойств arctg$x$ и arcctg$x$. Для доказательства тождеств и неравенств, связанных с этими функциями, нам понадобятся их значения в некоторых точках, именно: arctg 0 = 0, arctg1 = $\frac{\pi}{4}$(следует из свойств интеграла $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$) , arctg$x$ (-1) = - $\frac{\pi}{4}$- из нечётности арктангенса. Из равенства arctg$x$ + arcctg$x$ = $\frac{\pi}{2}$ получаем значения в этих же точках функции арккотангенс. Значения этих функций в других точках пока находятся методами приближённого интегрирования. Поэтому мы можем уже сейчас решить, скажем, такое уравнение: arctg2x = $\frac{\pi}{4}$, но не сможем решить уравнение arctg$x$ = $\frac{\pi}{3}$. Кроме того, пока не введены обратные к ним функции, мы не можем записать решения уравнения, например такого: arctg$x$ = 0,3, хотя ясно, что оно существует.

Несложно доказать следующие важные соотношения:

$\lim\limits_{x\to 0}$ (arctg$x$ / x) = 1 и $|$ arctg$x$ $| \le |$ x $|$.

. Первое доказывается так:

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{arctg} x / x) = \lim_{x\to 0} ((\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0) / x) = (\operatorname{arctg} x)'_{x=0} = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1.$$

Отсюда следует, что в окрестности точки 0 x и arctg$x$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями, и можно записать такое приближенное равенство: arctg$x \approx x$.

Для доказательства неравенства рассмотрим при $x \geq 0$ функцию x - arctg$x$. Она стандартным образом исследуется на монотонность, откуда получаем $x \geq \operatorname{arctg} x$. При $x<0$ используется нечётность этой функции.

Теперь же можно показать разложение arctg x в ряд и получить числовой ряд для вычисления π.

Для упражнений возможны такие **типы примеров:**

1. Вычисление производных.
2. Построение графиков с помощью его линейных преобразований и с использованием производной.
3. Отыскание первообразных и вычисление интегралов.
4. Доказательство тождеств и неравенств.
5. Решение уравнений и неравенств.

Упражнения типа 1—3 очевидны. Приведу типичные **упражнения** к пунктам 4 и 5.

1. Доказать, что arctg$x$ + arctg ($1/x$) $= \frac{\pi}{2}$ при $x>0$ ($-\frac{\pi}{2}$ при $x<0$).

Обозначим функцию в левой части как $f(x)$. Найдём её производную. Оказывается, что $f'(x) = 0$. Значит, при $x > 0$ эта функция является постоянной. Для нахождения её вычислим значение $f(1)$:

$f(1) = 2 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, при $x > 0$ arctg$x$ + arctg ($1/x$) $= \frac{\pi}{2}$. Равенство при $x<0$ следует из нечётности arctg$x$.

2. Доказать, что arctg$x$ + arctg y = arctg $\frac{x+y}{1-xy}$ + $\lambda\pi$, где: $\lambda = 0$, если $xy < 1$; $\lambda = 1$, если $xy > 1$ и $x>0$;

$\Lambda = -1$, если $xy > 1$ и $x < 0$.

Зафиксируем некоторое значение y. При этом значении y обозначим функцию в левой части равенства через $f(x)$, а в правой части равенства через $g(x)$. Взяв производные от обеих функций, увидим, что они равны, следовательно, эти функции отличаются на константу: $f(x) = g(x) + C$, Вычислим её для первого случая, когда $xy < 1$. Для этого достаточно увидеть, что $f(0) = g(0) = \operatorname{arctg} y$. Значит, $C=0$, а тогда для всякого значения y выполняется равенство $f(x)=g(x)$, что и требовалось установить. Для определения значения константы C во втором случае (когда $xy > 1$ и $x>0$) такой подход невозможен. Почему? Пусть, к примеру, мы возьмем $x=1$. Тогда $f(1) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y$, $g(1) = \operatorname{arctg} \frac{1+y}{1-y}$.

Теперь выражения в правой части каждого из полученных равенств можно рассматривать как функции от переменной y.

Пусть $f_1(y) = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} y$, $g_1(y) = \operatorname{arctg} \frac{1+y}{1-y}$.

Тем же способом можно показать, что $f_1(y) = g_1(y) + C_1$. Для нахождения C_1, требуется взять какое-либо значение y из рассматриваемого множества, т. е. такое, что $xy>1$. Но так как мы взяли $x = 1$, то значение y надо брать больше, чем 1. Однако нам неизвестно ни одно значение арктангенса для аргументов, больших чем 1. Поэтому придётся идти другим путем.

Из равенства $f(x) = g(x) + C$ следует $C = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x))$. Вычислим пределы каждой из функций:

$$\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} y .$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{1}{x}-y} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{y}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y}\right) = \operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2}.$$

Так как оба предела существуют, то $C = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} y\right) - \left(\operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Аналогично доказывается, что значение константы C в третьем случае (если $xy>1$ и $x<0$) равно $-\pi$.

В силу нечётности арктангенса из формулы для суммы арктангенсов получаем такую

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} + \lambda\pi.$$

После доказательства этих формул сложения пропадают всякие сложности в решении таких примеров, как: «Найти значение выражений $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$, $\operatorname{arctg} 7 - \operatorname{arctg} 5$ и т. д.

Упражнения на свойство выпуклости функции арктангенс можно предложить следующие:

3. а) Доказать, что $\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3 < 2 \operatorname{arctg} 2$.

Доказательство непосредственно вытекает из неравенства $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ для функции, выпуклой вверх, каковой является $\operatorname{arctg} x$ при $x>0$.

б) Доказать, что $\operatorname{arctg} 30 - \operatorname{arctg} 20 < \operatorname{arctg} 10$.

При доказательстве используется известное свойство выпуклой вверх при $x \ge 0$ функции: если x_1, x_2, x_3, x_4 — четыре возрастающих равноотстоящих значения аргумента, то

$f(x_4) - f(x_3) < f(x_2) - f(x_1)$.

В данном случае использование этого свойства дает такое неравенство:

$\operatorname{arctg} 30 - \operatorname{arctg} 20 < \operatorname{arctg} 10 - \operatorname{arctg} 0$, что и приводит к нужному результату.

4. Доказать, что $\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 \le x_2 - x_1$ при $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge x_1$.

Доказательство следует из того, что производная от $\operatorname{arctg} x$ не превосходит 1.

И теперь о решении уравнений и неравенств. Графическая иллюстрация и возрастание функции арктангенс позволяют решать уравнения типа $\operatorname{arctg} 2x = \operatorname{arctg} x$ и соответствующие неравенства.

Но резко ограничивает наши возможности отсутствие функции $\operatorname{tg} x$. Например, не удастся получить результат в таком уравнении: $\operatorname{arctg} 2x = \operatorname{arctg}(1/x)$ и соответствующем неравенстве.

2. Функции tg и ctg.

Определение 3. Функция, обратная $\operatorname{arctg} x$, обозначаемая $\operatorname{Tg} x$, называется главной ветвью тангенса. Функция, полученная π-периодическим продолжением Tg, называется тангенсом и обозначается $\operatorname{tg} x$.

Определение 4. Функция, обратная $\operatorname{arcctg} x$, обозначаемая $\operatorname{Ctg} x$, называется главной ветвью котангенса. Функция, полученная π -периодическим продолжением Ctg$x$ называется котангенсом и обозначается ctg$x$.

Свойства Tg и Ctg легко получаются из свойств arctg и arcctg благодаря теореме об обратной функции и тем связям, которые есть между свойствами прямой и обратной функций. А если ещё нарисовать графики, то свойства Tg и Ctg видны на рисунках. Сами же доказательства могут быть довольно хлопотными. Вот, к примеру, как доказывается нечётность функции Tg. Из симметричности графика функции arctg относительно начала координат и графиков Tg и arctg относительно прямой $y= x$ следует, что произвольная точка графика Tg в результате композиции $S_p \circ Z_o \circ S_p$ (где точка O — начало координат, а ось симметрии p задаётся уравнением $y=x$) переходит в точку на этом же графике. С другой стороны, такая композиция, как известно,— это легко проверяется, если выписать соответствующие движения в координатном виде - является центральной симметрией относительно начала координат. Итак, в результате центральной симметрии относительно начала координат график Tg отображается на себя, а это и означает нечётность Tg.

Из соображений симметрии сразу видны две вертикальные асимптоты графика Tg: $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$. Аналитическое доказательство этого факта получается из рассмотрения равенства x = arctg (Tgx). Пусть теперь $x \to \frac{\pi}{2}$. Тогда arctg (Tgx) $\to \frac{\pi}{2}$, откуда и следует, что Tg$x \to +\infty$

Производная функции Tgx выводится из производной функции arctg x и оказывается равной $1+\mathrm{Tg}^2x$.

Изучение Ctg, предоставляется ученикам для самостоятельной работы.

Никаких затруднений не представляет изучение свойств функции, полученной из данной её π-периодическим продолжением. Досадным исключением является лишь доказательство нечётности для обеих функций, если мы не хотим ограничиться наглядной иллюстрацией этого факта. Для доказательства нечётности tg рассмотрим композицию $\vec{a} \circ Z_o \circ \vec{a}$, где Z_o — центральная симметрия относительно начала координат, $\vec{a}$ - перенос, отображающий некую ветвь tg на главную ветвь. Такая композиция является (проверяется аналитически) центральной симметрией относительно начала координат. Так как такая композиция отображает график tg на себя, то мы получаем его центральную симметричность, т. е. нечётность функции tg.

Для доказательства нечётности функции ctg сначала заметим, что графики arctg и arcctg симметричны относительно прямой $y = \frac{\pi}{4}$. Отсюда следует симметричность графиков Tg и Ctg относительно прямой $x = \frac{\pi}{4}$, а кроме того, симметричность Tg и той ветви ctg, которая находится на промежутке $(-\pi, 0)$, относительно прямой $x = -\frac{\pi}{4}$. Теперь рассматривается композиция $\vec{a} \circ S_{p_2} \circ Z_o \circ S_{p_1} \circ \vec{a}$, где p_1 — прямая $x = \frac{\pi}{4}$, p_2 — прямая $x = -\frac{\pi}{4}$, $\vec{a}$ - перенос, отображающий некоторую ветвь ctg на его главную ветвь. В силу перечисленных симметрий графиков эта композиция отобразит график ctg на себя. Но эта композиция (проверяется аналитически) является центральной симметрией относительно начала координат, а потому ctg нечётен.

Доказательства нечётности выглядят малосимпатично, но на деле, в ходе беседы с учениками, являются просто хорошим упражнением в развитии геометрической зоркости.

После введения tg и ctg увеличивается набор упражнений. Отметим, что из всех значений функций tg и ctg нам известны только нули этих функций и чему они равны в точках $\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$, где $\kappa \in \boldsymbol{Z}$, а потому набор уравнений и неравенств достаточно специфичен. Что же можно предложить для решения?

1. Можно вернуться к тем примерам на arctg и arcctg ,которые не решались из-за того, что школьники не были знакомы с обратными к ним функциями.

2, Заняться построением графиков, получаемых из графиков функций tg и ctg линейными преобразованиями. С некоторой осторожностью можно предлагать построение графиков функций с помощью производной, например y = arctg (tg$x$). Осторожность необходима из-за того, что ещё не введены формулы в достаточном количестве.

3. Можно вычислять и некоторые пределы, например, $\lim\limits_{x\to 0}$ (tg 2x / tg 3x).

Уже известно, что $\lim\limits_{x\to 0}$ (arctg$x$ / x) = 1. Простой переменой обозначений получаем, что $\lim\limits_{x\to 0}$ (x / tg$x$) =1. Значит, в некоторой окрестности нуля x и tg$x$ эквивалентные бесконечно малые и можно написать: tg$x \approx x$.

4. Неравенство $|x| \le |\mathrm{tg}x|$ можно получить из соответствующего неравенства для arctg также переобозначением переменной, но можно провести самостоятельное исследование на монотонность функции tg$x$-x на промежутке $[0, \frac{\pi}{2})$.

5. Можно перейти к простейшим уравнениям и неравенствам для tg и ctg. Например, решим уравнение tg$x$ = 2. Рассмотрим промежуток $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. На этом промежутке tg$x$ = 2 $\Leftrightarrow$

arctg (tg$x$)= arctg 2 $\Leftrightarrow$ x = arctg 2.

Общее решение записывается на основе свойства периодичности функции tg.

Решим теперь неравенство ctg$x$ > 3.

Рассмотрим промежуток (0, π). На этом промежутке ctg$x$ >3 $\Leftrightarrow$ arcctg (ctg$x$) < arcctg 3 $\Leftrightarrow$ x < arcctg 3.

Общее решение записывается на основе свойства периодичности функции ctg. Точно так же решаются уравнения и неравенства типа tg$x$ = a, tg$x$>a, tg$x$<a, ctg$x$ = a и т. д.

Докажем теперь важную формулу tg$x$ · ctg$x$=1. Сначала проверим, что при t > 0 выполняется равенство arcctg$t$ = arctg (1/t). Для этого рассмотрим разность этих функций, возьмем от неё производную — она равна нулю. Значит, эта функция является константой на взятом промежутке. Но при t = 1 она равна нулю, поэтому для всякого t >0 равенство верно. Пусть теперь $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Запишем его так: x = arcctg$t$ = arctg (1/t). Тогда tg$x$ · ctg$x$ = tg (arctg (1/t)) · ctg (arcctg$t$) = (1/t) · t = 1.

Для остальных значений x срабатывает нечётность и периодичность. И наконец, докажем такую формулу: ctg$x$ = tg $(\frac{\pi}{2} - x)$

Уже отмечалось, что Tg и Ctg симметричны относительно прямой $x = \frac{\pi}{4}$.Но симметрия графиков этих функций относительно прямой $x=\frac{\pi}{4}$ как раз и означает выполнение для них требуемого равенства. Для симметричности графиков функций tg и ctg относительно $x=\frac{\pi}{4}$ потребуется использовать их периодичность.

На этом можно закончить изучение tg и ctg. Но можно пойти дальше и вывести теорему сложения для тангенса. Делается это так. Запишем теорему сложения для arctg:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \lambda\pi.$$

Возьмём тангенсы от обеих частей этого равенства, получим $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy}$.

Если обозначить arctg$x$ через α, arctg$y$ через β, то приходим к нужной формуле:

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) / (1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)$.

Для других значений α и β используются свойства tg.

Используя нечётность функции тангенс, получаем далее формулу для тангенса разности.

3. Функции arcsin и arccos.

Схема изучения этих функций такая же, как и функций arctg и arcctg, поэтому я остановлюсь в основном на отличиях.

Определение 5. $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Определение 6. $\arccos x := \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Эти определения иллюстрируются графиком (рис. 18).

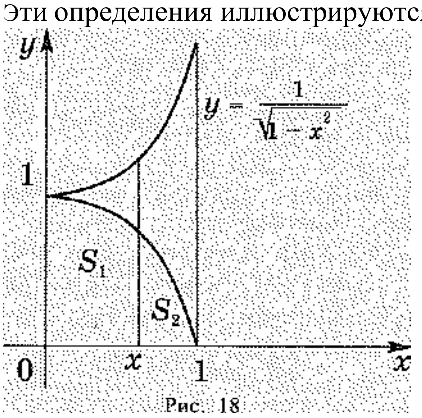


Рис.18

График подынтегральной функции очевидным образом получается из графика $y = \sqrt{1-x^2}$, поэтому нарисуем его вместе с полуокружностью $y = \sqrt{1-x^2}$. При $x>0$ имеем $S_1=\arcsin x$, $S_2 = \arccos x$. Из этих определений и равенства $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ получаем соотношение для определяемых функций: arcsin$x$ + arccos$x$= $\frac{\pi}{2}$, откуда ясно, что принципиально только изучение первой из этих функций. К нему мы и переходим.

1. Область определения функции.

Из существования исходного интеграла следует, что областью определения функции является промежуток [-1; 1].

2. Непрерывность.

Непрерывность внутри области определения следует из непрерывности площади криволинейной трапеции. Непрерывность на концах промежутка следует из существования исходного интеграла.

3. Исследование на чётность или нечётность.

Нечётность arcsin очевидна и получается так же, как для arctg.

4. Монотонность.

При $0 < x < 1$ arcsin x есть площадь, которая возрастает с увеличением x. Возрастание функции при $-1 < x < 0$ следует из нечётности. В силу непрерывности возрастание происходит на всей области определения, включая концы. Тот же результат получается из положительности производной.

Остальные свойства арксинуса (нули, знаки, выпуклость) изучаются так же, как и свойства арктангенса. Из непрерывности и возрастания функции на [—1, 1] следует, что множеством её значений является промежуток $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

При подробном изучении свойств arcsin и arccos отметим, что значения их нам известны только при $x = 0$, $x=1$, $x=-1$.

Для вычисления пределов необходимо знать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ (доказательство такое же, как для arctg x).

Типы упражнений и методика их решений аналогичны тем, которые были указаны для arctg. Примеры, в которых участвует arccos x, не имеют самостоятельного значения, так как его можно заменить на $\frac{\pi}{2}$ - arcsin$x$.

В работе с производными от этих функций есть тонкость. Поясним её на примере. Пусть нам требуется доказать, что arccos$x$ = arcsin $\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 1$,

Сначала убеждаемся в том, что равны производные от этих функций. Затем из равенства дуг окружности при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следует, что равны значения этих функций в данной точке. Вроде бы доказательство можно считать оконченным, однако при $x = 1$ и при $x = 0$ производные от этих функций не существуют. В этих точках придётся опять воспользоваться непрерывностью данных функций.

4. Изучение sin и cos.

Определение 7. Главной ветвью синуса называется функция, обратная функции arcsin. Отразим теперь симметрично относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ главную ветвь; 2π.-периодическое продолжение полученной функции на всю числовую ось называется синусом.

Определение 8. Главной ветвью косинуса называется функция, обратная функции arccos. Отразим теперь симметрично относительно оси y главную ветвь; 2π-периодическое продолжение полученной функции на всю числовую ось называется косинусом.

Можно определить синус и косинус иначе, используя формулы через тангенс половинного угла, именно:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Свойства синуса и косинуса сразу видны из определений, а если ещё нарисовать их графики, то говорить по сути не о чем — настолько всё ясно.

Доказательство симметричности графиков этих функций (иначе говоря, чётности или нечётности функций) получается из свойств композиции разных движений. Так, чётность косинуса выводится из рассмотрения такого движения: $\vec{a} \circ S_p \circ \vec{a}$, где p — ось y , $\vec{a}$ - это перенос ($2k\pi$, 0). Такая композиция, являясь симметрией относительно оси ординат, отображает график косинуса на себя. Отсюда - его чётность. Аналогичную работу проводят сами ученики, отыскивая композицию движений, отображающую график синуса на себя и являющуюся центральной симметрией относительно начала координат. Отсюда - нечётность синуса.

Производные от синуса и косинуса находятся как производные обратных функций — сначала для главных ветвей. В точках «стыковки» графиков, где происходят отражение от прямой и продолжение до периодичности, проще всего использовать соображения симметрии и геометрический смысл производной.

Важные соотношения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ и $|\sin x| \le |x|$ получаются простым переобозначением переменных в соответствующих соотношениях для arcsin x.

Равенство $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ получается по той же схеме, как аналогичные соотношения tg$x$ и ctg$x$. Из этого равенства, периодичности синуса и косинуса, их симметричности получаются все формулы приведения.

Основное соотношение между синусом и косинусом, а именно $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, можно получить так. Сначала проверим, что при $t \in (0,\ 1)$ верно равенство $\arccos t = \arcsin\sqrt{1-t^2}$ (Действуем привычным методом: составляем разность этих функций, берем от неё производную и т. д.) Пусть теперь $x \in (0,\ \frac{\pi}{2})$. Запишем x в таком виде: $x = \arccos t = \arcsin\sqrt{1-t^2}$. Тогда

$\sin^2(\arcsin\sqrt{1-t^2}) + \cos^2(\arccos t) = (1 - t^2) + t^2 = 1.$

Для прочих значений x используются формулы приведения и непосредственная проверка. После получения основного соотношения между синусом и косинусом в окончательном виде записываются их производные: $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

Покажем теперь, как sin$x$ и cos$x$ интерпретируются на единичной окружности (рис. 19).

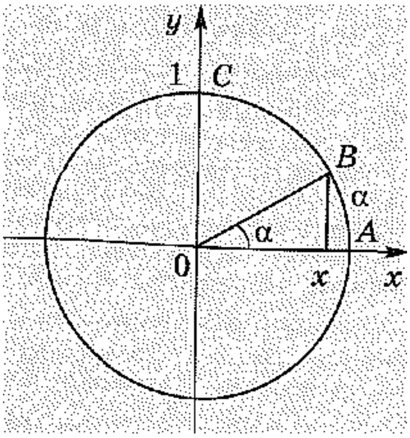


Рис. 19.

Пусть $x \in (0, 1)$. Тогда длина дуги *AB* равна arccos$x$, а длина дуги *BC* равна arcsin x. На этот же рисунок можно посмотреть иначе. Если длину дуги *AB* обозначить через α, где α $\in$ (0, π), то координаты точки *B* таковы:(cosα, $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$) т.е. (cosα, sin α). Значит, косинус и синус некоторого числа α $\in$ (0, π) есть абсцисса и ордината той точки на единичной окружности, которой соответствует дуга длиной α. Для других значений α используются формулы приведения и непосредственная проверка.

Последнюю важную формулу tg$x$ = sin$x$ / cos$x$ можно получить разными способами. Один из них, самый интересный для учеников, заключается в том, что функция sin$x$ / cos$x$ удовлетворяет несложному дифференциальному уравнению $y' = 1 + y^2$ с начальным условием $y(0) = 0$. Далее можно либо решать это уравнение, либо сказать ученикам, что и tg$x$ удовлетворяет этому же уравнению с тем же начальным условием. Но известно (так называемая задача Коши), что решением такого уравнения с данным начальным условием может быть только одна функция. Значит, tg$x$ = sin$x$ / cos$x$.

Теорему сложения для синуса можно доказать так же, как для tg.

На этом заканчивается наш разговор о построении теории тригонометрических функций с помощью интеграла. Такой способ выглядит искусственно, но это с позиций традиционного школьного курса. Если же рассматривать его как некое введение в математический анализ, то можно ещё подумать. Со своих чисто учительских позиций скажу, что никогда я не видел столь большой самостоятельности учеников в изучении теории тригонометрических функций, как при таком способе. Они выводили сами почти всё, как только перед ними появлялись исходные определения.

Немного о традиционном преподавании тригонометрии. Я нахожу преувеличенной ту роль, которую в нём играет тригонометрический круг. Он хорошо работает в начале курса. Но после того, как становятся известными графики тригонометрических функций, обращение к тригонометрическому кругу выглядит анахронизмом. Особенно странно использовать тригонометрический круг при решении уравнений и неравенств. Дело в том, что на круге можно иллюстрировать промежутки длиной не более, чем 2π. На графике же этих проблем нет. Я уже не говорю о том, что работа с графиками повышает общую математическую культуру, и не только математическую.

А теперь ещё несколько слов о едином курсе. В целом он доступен ученикам, интересен для них. Работать в этом направлении было увлекательно, при его подготовке мне пришлось перевернуть гору книг, я узнал много нового для себя, и мне ничуть не жаль затраченного на это времени.

11.9. О ДЛИНЕ ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Методическое мастерство проявляется, как я полагаю, не столько в решении тех или иных задач образования, какими бы объёмными они ни казались, сколько в том, как эти задачи были решены. Особенно его видно при решении трудных методических задач. При этом надо не грешить перед математикой, но вместе с тем быть психологически убедительным для ученика. Давно известно: логика изложения готового результата, готовой теории не совпадает с логикой, если так можно выразиться, его получения, создания, более понятной ученику .

Почему утверждение вообще надо доказывать, когда оно очевидно? Почему доказательство именно такое? Почему последовательность изучения именно такая? Эти и другие похожие вопросы надо задавать себе, если хочешь быть в глазах детей не фельдфебелем от педагогики, а ментором или даже соучастником. Мне довелось выслушивать такие вопросы от детей, особенно часто первый из них. Нормальный вопрос для ребёнка с практическим складом ума. Ну и как же его убедить?

Выбрать некий уровень строгости изложения, последовательно работать на этом уровне, может быть, слегка повышая его к концу обучения, найти убедительный компромисс с наглядностью — всё это очень непросто. И требует, рискну сказать, не только методического мастерства, но и методического искусства. Можно привести массу примеров такого искусства, но также и отсутствия такового.

Одна из достойных задач методики — изучение длины кривой и площади поверхности. Недаром же ей посвящено так много работ. Есть даже классические, например, книга А. Лебега «Об измерении величин».

По-моему, я попробовал на практике всё, что только описано в литературе. Но и до сих пор не могу сказать, что знаю наилучшее её решение.

Что создаёт трудности? Хочется найти общий подход. Ведь получение общих методов— одна из основных тенденций науки, а потому давать для разных поверхностей разные способы вычисления их площадей в каком-то смысле и значит грешить перед математикой. Внешне привлекательно выглядит идея развёртки при выводе формул для площади боковой поверхности цилиндра и конуса. Но, как известно, для сферы развёртка невозможна (и потому все карты Земли неточны). При решении задачи о вычислении длины окружности известен общий приём — вписывать в окружность правильные многоугольники, а затем переходить к пределу. Однако аналогичную конструкцию нельзя создать для сферы. Кроме того, постоянно возникают вопросы такого типа: а почему число сторон правильного многоугольника непременно удваивается? Имеет ли значение число сторон исходного вписанного многоугольника? Обязательно ли вписывать именно правильные многоугольники? (Аналогичные вопросы можно задать, если по той же идее вычислять площади боковых поверхностей цилиндра или конуса.) И вообще – идея вписывания подозрительна – достаточно вспомнить знаменитый «сапог

Шварца». И наши ответы на эти вопросы скорее повествовательного характера. Мы просим нам поверить, а не убеждаем.

Занятны попытки связать измерение площади с каким-либо реальным процессом, например с покраской. Я приводил детям такой пример. Берём два равных прямоугольника, а затем из одного прямоугольника делаем лист Мёбиуса. Одинаковы ли площади оставшегося прямоугольника и листа Мёбиуса? Начнём теперь красить и прямоугольник с одной стороны, и лист Мёбиуса. Затратим ли мы одинаковое количество краски? В классе возникают непростые дискуссии. Мне довелось выслушивать по этому вопросу разные ответы даже от профессиональных геометров.

Из многочисленных собственных попыток рассказать теорию измерения длин и площадей опишу две. Первая относится к изложению этого вопроса в математической школе, вторая — в массовой.

Несколько раз я рассказывал в математической школе этот раздел на основе идеи Г. Минковского.

Сначала я покажу, как она осуществляется при вычислении длины кривой. Пусть U —некоторая плоская линия. Рассмотрим множество всех точек, удалённых от точек U не более чем на данное расстояние $r>0$. Получившуюся фигуру обозначим Φ и назовем её «обволакивающей» фигурой. Фигуру Φ можно рассматривать как объединение всех кругов радиуса r с центрами на данной линии. Площадь Φ обозначим $S(\Phi)$. Составим отношение $S(\Phi)\,/\,2r$. и найдём его предел при $r \to 0$. Если он существует, то линию U будем называть спрямляемой, а длиной $L(U)$ назовем сам предел:

$$L = \lim_{r\to 0} \frac{S(\Phi)}{2r}.$$

Это определение привлекательно уже с самого начала своей наглядностью. Как оно используется в простейшем случае, можно показать на примере отрезка. Пусть нам дан отрезок AB длиной a (рис. 20, *а*). Покажем, что по нашему определению длины линии тоже получится a. Фигура Φ состоит из прямоугольника $CKET$ и двух полукругов с центрами в точках A , B и радиусами r`. Очевидно,

$$S(\Phi) = a\cdot 2r + \pi r^2, S(\Phi)\,/\,2r = a + \pi(\,r/2\,),\ \lim_{r\to 0}\frac{S(\Phi)}{2r} = \lim_{r\to 0}(a + \pi(\,r/2\,)) = a.$$

а)

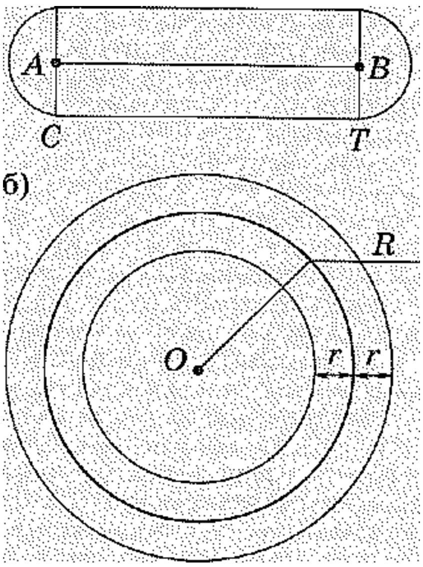


Рис. 20 а, б.

Вычислим теперь этим же способом длину окружности. Пусть дана окружность с центром O и радиусом R. Фигура Φ является кольцом с этим же центром, больший радиус которого равен $R + r$, а меньший радиус R-r (рис. 20, *б*). Очевидно,

$$S(\Phi) = \pi\,((R + r)^2 - (R - r)^2) = 4\,\pi\, R\, r\ ,\ S(\Phi)\,/\,2\,r = 2\pi\, R,\ \lim_{r\to 0}\,(\,S(\Phi)\,/\,2\,r\,) = 2\pi\, R\ .$$

Таким же способом можно найти длину дуги окружности.

Аналогично определяется площадь поверхности в пространстве. Только вместо кривой U появляется поверхность U, вместо длины кривой $L(U)$ появляется площадь поверхности $S(U)$, а вместо площади $S(\Phi)$ появляется объем $V(\Phi)$.

Итак, $S(U) = \lim\limits_{r\to 0}\,(\,V(\Phi)\,/\,2\,r\,)$.

Для начала стоит показать, как с помощью этого определения можно найти площадь поверхности в простейших случаях, например для прямоугольника со сторонами a и b. Фигура Φ состоит из прямоугольного параллелепипеда размерами a, b и $2r$, двух полуцилиндров радиусом основания r и высотой a, двух полуцилиндров радиусом основания r и высотой b и четырёх четвертьшаров радиуса r. (Представить себе фигуру Φ куда легче, чем её нарисовать.) Тогда

$$V(\Phi) = ab\cdot 2r + 2\,(\,0{,}5\pi r^2 a) + 2\,(0{,}5\pi r^2 b\,) + 4\,(\,\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3})\,\pi r^3 = ab\cdot 2r + \pi r^2 a + \pi r^2\, b + \frac{4}{3}\,\pi r^3\ ,$$

$$V(\Phi)\,/\,2r = ab + \frac{\pi a}{2}\cdot r + \frac{\pi b}{2}\cdot r + \frac{2}{3}\,\pi r^2\ ,\ \lim_{r\to 0}\,(\,V(\Phi)\,/\,2\,r\,) = ab.$$

Другой пример - вычисление площади сферы совершенно аналогично вычислению длины окружности и выполняется самими учениками.

Из этих примеров ясно, что технические трудности при вычислении пределов возникают тогда, когда у поверхности есть края. Для уменьшения этих трудностей приходится искать наиболее удачные способы вычисления объёма Φ в тех случаях, когда сразу найти его не удается. Тогда подбираются фигуры Φ_1 и Φ_2, такие, что $\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2$. Если существуют пределы

$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{V(\Phi_1)}{2r}$ и $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{V(\Phi_2)}{2r}$, если они равны A, то существует и нужный нам предел $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{V(\Phi)}{2r}$, который тоже равен A.

Проще всего продемонстрировать этот способ для вычисления площади боковой поверхности цилиндра.

Пусть боковая поверхность цилиндра образована вращением отрезка AB вокруг оси XY, параллельной этому отрезку (рис. 21).

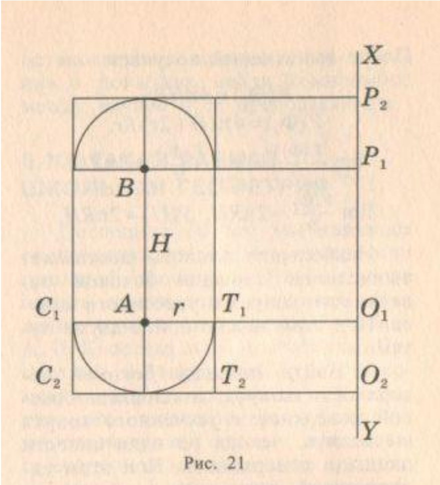


Рис.21

Обозначим $AB= H$, $AO_1 = R$ — расстояние до оси вращения. Фигура Φ_1 ,содержащаяся в Φ, представляет собой разность двух цилиндров: цилиндра с радиусом $O_1C_1=R + r$ и высотой $O_1P_1 = H$ и цилиндра с радиусом $O_1T_1 = R\text{-}r$ и той же высотой. Фигура Φ_2, содержащая Φ, представляет собой разность двух цилиндров: цилиндра с радиусом $O_2C_2 = R + r$ и высотой $O_2P_2 = H + 2r$ и цилиндра с радиусом $O_2T_2 = R - r$ и той же высотой.

После вычислений получаем :$V(\Phi_1)=4\pi HRr$, $V(\Phi_2) = 4\pi(H+2r)Rr$,

$$\lim_{r\to 0}\frac{V(\Phi_1)}{2r} = 2\pi RH,\ \lim_{r\to 0}\frac{V(\Phi_2)}{2r} = 2\pi RH,\ \lim_{r\to 0}\frac{V(\Phi)}{2r} = 2\pi RH,\ S(U) = 2\pi RH.$$

Наибольшие хлопоты доставляет вычисление площади боковой поверхности конуса и усечённого конуса. При этом можно пойти двумя путями:

1. Найти площадь боковой поверхности конуса, а площадь боковой поверхности усечённого конуса вычислить, исходя из аддитивности площади поверхности. При этом аддитивность надо как-то объяснить, ибо определение по Г.Минковскому конструктивное, а значит, никакие свойства площади поверхности заведомо не являются известными.
2. Найти площадь боковой поверхности усечённого конуса, из которой как предельный случай вывести формулу для площади боковой поверхности конуса (а также и боковой поверхности цилиндра).

Так же можно получить формулу для вычисления площади сферического сегмента.

Перейду теперь к описанию того, как можно вычислять длину кривой и площадь поверхности в массовой школе. При этом, как оказывается, можно обойтись даже без явного использования понятия предела, только с помощью наглядных представлений.

Начну с длины окружности. Как и в предыдущем изложении, считаем, что площадь круга нам известна. Для вычисления длины окружности радиуса R опишем вокруг неё произвольный n-угольник (будет несколько нагляднее, если взять правильный n - угольник, но это необязательно). Запишем для него формулу $S_n = 0{,}5\ P_n\ R$, где S_n – площадь, а P_n – периметр. Отсюда получаем, что

$S_n : P_n = 0{,}5R$.

С другой стороны, если бесконечно увеличивать n и брать точки касания сторон многоугольника всё ближе, например вставляя новую между каждыми двумя соседними «старыми» точками, то отношение $S_n : P_n$ сколько угодно мало отличается от величины $S{:}L$, где S — площадь круга, а L —

длина окружности. Тогда получается, что два числа $\frac{S}{L}$ и $0{,}5R$ отличаются сколь угодно мало. Но это может быть только в том случае, когда эти числа равны. Итак, $\frac{S}{L} = 0{,}5R$, откуда и получаем, что $L = \frac{2S}{R}$, т.е. $L = 2\pi R$.

Как ясно, во фразу «сколь угодно мало отличается» умещается чуть ли не вся теория пределов, но важно, что внимание учеников в этом месте не останавливается — настолько всё наглядно очевидно. Этот же феномен я наблюдал у старшеклассников при выводе формул для площадей поверхностей, причём не только в массовой школе, но и в специализированной.

Покажу, как это же рассуждение используется в стереометрии.

Для получения формулы площади сферы оно абсолютно такое же, надо только в соответствующих местах повысить размерности, использовать формулу $V_n = \frac{1}{3} S_n R$ для объёма V_n описанного около сферы радиуса R n-гранника с площадью поверхности S_n. Близость точек на сфере, через которые проводятся касательные плоскости, можно обеспечить тем, что новые точки касания выбираются внутри каждого криволинейного треугольника на сфере.

А вот как выглядит вывод формулы для боковой поверхности цилиндра. Опишем около цилиндра радиуса R и высотой H прямую n-угольную призму. Пусть V_n — её объём, S_n — площадь основания, H — высота. Тогда $V_п = S_пH$. Так как $S_п = 0{,}5\,P_nR$, где P_n - периметр основания этой призмы, то $V_п = 0{,}5\,P_nRH$. Выражение P_nH является площадью боковой поверхности призмы, которую мы обозначим S'_n. Итак, $V_п = 0{,}5\,S'_n R$, откуда $V_п : S'_n = 0{,}5R$. С другой стороны, описывая призму с всё возрастающим n, причём выбирая точки касания всё ближе (как в соответствующем выводе формулы длины окружности), мы видим, что величина $V_п : S'_n$ всё меньше отличается от величины $V : S$, где V— объём цилиндра, а S — площадь его боковой поверхности, и разность между ними можно сделать сколь угодно малой. Но тогда два числа $V : S$ и $0{,}5\,R$ отличаются сколь угодно мало. А это может быть только в случае их равенства.

Итак, $V : S = 0{,}5\,R$, откуда и следует, что $S = 2V/R$.т.е. $S = 2\pi RH$.

Доказательства для конуса и усечённого конуса совершенно аналогичны. Эти выводы ясны ученикам и воспроизводятся ими.

Конечно, к таким доказательствам можно предъявить претензии по строгости изложения. Я ведь говорю не о науке, а о том, на каком уровне строгости остановиться в преподавании её основ, о попытках найти компромисс между наукой и её преподаванием.

Кстати, по поводу чрезмерного увлечения строгостью говорил ещё Л. Стерн: «Самая сущность строгости есть задняя мысль и, следовательно, обман; — это старая уловка, при помощи которой люди стремятся создать впечатление, будто у них больше ума и знания, чем есть на самом деле».

11.10. ТАКАЯ РАЗНАЯ ШКОЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В последние десятилетия мы являемся свидетелями кризиса в преподавании школьной геометрии (и школьной математики в целом, но сейчас – не об этом). Чтобы лучше понять, в чём дело, совершим мысленно прогулку в «золотые времена» А. Киселева и Н. Рыбкина. Посмотрим, например, на тогдашний курс стереометрии. Изучались прямые и плоскости, их взаимное расположение, многогранники, тела вращения, геометрические величины: длины, площади, объёмы, углы. Аксиоматика курса была выдержана в духе Евклида — Гильберта — Шура. При доказательствах теорем широко использовалась наглядность, запросто, например, в начале курса один двугранный угол вкладывали в другой. Задачи были в основном вычислительного характера, на выпускном экзамене решалась одна-единственная задача, в которой наряду с обоснованием рассуждений требовалось произвести немалые аналитические выкладки, да ещё вычисления с применением логарифмических таблиц. Кроме этого, в экзаменационной работе была часть, связанная с тригонометрией. Общему спокойствию весьма способствовал ясный и приемлемый характер выпускного экзамена, фактически учителя готовили к нему два заключительных года.

На «отдельные недостатки» программы, учебника, задачника и курса в целом мало кто обращал внимание. Аксиоматика курса была явно неполной, доказательства некоторых утверждений повисали в воздухе, иные рассуждения были совершенно архаичны, например, вычисления объёма на основании искусственных конструкций вместо интегрирования (притом, что само определение объёма было чистой беллетристикой), задач не хватало и приходилось брать задачи из книги П. Стратилатова. И вообще всё это Евклид, Евклид, Евклид... А где же современность? Где движения, векторы, координаты, интегралы? Где новые взгляды? Где теория множеств? Постепенно критика программы нарастала, программа начала меняться, появились новые учебники и задачники. И в 1968 году произошла реформа математического образования , после которой дела школьной геометрии пошли всё хуже и хуже. Все эти годы подвергалась критике уже и новая программа. В учебники, написанные в соответствии с ней, почти ежегодно вносились исправления. Постоянно в директивном порядке изменялись требования к учителям: что надо изучать, а что не надо. Один из примеров — элементы стереометрии в конце 9 класса вдруг стали запретной для преподавания темой. Неудачи эксперимента привели к отмене выпускного экзамена по геометрии. Отмена устного экзамена в 11 классе не такая безобидная вещь, так как в соответствии с этим на уроках стало меньше времени тратиться на постановку математической речи ученика. Дети стали меньше говорить, а потому и хуже говорить. Сократилось число проверочных работ по геометрии, тогда как по алгебре они традиционно были ежегодными. Знания учеников резко ухудшились, В начале 10 класса многие не имели ясного представления о доказательстве. В программе вступительных экзаменов в вузы из всего курса стереометрии осталось считанное число вопросов.

Сему происшедшему есть и объективные причины, причем разной природы. Я бы выделил три группы.

Первая из них — математическая, идущая от самой науки. Как ни странно, нет полной ясности в понимании самого предмета «Элементарная геометрия», который, по всей вероятности, и преподаётся в школе. Ответ на этот вопрос помог бы прояснить и содержание школьного курса, и методы его преподавания. (См. статью «Элементарная геометрия» в математическом энциклопедическом словаре, написанную А. Александровым.)

Мне неясно далее, означает ли единство математики, которое считается самоочевидным для профессионалов, что геометрия должна быть растворена в общем курсе школьной математики? Наконец, насколько правомерно использование в геометрии теории множеств? Если основы школьной геометрии таковы, что они же позволят применять аксиому выбора или поставить «проблему континуума», то насколько так обоснованная геометрия может быть названа элементарной?

Вторая группа причин — педагогическая. По всем *важнейшим вопросам преподавания геометрии* имеется много разных точек зрения, и все кажутся убедительными — так какую выбрать? Вот примерный перечень этих вопросов:

1. Для чего нужна геометрия в среднем образовании? Есть разные ответы: для развития логического мышления; для развития пространственного мышления; как элемент познания реального мира; для того, чтобы понять, как представление о реальном пространстве преобразуется в некоторую логическую структуру; чтобы иметь запас наглядных образов для работы собственной мысли.

2. Какую геометрию изучать: традиционную, синтетическую по содержанию, или аналитическую геометрию в комбинации с линейной алгеброй? Издал ведь Ж. Дьедонне книгу по геометрии, в которой нет ни одного рисунка! В каком-то смысле это уже было. Вот шутливое сочинение по этому поводу конца XIX века: «Пространство там вовсю муштруют, в координаты всё шнуруют; нужна немалая удача, чтоб с чертежом была задача, и день за днём твердят вам так: необходимо уравненье, чтобы найти то построенье, которое совсем пустяк. И пусть естественней в пространстве всё представлять, что видим мы, как раньше лучшие умы; —с весьма унылым постоянством заставят при любой задаче вас действовать совсем иначе: вам уравнение укажут и всё увидеть в нём обяжут» (из книги В. Литцмана).

3. Если остановиться на традиционном содержании, то что в нём выделить? Реально даются такие ответы: фигуры и их свойства; преобразования; структуры, в первую очередь структуру векторного пространства; внутри- и межпредметные связи. Более того, появилась мысль, что «царским путём» в геометрию является именно изучение структуры векторного пространства.

4. Какова роль дедукции в обучении? Должна ли она быть глобальной, когда доказывается буквально всё и тем самым школьный курс является некоей копией курса оснований геометрии; или

она должна быть локальной, когда в одном разделе доказывается абсолютно всё, а в другом возможны утверждения без доказательств; или она является локальной для детей 11—15 лет, а для старших является глобальной; или она вообще не нужна как таковая?

Замечу, что учебники с невыдержанным уровнем дедукции очень тяжелы в работе. Так, одной из труднейших для меня учебных книг был учебник по геометрии, написанный для 7 класса под редакцией А. Колмогорова. В иных его местах содержательные утверждения шли подряд, и очень трудно было разобраться, какие из них можно доказать, оставаясь в рамках принятой аксиоматики, а какие нельзя.

5. Как понимается «строгость» в курсе геометрии? Или она должна быть предельно возможной; или всё должно быть доказано на некотором изначально обусловленном уровне строгости, без доказательства самоочевидных фактов; или можно всё-таки пропускать доказательства, хотя и акцентируя на этом внимание? (См. статью А. Александрова:Математика в школе.—1985.— № 5.)

6. Какую выбрать аксиоматику: Д. Гильберта, метрическую, векторную, ту, в основе которой находятся свойства движений, какую-то иную или вообще никакую? И где её вводить: в начале курса, в середине, в конце? Может ли она быть избыточной?

7. Как геометрию изучать: как самостоятельную дисциплину, или как таковую только в старших классах, а до того в едином курсе, или целиком в едином курсе?

8. Как относиться к теории множеств: полностью основываться на ней или частично либо вообще не использовать? (См. статью А. Александрова: Математика в школе.— 1984.— № 1.)

9. В какой последовательности рассказывать: сначала аффинную часть, а затем метрическую или сразу же изучать метрическую геометрию?

10. Что делать со стереометрией? Давать систематический отдельный курс, или сообщать её факты параллельно с курсом планиметрии, или она вообще не нужна?

11. Какие методы должны быть основными: аппарат треугольников, или векторный, или координатный, или преобразований?

Частично эти вопросы перекрываются.

Я хочу подчеркнуть, что этот список не умозрителен. В разных странах и в разное время практически под каждую точку зрения были написаны программы и учебники. И ещё хотел бы заметить, что на преподавание геометрии очень сильно влияют традиции. Один пример: сколько раз мы ругали своих учеников за то, что они не видят на рисунке угла между прямой и плоскостью! А вот во Франции, насколько я понял, школьники вообще не знакомятся с этим понятием в курсе геометрии! В США курс геометрии рассчитан всего на один год — как это они ухитрились?

И третья группа причин — практическая. Из них я бы назвал только две: отсутствие постоянного взаимодействия математиков, методистов и учителей и предельную централизацию при решении вопросов образования.

Из всего списка перечисленных здесь вопросов меня особо занимал один: совместное изучение планиметрии и стереометрии. Учителя старших классов хорошо знают, какие трудности встают перед учениками в начале курса стереометрии — практически никто из детей «не видит в пространстве». Ничего удивительного тут нет, ибо способность к пространственному мышлению как-то развивается, если этим заниматься, а раз никто не занимается, то и результат очевиден. Есть какая-то изначальная искусственность в занятиях геометрией: ребёнка со всех сторон окружают пространственные объекты, и на уроках труда, и на уроках черчения он с ними работает, а изучается нечто совсем другое — плоскость и плоские фигуры. Может быть, поэтому ещё в начале прошлого века Ф. Клейну было очевидно, что изучение плоских и неплоских фигур должно идти совместно. Но этот призыв не был услышан в России (и кажется, только в России, если говорить о европейских странах). Работая в 6 классе (до начала систематического курса), я попытался с детьми «выйти в пространство» — предлагал им задачи на проекционном чертеже. И что же? Они прекрасно с этим справились. Вот контрольная работа, в которой предлагалось нарисовать общий вид фигуры (рис. 22) и которую они сделали даже лучше, чем традиционную контрольную работу. «На сладкое» я предложил на поверхности куба нарисовать такую ломаную, которая на видах спереди, сверху и слева выглядит как цифра 5 –

нарисовали! Одному из учеников эта фигура приснилась ночью! Такие задачи можно с успехом предлагать и третьеклассникам (были такие наблюдения).

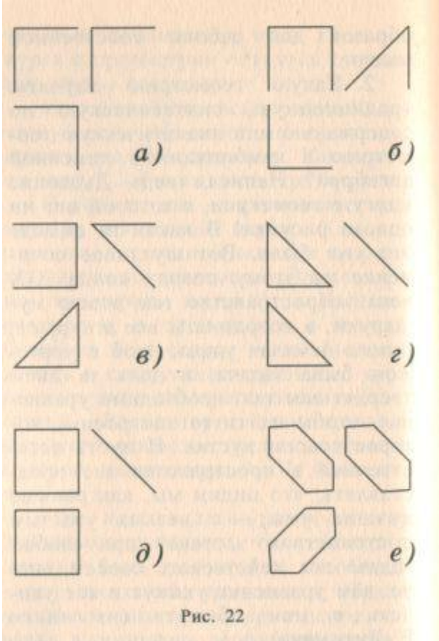


Рис.22

Нельзя сказать, что попыток познакомить школьников со стереометрией в процессе изучения планиметрии не было. Но как это иногда делалось у нас? Чисто механически — стереометрический материал, в основном фактический, предлагался для знакомства в конце 9 класса. По-моему, это в принципе неверное решение, ибо основная проблема обучения стереометрии состоит не в том, чтобы передать школьникам некую сумму знаний(главное – формулы!) , а в том, чтобы развить у них пространственное мышление. И понятно, что это развитие не может быть локальной акцией, но медленным и последовательным процессом. Теперь можно рассказать о том, как я попытался решить эту методическую задачу.

Надо было понять, что делать с теорией и какие предлагать задачи. Сначала о теории. Ход мыслей был таков. Перед началом систематического курса планиметрии дети в 5—6 классах накапливают большой фактический материал о плоских фигурах. В своё время я с такими детьми много занимался всякого рода геометрическими построениями, причём разными инструментами, а кроме того, практиковал на уроках и в домашнем задании решение задач на составление разнообразных фигур из некоторых простейших. Есть такая замечательная головоломка под названием «танграм». Дети с удовольствием ею занимаются и между тем развивают свои пространственные представления. И только после такой совершенно необходимой предварительной пропедевтики планиметрии и начинается теоретический курс. Почему бы эту схему не повторить для стереометрии?

Так и было сделано. Я уже говорил, что в 6 классе мы решали весь год задачи на проекционном чертеже, работая только с кубом и его частями. В систематическом курсе планиметрии очень много занимались моделированием — из развёрток делали многогранники. Основной материал для этой работы брался из книги М. Венninджера. Учились рисовать разного вида многогранники, затем шар, цилиндр, конус. Никакой аксиоматики, никаких определений для выучивания и никаких теорем. Одно исключение — перпендикуляр к плоскости, ему было дано определение как кратчайшего отрезка от точки до плоскости. Исходя из этого определения доказывалось, что он перпендикулярен любой прямой плоскости, проходящей через основание перпендикуляра. Разумеется, никаких доказательств существования. Мне не понадобилась и плоскость как таковая, во всей её бесконечности. Пожалуй, именно в таком подходе к стереометрическим сведениям я вижу основную идею решения этой задачи. Мы знакомим детей с теми объектами стереометрии, в существовании которых они не сомневаются на основании своего практического опыта. Затем решаются задачи с этими объектами.

Ознакомление с пространственными фигурами шло постепенно, при этом я старался поддерживать аналогии между двумерными и трёхмерными фигурами. Изучаю треугольник — рассказываю о тетраэдре, изучаю равносторонний треугольник — рассказываю о правильном тетраэдре и т. д. Я покажу, как это было сделано на уроках об окружности и сфере .

После того как на доске появилось определение окружности в таком схематическом виде:
окр $(O, R) = \{X{:}OX{=}R\}$ $(R > 0)$, сразу же появляется аналогичное определение сферы:
сф $(O, R) = \{X{:}OX{=}R\}$$(R > 0)$, причём дают его сами ученики. Затем определяются круг и шар. После этого переходим к изучению их свойств. Сначала обсуждаются свойства, которые одинаковы для окружности и сферы. Перечислим их.

1. Если диаметр проходит через середину её хорды, то он перпендикулярен этой хорде.
2. Если диаметр перпендикулярен хорде (не являющейся диаметром), то он делит её пополам.
3. Если две хорды одинаково удалены от центра, то они равны.
4. Если две хорды равны, то они одинаково удалены от центра.
5. Равные хорды одинаково видны из центра.
6. Хорды, одинаково видные из центра, равны между собой.

(В примерах 1 – 6 хорды отличны от диаметра. «Одинаково видны» — это некий жаргон для сокращения фразы о равенстве соответствующих центральных углов.)

Что могут в такой работе ученики делать сами? Опыт показывает, что они сами формулируют свойства сферы, повторяющие свойства окружности, и могут их доказать без помощи учителя.

Следующий разговор — о касательной к окружности (сфере). Даётся традиционное определение касательной к окружности, и оно в таком же виде переносится на касательную к сфере. О касательной к окружности доказываются известные теоремы, и они же могут быть доказаны о касательной к сфере. Есть одна тонкость. Пусть мы доказываем утверждение: «Если прямая касается сферы, то она перпендикулярна радиусу сферы, проведенному в точку касания». Возможно такое доказательство: «Пусть точка O — центр сферы, точка A — точка касания. Предположим, что радиус OA не перпендикулярен касательной. Проведем тогда перпендикуляр OB к касательной и отложим от точки B на этой касательной отрезок BC, равный BA (рис. 23). Получается, что $OC = OA$ и отрезок OC равен радиусу сферы, а тогда точка C ещё одна точка, общая у сферы и касательной, чего не может быть». Тонкость заключена в проведении перпендикуляра OB: известно, что это проведение — задача на построение в пространстве. Поэтому я (а что делать?) лукавлю и произношу другую, менее обязывающую фразу: «Пусть OB — перпендикуляр к касательной». Всё остальное в доказательстве проходит гладко.

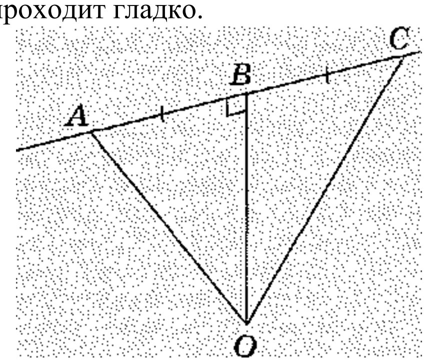


Рис. 23

Ученики ясно видят разницу в разговоре о касательных к окружности и к сфере: в данной точке окружности можно провести одну касательную, а в данной точке сферы — бесконечное множество. Ученики видят также, что все такие касательные к сфере заполняют некоторую плоскость. (А. Александров по случаю доказал это утверждение чуть ли не в начале курса стереометрии.) Тогда можно сказать, что эта плоскость называется касательной к сфере, и представление о сфере и касательной к ней плоскости даёт мяч, лежащий на полу. Разговор об аналогиях между планиметрией и стереометрией уместен даже на первом уроке стереометрии, если мы хотим перекинуть мостик в головах учеников "от ведомого к неведомому".

Замечу вот что. Мировой опыт преподавания геометрии в школе всегда отводил стереометрии второстепенную роль. Причины тому понять несложно: важнейшие теоремы школьной геометрии именно планиметрические, да и вообще планиметрия полегче хотя бы потому, что в ней меньше работы пространственному мышлению. Отсюда "раздутость" традиционного школьного курса планиметрии, от обилия второстепенных сведений рябит. Несоразмерная роль отведена треугольнику (пример - понятие ортоцентра) и окружности (вписанные углы). Абсолютное большинство задач про окружность не имеет ни теоретической, ни практической ценности. Однако же выпускник наш должен чуть ли не "сгореть от стыда", не умея вычислить угол в кем-то придуманной конфигурации, при том, что не понимает, к примеру, как получается карта Земли.

Трёхмерное геометрическое пространство (не надо только отождествлять его с реальным физическим пространством) в определённом смысле устроено иначе, нежели плоскость. И я бы сказал, устроено поинтереснее, в нём меньше формул и "больше места" для работы интуиции, в конечном счёте больше самой геометрии.

Однако слово «аналогия» весьма избирательно. Что за ним стоит? Чаще всего говорят про аналогичные способы, методы. С фигурами и формулами ситуация не так очевидна. Можно ли говорить об аналогии между неплоскими и плоскими фигурами? Скажем, можно ли считать, что правильный треугольник и правильный тетраэдр – аналогичные фигуры? В своё время
В. Болтянский сформулировал примерно так: « Аналогия – это общность аксиоматики». Возможно, такое понимание проходит для теорий (разные геометрии аналогичны, поскольку у них есть общие аксиомы), но как быть в более простых ситуациях?

Кроме того, не стоит путать аналогию с обобщением и с предельным соотношением – иногда такое встречается в литературе.

Попробуем разобраться с этой терминологией (хотя бы частично) на примере теоремы Пифагора. Обобщением теоремы является планиметрическая теорема косинуса – ясно почему. Если в теореме косинуса положить соответствующий угол прямым, то и получаем теорему Пифагора. Именно поэтому в учебнике геометрии А. Александрова вместо « теорема косинусов» употреблено название « обобщённая теорема Пифагора», сокращённо ОТП. (Кстати, в стандартной формулировке этой теоремы одинокий косинус почему – то фигурирует во множественном числе.)

Вообще, обобщение утверждения – это такое утверждение, из которого данное получается как частный случай. Можно также считать, что его обобщением является обобщение по размерности. При обобщении по размерности исходную формулировку приходится переформулировать, ибо непонятно, какая фигура в пространстве аналогична прямоугольному треугольнику. Для разумной переформулировки достаточно перейти к рассмотрению ортогональных проекций отрезка на попарно перпендикулярные прямые. Если всё происходит на плоскости и отрезок упирается концами в перпендикулярные прямые, то получаем исходную теорему Пифагора. В общем случае (на плоскости) отрезок не обязан упираться в данные прямые, а потому обобщение теоремы Пифагора (в сжатой формулировке) выглядит так: квадрат отрезка равен сумме квадратов его проекций. Точно такая же сжатая формулировка годится и для пространства, именно она и будет обобщением теоремы Пифагора по размерности. Действительно, если одна из проекций отрезка (в трёхмерном случае) – точка, то приходим к планиметрическому варианту теоремы Пифагора (при этом договоримся, что «длина» точки равна нулю.)

Иные авторы полагают, что «пространственной теоремой Пифагора» является известное утверждение о прямоугольном тетраэдре (у него все плоские углы при вершине – прямые) : квадрат площади его основания равен сумме квадратов площадей его боковых граней. По моим понятиям, это утверждение не является обобщением теоремы Пифагора, разве что неким аналогом.

Тут же замечу, что теорема Пифагора является предельным случаем известного соотношения в трёхгранном угле с прямым двугранным углом (а также известным соотношением в сферической геометрии), именно: $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$, где γ, α, β – плоские углы трёхгранного угла, причём угол γ лежит против прямого двугранного угла. Это соотношение называют формулой « трёх косинусов » для трёхгранного угла; оно является следствием теоремы косинусов для трёхгранного угла.

Это соотношение между косинусами углов называют пространственной теоремой Пифагора - почему? Дело вот в чём. Переходя к сферической геометрии, получаем, что в сферическом прямоугольном треугольнике одна его дуга выражается через две другие его дуги: косинус гипотенузы сферического прямоугольного треугольника равен произведению косинусов его катетов. Это кажется странным, ибо связь с планиметрической теоремой Пифагора в этой формуле сходу не просматривается. Поэтому проделаем такую выкладку.

Обе части равенства $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$ возведём в квадрат. Затем каждый квадрат косинуса выразим из основного тригонометрического тождества. Получим такое равенство: $1 - \sin^2\gamma = (1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\beta)$. Если углы заданы в радианной мере, то перейдём от углов к длинам соответствующих дуг больших окружностей, которые обозначим соответственно: c, a, b. Получим такое равенство (R - радиус сферы):

$$1 - \sin^2(c/R) = (1 - \sin^2(a/R))(1 - \sin^2(b/R)).$$

При устремлении радиуса сферы к бесконечности заменим бесконечно малые синусы на их аргументы - получаем после упрощения равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - (a^2 b^2)/R^2.$$

Затем отбрасываем бесконечно малое слагаемое и получаем формулу теоремы Пифагора.

Тем самым планиметрическую теорему Пифагора мы можем считать предельным случаем полученной теоремы сферической геометрии. Но не – частным, всё – таки плоскость не является частным случаем сферы.

Поговорим теперь о *стереометрических задачах* в курсе планиметрии. Приведу примеры.

Курс планиметрии только начинается, идёт рассказ о геометрических фигурах. И сразу же даётся такая задача: «Нарисуйте куб. Укажите пересечение: а) нижней и правой граней; б) передней и верхней граней; в) задней и левой граней; г) передней, нижней и правой граней. Назовём нижнюю грань $ABCD$, а верхнюю грань $A_1B_1C_1D_1$, причём точка A_1 находится на одном ребре с точкой A, точка B_1 находится на одном ребре с точкой B, точка C_1, находится на одном ребре с точкой C, точка D_1находится на одном ребре с точкой D. Пересечением каких граней является: а) ребро CD; б) ребро BB_1; в) вершина C_1 .Укажите грани куба, которые не имеют общих точек.»

Далее идет речь о прямых и отрезках и даётся такая задача: «Нарисуйте куб. Отметьте одну из его вершин. Сколько отрезков соединяют её с другими вершинами куба? Сколько из них не являются рёбрами куба? Отметьте теперь две вершины куба. Соедините их отрезком. Является ли этот отрезок ребром куба? Лежит ли он в грани куба? Сколько отрезков, соединяющих вершины куба, не лежат в его гранях?»

В параграфе, посвящённом треугольнику, предлагается такая задача: «Нарисуйте на картоне или на плотной бумаге остроугольный треугольник. Вырежьте его. Отметьте середины его сторон. Проведите три отрезка, соединяющие отмеченные точки. Если вы согнёте эту фигуру по проведенным отрезкам и скрепите между собой соседние стороны треугольников, то получите пространственную фигуру, которая называется треугольной пирамидой (тетраэдром). Треугольники на поверхности тетраэдра — это его грани. Сколько граней у тетраэдра? Стороны этих треугольников — это его рёбра. Сколько рёбер у тетраэдра? Вершины этих треугольников — это вершины тетраэдра. Сколько вершин у тетраэдра?»

Таким же образом вводятся и другие трёхмерные фигуры.

После того как пространственные фигуры введены, они становятся прекрасным объектом для применения теорем планиметрии. В некотором смысле они даже лучше, чем планиметрические фигуры, так как предоставляют гораздо больше возможностей. Вот пример: «В тетраэдре $ABCD$ противоположные ребра равны, т. е. $DA = BC$, $DB = AC$, $DC=AB$. Укажите его равные грани». И ведь ничего в этой задаче нет, кроме равенства треугольников по трём сторонам, но увидеть, что в этом тетраэдре все грани равны,— несомненное достижение. Здесь, правда, опять есть тонкое место: признаки равенства треугольников формулируются только для таких треугольников, которые лежат в одной плоскости. А грани тетраэдра таковыми не являются. Однако что же мешает считать, что эти признаки выполняются и в пространстве? Дело не в математике, а в нашей привычке.

Вот пример тому. Начало курса стереометрии. Ученикам предлагается доказать, что равны апофемы правильной треугольной пирамиды. Моя коллега, очень знающий преподаватель и опытнейший методист, недоумевала, как же можно решить эту задачу без теоремы о трёх перпендикулярах (имеется в виду решение, в котором проводится высота пирамиды, потом апофема ее основания и т. д.). Но ведь боковые грани такой пирамиды — равные треугольники, и апофемы пирамиды — это их соответствующие высоты, вот и всё доказательство.

Приведу *образцы задач,* предлагаемых ученикам после того, как они познакомились с равнобедренным и равносторонним треугольником, и относящихся к пространственным фигурам.

1. Если в основании пирамиды $PABC$ равносторонний треугольник ABC, а боковые рёбра PA, PB, PC равны, то пирамида называется правильной треугольной пирамидой.
а) Пусть K, L, M— середины рёбер AC, AB, BC соответственно. Докажите, что $PK = PL = PM$. б) Пусть точка N—середина ребра PA. Докажите, что треугольник CNB является равнобедренным. Будет ли он равнобедренным, если N- другая точка внутри его ребра? А если N лежит на продолжении ребра? в) Пусть точка O — середина ребра PB. Докажите, что треугольник CNO равнобедренный.

2. Пусть в треугольной пирамиде все рёбра равны, а) Докажите, что она является правильной. б) Пусть точка K лежит внутри ребра AC. Докажите, что треугольник PKB равнобедренный, в) Пусть точка N— середина ребра PA, точка M— середина ребра BC. Нарисуйте отрезок MN. Нарисуйте два треугольника на поверхности этой пирамиды, в которых этот отрезок является высотой.

Аналогичные задачи легко придумать, когда мы переходим к четырёхугольникам и их частным видам; здесь главными объектами из мира пространственных фигур становятся четырёхугольная пирамида и прямоугольный параллелепипед.

3. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.Укажите такие его вершины, которые являются вершинами равностороннего треугольника. Какие вы выберете точки K и L на рёбрах DA и DC, чтобы треугольник B_1KL оказался равносторонним? А на прямых DAи DC?

Ещё более богатым становится набор стереометрических задач, когда в курсе планиметрии появляются величины: площади, разнообразные соотношения между длинами сторон треугольника и решение треугольников. Перейдём к примерам.

4. Задача на площадь прямоугольника. Прямоугольный параллелепипед T разрезали на два прямоугольных параллелепипеда T_1 и T_2. Будет ли площадь поверхности параллелепипеда T равняться сумме площадей поверхностей T_1 и T_2 .Если нет, то она будет больше или меньше?

Эту идею можно иллюстрировать на такой задаче: «Куб разрезали на 8 равных кубов, а) Сравните площадь поверхности данного куба и площадь поверхности полученного малого куба, б) Сравните площадь поверхности данного куба и площадь поверхности всех восьми кубов. в) Пусть каждую сторону данного куба разделили на 10 равных частей. На сколько кубов разделится данный куб? Выполните задания «а» и «б» для данного случая».

5. В тетраэдре $PABC$ углы PCB, PCA, BCA прямые. $PC=BC=AC=1$. Чему равна площадь поверхности тетраэдра? Решите также эту задачу, когда угол BCA равен 60°, 120°.

6. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника BCD, угол B в этом треугольнике прямой. Рассмотрим длины отрезков AB, BC, BD, AC, AD, CD. а) Пусть известны длины AB, BC, BD. Вычислите длины остальных отрезков. б) Пусть известны длины AB, BC, CD. Выполните такое же задание. в) Выберите сами любые три из данных шести длин и выполните такое же задание.

Задачи 5 и 6 предлагаются к теореме Пифагора.

7. В тетраэдре известны длины трёх ребёр, выходящих из одной вершины, и углы между этими рёбрами. Как найти площадь его поверхности? Задача предполагает знание синуса угла, формулы Герона или теоремы косинуса.

Число примеров легко увеличивается. Практически на каждое утверждение планиметрии можно подобрать несложные стереометрические ситуации, где это утверждение может применяться.

За результатами такой работы мне удалось проследить только один раз — я начал работать с пятиклассниками и выпустил их из школы. Что я понял из столь краткого опыта? Разумеется, такой деятельностью стоит заниматься, особенно в том случае, когда, начав систематический курс геометрии в 7 классе, рассчитываешь закончить его в 11 классе. Стереометрические задачи решаются учениками в 7—9 классах так же, как и планиметрические, иногда даже лучше. И вот почему. Основная их нагрузка связана с пространственным мышлением, а не с математическим содержанием, которое обычно не слишком велико. В то же время усложнение планиметрических задач идет как раз в их математическом содержании. Естественно, что ученик, имеющий уже некоторые трёхмерные представления, легче справляется со стереометрической задачей, нежели с планиметрической чуть повышенной трудности. Вместе с тем я не заметил, чтобы мои ученики, став старшеклассниками, решали бы более трудные задачи по стереометрии — увы. На выходе из 11 класса математическое содержание задач осталось таким же. Но совершенно мне очевидно, что известная проблема перехода от планиметрии к стереометрии в начале 10 класса была снята.

Разумеется, я не считаю, что предложенный вариант решения этой проблемы единственно возможный, однако её решение в рамках нашей системы среднего математического образования нельзя откладывать до бесконечности, какие-то варианты пора предлагать и для широкого преподавания.

И, как говорится, лёд тронулся. В последнее время появились учебники, в которых о стереометрии рассказывается параллельно с планиметрией.

Я уже упоминал о кризисе в преподавании школьной геометрии. Любопытно отметить, что такое состояние не является чем-то новым,— достаточно почитать исторический очерк Ф. Клейна. Особенно сильно влияет, по-моему, на глубину и продолжительность нынешнего кризиса столкновение разных взглядов на преподавание геометрии.

Одна точка зрения состоит в том, что геометрия в школе должна преподаваться как интеллектуальная дисциплина. При этом главная её задача — воздействие на интеллект ребёнка и развитие его логического мышления. («Почему не просто мышления?» — спрошу я вслед за X. Фрейденталем.) Тому способствует чёткая аксиоматика, законченная последовательность теорем, полноценная аргументация в изучении теории и решении задач.

Интересно, знакомы ли сторонники этого взгляда с опытами психологов, проведёнными уже давно? Были взяты две одинаковые группы студентов, и одна из них обучалась евклидовой геометрии, а другая нет. В остальном условия обучения были одинаковы. По окончании обучения в обеих группах были предложены для решения одни и те же задачи —не по геометрии, но требующие которого рассуждения. Никакого преимущества «геометрическая» группа не показала.

Другая точка зрения заключается в том, что геометрия в школе должна преподаваться для того, чтобы научить ребёнка понимать мир формы. Видеть этот мир, ориентироваться в нём невозможно без специального образования. Кроме того, громадное значение имеют геометрические образы в разных науках - математике, химии, биологии, также в технике, не говоря уже о практической деятельности людей.

Есть и другие взгляды.

Дело не в том, какая из этих точек зрения важнее и должна победить, а в том, как можно учесть их обе. В современном преподавании геометрии это не получается так, как хотелось бы. Приведу несколько **примеров.**

1. Решим такую задачу: «Чему равен объём прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 1,2 см, 3,4 см и 6,8 см?» Чего, казалось бы, проще: перемножим эти измерения и получим ответ. Но! Если эту задачу решают на уроке математики, то в ответе оставят все знаки после запятой. Если эту задачу решают на уроке физики (при определении удельного веса вещества, из которого сделан этот параллелепипед), то после запятой оставят максимум два знака.

Явный нонсенс, и точка зрения физики мне ближе: откуда же взялись эти самые сантиметры в данных? Видимо, был какой-то процесс измерения? Но тогда выполняются все правила приближённых вычислений, от которых часто в ужасе отмахивается учитель математики.

Если же убрать из условий задач размерные величины, то, по моему разумению, это придаст курсу школьной математики чересчур абстрактный оттенок.

2. С большим трудом приходится доводить до сознания детей необходимость доказательства существования геометрической фигуры, обладающей некоторым очевидным свойством. Фразы типа «Докажем существование середины отрезка или биссектрисы угла, или перпендикуляра к плоскости» должны быть очень аккуратно поданы, ибо сознание ребёнка не может легко смириться с необходимостью доказательства существования того, что он может увидеть собственными глазами. Причем доказательства существования в школьном курсе, как правило, конструктивны, что иногда ещё более усложняет задачу учителя. Вместе с тем конструктивные доказательства существований всё равно «повисают в воздухе». Это видно хотя бы из такого вопроса: «Существует ли круг площадью 1?» С одной стороны, ясно, что существует, но, с другой стороны, его радиус равен $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ и не может быть построен циркулем и линейкой.

— И вообще,— спрашиваю я старшеклассников,— каков смысл утверждения о том, что существует окружность?

Один из хороших ответов был такой: « Всё упирается в смысл таких утверждений: «существует точка» и «существует бесконечное множество точек». Немного подробнее. Множество существует - это значит, что оно не является пустым. Достаточно обеспечить существование хотя бы одной точки в определяемом множестве - и оно уже существует. Окружность с центром O и радиусом $R > 0$ - это множество точек плоскости X таких, что $OX = R$. Существование окружности с заданным центром и заданным радиусом обеспечивается известной аксиомой планиметрии (в свободной формулировке): на каждом луче от каждой точки можно отложить отрезок, длина которого задана. Это приходится объяснять ученикам, и они вначале недоумевают, ибо окружность не сводится к одной точке.

Помогает какой-нибудь шуточный пример, скажем, такой. Назовем "блямбой" множество "финтифлюшек". Для того, чтобы "блямба" существовала достаточно предъявить хотя бы одну "финтифлюшку".

А вот пример (по случаю) из учебника (по высшей математике) В. Босса. Определив аналитическую функцию, он пишет затем: "…неплохо было бы убедиться, что существует хоть одна аналитическая функция помимо константы."

3. Доказательства существования из соображений непрерывности, хорошо известные с давних времён и применяемые геометрами в своих сочинениях, отсутствуют в школьном курсе. Вот, например, как у Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена доказано, что эллипсоид имеет круговое сечение (я рассказываю не дословно, а только идею). У эллипсоида три диаметра, возьмем средний из них и будем вращать сечение, проходящее через средний диаметр.Такое сечение является эллипсом. Если начать вращение сечения от того положения, когда оно проходит через наименьший диаметр, до того положения, когда оно проходит через больший диаметр, то в какой-то момент диаметры эллипса — сечения — станут равными. Но такой эллипс является окружностью.

Многие противоречия в преподавании геометрии могут быть сняты, если понимать его как преподавание прикладной математики.

Пожалуй, наиболее полно описали это толкование в своей книге И. Блехман, А. Мышкис и Я. Пановко. При этом я подчёркиваю: не геометрия является прикладной математикой, а преподавать геометрию имеет смысл как прикладную математику. В чём же этот смысл? Ну хотя бы в отношении к существованию. Кубы, тетраэдры и перпендикуляр к плоскости потому и могут изучаться в девятилетке, что вопрос об их существовании как объектов идеальной математической теории не стоит – в сознании школьника. И даже если подождать с многогранниками до курса стереометрии, то всё равно их стоит рисовать и решать про них разные задачи до того, как будет формально доказано их существование.

Однако что считать существующим? Возможен такой ответ: существует то (но не только то), что сделано человеком. В частности, некий факт имеет место, если он наблюдается в результате достаточно тщательно выполненных реальных процедур, например геометрических построений с помощью инструментов, в том числе измерительных, даже в результате непосредственного подсчёта. Пересечение медиан треугольника, величина суммы его углов, касание окружностей, простейшие задачи комбинаторной геометрии... — вот примеры. Другое дело — объяснение этого факта, почему он имеет место. То же и в работе с компьютером, та же идеология, разве что степень убедительности другая, но об этом – позже. Если компьютер что-то выдаёт, то это прекрасно, но откуда это берётся, как это получается, на чём это основано?

И мы выходим на идеологию естественной науки — нечто существующее требует объяснения.

Вот как сказал об этом Леонардо да Винчи: «Мое намерение — привести сначала опыт, а затем посредством рассуждения доказать, почему данный опыт вынужден протекать именно так. И в этом истинное правило того, как должен поступать исследователь природных действий».

Следовать этой идеологии не всегда просто. Есть уйма задач, результаты которых очевидны из вычислений или из аккуратного рисунка или даже из реального опыта, но вот поди докажи. Один из ярких примеров — занятное доказательство теоремы о сумме углов треугольника с помощью последовательного движения авторучки вдоль каждой его стороны и поворачивания оной в каждой его вершине — «заметая» все три угла треугольника, она поворачивается как раз на 180°. В начальном курсе геометрии это доказательство приводит детей в восхищение. Чтобы эти восторги поутихли, приходится проделывать такую же процедуру на сферическом треугольнике.

Один гипотетический пример. Представим себе, что мы хотим изучить лист Мёбиуса. Мы что же, следуя традиции, начнем с определения, а затем будем доказывать существование? Думаю, что так не делают и в высшей школе. Полагаю, будет иначе. Мы возьмём полоску бумаги прямоугольной формы, извернём её и склеим по стороне. Лист Мебиуса существует, поскольку он находится у нас перед глазами. Именно такой подход к существованию я считаю наиболее приемлемым для введения многих важных геометрических понятий вплоть до старших классов. И именно такой подход кажется мне наиболее разумным при введении в ранний курс геометрии начал стереометрии.

Другое дело — как сделать «это»? Как проверить, что сделали то, что хотели? Тем самым мы выходим на основные задачи геометрии, о которых говорил А. Александров: «Самая первая задача геометрии состоит в том, чтобы давать точно обоснованные правила для построения фигур с теми или иными свойствами».

Далее, в любом начальном курсе геометрии не избежать апелляции к наглядности. Но тогда мы уходим от, так сказать, «чистой» математики. А куда приходим - с методологической точки зрения? У нас просто нет другого выхода, как придти в математику прикладную, точнее, в методологию прикладной математики. Это там, в прикладной математике, если «я что-то вижу» — объект, процесс, то «так оно и есть». Разумеется, следует чётко оговорить пределы использования наглядности. Естественно в начале курса геометрии отказаться от аксиом порядка и непрерывности, устанавливая истинность некоторых утверждений на основе наглядной интуиции. (Две пересекающиеся прямые делят плоскость на четыре части просто потому, что это «видно».) Естественно пользоваться симметриями, непрерывностью и механическими соображениями. На этом пути сам ученик может и заблуждаться, но на то и учитель, чтобы руководить процессом постижения истины. Преподавание становится менее формальным, а потому более интересным.

На эту же проблему можно зайти с другой стороны. Один из существенных недостатков нашей системы математического образования, а может быть и всего образования в целом - его излишняя академичность, в частности, пренебрежение к технологии. Мы заняты главным образом проблемой "почему", или даже "откуда это следует", почти игнорируя проблему "как". (Отсюда, в частности, пренебрежение иных преподавателей и авторов к методике.) Такой характер образования предполагает примат теоретического мышления. Но ведь есть и практическое мышление. Существует громадное поле для его проявления в жизни - бизнес, военное дело, юриспруденция, врачевание, образование…

Важная особенность в процессе решения задач, решаемых на практике - их постановка. Задача, взятая из реальности, "ставится" - формируется её условие, отбираются данные, формулируется цель - много ли мы эти занимаемся со школьниками на уроках математики? Увы. Методология прикладной математики предполагает грамотную постановку практической задачи, а потому работает не только на теоретический интеллект, но и на практический.

К сожалению, прикладную математику не жалуют порой и сами математики. Крайние точки зрения таковы: нет никакой прикладной математики, а есть только приложения математики; известный математик прошлого века Г. Харди полагал, что (в вольной трактовке), математика полезна тем, что она бесполезна; он же прикладную математику называл "тривиальной математикой". Но вот цитата из высказываний крупного математика прошлого века Г. Биркгофа: " многие чистые математики, будучи всего лишь прикладными логиками, настойчиво умаляют значение прикладной математики и с радостью уморили бы её до смерти."

Методология прикладной математики находит ещё один аспект в преподавании геометрии, который стал возможен в последнее время благодаря компьютеру. Я говорю о моделировании. С помощью современных программных средств возможно на геометрическом материале провести численный или визуальный эксперимент (например, измерять расстояния, или площади, или углы, или находить координаты получающихся точек, или наблюдать некое взаимное расположение фигур). В результате сбора численных данных можно выдвинуть гипотезу (о соотношении величин в виде формулы, о характере функциональной зависимости) , которая затем подлежит проверке с помощью доказательных рассуждений. В итоге визуального эксперимента также появляется гипотеза о виде той или иной фигуры, о её свойствах. Подробно об этих возможностях я поведу далее особый разговор.

Не удержусь и приведу слова Р.Рекорда, английского учёного, которые он написал в 1551 году: «Нет искусства более изумительного и мудрого, а также более нужного людям, чем добрая геометрия.»

II.11 Об углах между скрещивающимися прямыми и немного о прочих углах

Порой открываешь для себя нечто новое там, где меньше всего ожидаешь, в том, что давным –давно известно. Так у меня случилось с углами в пространстве. На них до поры до времени я не обращал особого внимания – как на почти любую вычислительную задачу в геометрии. Однако…

Несложное понятие угла между скрещивающимися прямыми оказалось важно не столько само по себе, сколько потому, что с его помощью можно эффективно решать задачи об углах: прямой с плоскостью, двугранных углах, углах между двумя плоскостями. Умея находить угол между скрещивающимися прямыми разными способами, можно существенно облегчить себе решение таких задач. Вот эти способы.

1. П е р в ы й с п о с о б - *параллельным переносом* - основан на определении угла между скрещивающимися прямыми – мы производим перенос одной из них (или сразу двух) так, чтобы прямые, полученные в результате переноса, пересекались. Тем самым задача становится планиметрической.

2. В т о р о й с п о с о б - *« в три косинуса»* - таков. Через одну из этих прямых (назовём её q) проводим плоскость α – любую, пересекающую вторую из данных прямых, которую назовём p. Спроектируем прямую p на плоскость α и назовём её проекцию p_1. Тогда верна формула:

$$\cos\angle pq = \cos\angle pp_1 \cdot \cos\angle p_1q\ .$$

Эта формула является следствием теоремы косинусов для трёхгранного угла, когда соответствующий двугранный угол – прямой.

3. Т р е т и й с п о с о б - *проектирование обеих прямых* на плоскость, перпендикулярную одной из них.

Пусть p и q - скрещивающиеся прямые, плоскость α перпендикулярна прямой p. прямая q пересекает плоскость α в точке B, точка A – проекция прямой p на плоскость α, прямая q_1 - проекция прямой q на плоскость α, на прямой q лежит отрезок длиной d , а его проекция на плоскость α имеет длину d_1. Тогда верна формула

$$d_1 = d \sin \varphi,$$ где φ - угол между прямыми p и q.

Для доказательства этой формулы достаточно провести прямую p_1, перпендикулярную плоскости α через точку B. Так как прямая p_1 параллельна прямой p, то прямые p_1 и p лежат в одной плоскости. И для доказательства этой формулы достаточно планиметрии.

4. Четвёртый способ - *проектирование отрезка одной прямой на другую* - следствие свойства ортогонального проектирования на прямую. Свойство это таково. Пусть есть две скрещивающиеся прямые p и q. Пусть на прямой p находится отрезок длиной a и его ортогональной проекцией на прямую q является отрезок длиной b. Тогда верна формула

$$b = a \cos\varphi,$$

где φ - угол между данными скрещивающимися прямыми.

Для доказательства этой формулы сначала через одну из этих прямых проведём плоскость, которая пересекает другую прямую, затем заменим проектирование отрезка на прямую последовательным проектированием этого отрезка сначала на проведённую плоскость, а затем - проектированием в этой плоскости полученной проекции на вторую прямую; теперь осталось применить формулу «трёх косинусов».

Для другого, по-моему, более симпатичного доказательства, используем векторы. Пусть AB - отрезок прямой p длиной a, CD - его проекция на прямую q длиной b. Запишем равенство $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB}$.

Заметим, что в силу ортогонального проектирования на прямую, векторы $\vec{AC}$ и $\vec{CD}$, равно как и векторы $\vec{CD}$ и $\vec{DB}$, ортогональны, посему соответствующие скалярные произведения равны 0. Теперь – простая выкладка. Итак, $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = (\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB}) \cdot \vec{CD} =$

$\vec{AC} \cdot \vec{CD} + \vec{CD} \cdot \vec{CD} + \vec{DB} \cdot \vec{CD} \Rightarrow a\, b \cos \varphi = b^2 \Rightarrow b = a \cos \varphi$.

В полученной формуле используется ортогональное проектирование на прямую. Его свойства вроде бы очевидны. Например, ясно, что проекцией отрезка на прямую будет отрезок, но хотелось бы иметь доказательство. В « лоб » это довольно муторное дело. Сделаем так. Проведём через первую прямую произвольную плоскость. Затем спроектируем вторую прямую на эту плоскость, а затем полученную проекцию второй прямой спроектируем на первую прямую в проведённой плоскости. И так как свойства этих двух последовательных проектирований уже известны (в частности, проекцией отрезка является отрезок), то никакого специального доказательства уже не требуется.

5. Пятый способ вычисления угла между скрещивающимися прямыми – *векторный*, использующий скалярное умножение.

Его можно применить в двух вариантах – без координат и с ними.

6. Шестой способ вычисления угла между скрещивающимися прямыми – с помощью «*замкнутой ломаной*» также основан на векторной технике. Пусть у нас есть замкнутая ломаная $ABCDA$ (неважно – плоская она или неплоская, могут быть и самопересечения). Тогда выполняется равенство:

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$. Отсюда можно идти двумя путями.

Возведя это равенство в квадрат, заменив затем скалярные квадраты векторов на квадраты их длин, а скалярные произведения раскрыв по определению, придём к равенству:

$AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + 2\, AB \cdot BC \cos\alpha + 2\, BC \cdot CD \cos\beta + 2\, AB \cdot CD \cos\varphi$, где α, β ,φ - соответственные углы между векторами.

Если нам известны все расстояния в этой формуле, а также углы α, β между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$, $\vec{BC}$ и $\vec{CD}$ (имеющими общую точку), то несложно вычислить и угол φ между прямыми AB и CD, которые в интересующем нас случае являются скрещивающимися.

Можно сделать чуть иначе. Пусть нас по-прежнему интересует угол между прямыми AB и CD.

Запишем такое равенство: $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB}$. Умножим обе части этого равенства на вектор $\vec{DC}$. Проделав выкладки, аналогичные предыдущей, приходим к равенству

$$2\,AB \cdot DC \cos\varphi = 2\,AD \cdot DC\ \cos\alpha + DC^2 + 2\,CB \cdot DC \cos\beta.$$

При наличии необходимых данных, мы находим искомый угол. Обращаю внимание на то, что углы α , β , φ в этих двух выражениях для скалярных квадратов различны; необходимо также помнить, что угол между прямыми и угол между направляющими векторами этих прямых могут быть как равными, так и дополнять друг друга до 180^0.

7. С е д ь м о й   с п о с о б вычисления угла между скрещивающимися прямыми – « *с помощью тетраэдра* » встречается нечасто, но он весьма эффективен. Для тетраэдра *ABCD* формула такова:

$$\cos \angle AC,BD = \left|\,(AD^2 + BC^2) - (AB^2 + CD^2)\,\right| / 2\,AC \cdot BD.$$

Доказательство проведём векторным способом, используя скалярное умножение векторов.

Выберем полюс *O* и запишем все нужные нам векторы в радиус - векторной технике с началом в точке *O*. Получим: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$, $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$, $\vec{BD} = \vec{OD} - \vec{OB}$, $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA}$, $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC}$. Докажем равенство

$$2\,\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \left|\,(\vec{AD}^{\,2} + \vec{BC}^{\,2}) - (\vec{AB}^{\,2} + \vec{CD}^{\,2})\,\right|,$$ из которого и следует нужная нам формула. Для удобства введём обозначения: $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, $\vec{OC} = c$, $\vec{OD} = d$. Итак, требуется доказать тождество

$$2(c - a)(d - b) = \left|\,(d - a)^2 + (c - b)^2) - (b - a)^2 - (d - c)^2\,\right|.$$

Это несложно – простейшая алгебра.

Подчеркну, что вычисление угла между прямыми этим способом требует знания шести (не меньше) расстояний между точками этих прямых, расположенных определённым образом. Удобно представлять соответствующие шесть отрезков как рёбра тетраэдра, из коих четыре отрезка - как противоположные звенья замкнутой ломаной, два – «диагонали» этой ломаной. В нашем случае *ABCDA* - замкнутая ломаная, *AC* и *BD* - её диагонали.

Чтобы в тетраэдре, обозначенном как – то иначе, большие буквы «не мешали» , введём другие обозначения. Именно, последовательные звенья замкнутой ломаной обозначим как a_1, a_2, a_3 , a_4 , её диагонали – как d_1 , d_2. Тогда нужная нам формула запишется так:

$$\cos \angle d_1 , d_2 = \left|\,(a_1^2 + a_3^2) - (a_2^2 + a_4^2)\,\right| / 2\, d_1 d_2.$$

Когда мы имеем дело с формулой, есть возможность «поиграть» с ней, например, получить какие – нибудь её следствия. Попробуем это сделать с полученной формулой . Вот несколько возможностей.

1) Пусть в этой формуле какое – то a_i равно нулю, например a_4 . Мы приходим к такому равенству: $\cos \angle d_1 , d_2 = \left|\,(a_1^2 + a_3^2) - a_2^2\,\right| / 2\, a_1 a_2$. А оно есть не что иное как теорема косинуса для треугольника, только чуть изменённая из – за модуля. Но он здесь по делу: в планиметрии мы искали угол между лучами, а здесь – угол между прямыми. Значит, эту формулу позволительно считать обобщением теоремы косинуса, известной из планиметрии. Любопытно, не правда ли?

Другие результаты мы можем получить как следствия из этой формулы, если:

2) $a_1 = a_2$;
3) $a_1^{\,2} + a_3^{\,2} = a_2^{\,2} + a_4^{\,2}$;
4) $d_1 \to 0$;
5) $d_1 \to \infty$.

Можно поработать с этой формулой чисто алгебраически, забыв на время, что за ней стоит косинус угла в тетраэдре. Например, пытаясь доказать, что (для рёбер тетраэдра) модуль выражения в правой части не превосходит 1 . А чтобы упростить задачу, положить, к примеру, $d_1 = d_2 = 1$.

И ещё - эта формула верна и на плоскости.

8. В о с ь м о й   с п о с о б вычисления угла между скрещивающимися прямыми – *«через расстояние между ними »*, используется крайне редко. Соответствующая формула такова: $6V = a \cdot b \cdot h \cdot \sin\varphi$, где *a* и *b* - длины двух отрезков, являющихся противоположными рёбрами тетраэдра, *h* - расстояние между прямыми, на которых лежат эти отрезки, *V* - объём тетраэдра, а *φ* - угол между этими прямыми.

Эта формула замечательна тем, что в неё входят две основные величины для скрещивающихся прямых - расстояние между ними и угол между ними. Тем самым, угол между скрещивающимися прямыми может помочь при нахождении расстояния между ними. Вот пример тому.

Задача. Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми, на которых лежат диагонали соседних граней прямоугольного параллелепипеда, измерения которого $a.b,c$.Эта задача требует разве что аккуратности в выкладках, но ответ симпатичен, именно: $h = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$. Что особо любопытно – так это полное совпадение этого результата с формулой для высоты прямоугольного тетраэдра - у него все углы при одной из вершин прямые - проведённой из этой вершины, если рёбра, выходящие из этой вершины равны a,b,c.

Однако сходу непонятно, как такая странная формула появилась, причём тут объём? Есть простое объяснение. Выражение $a \cdot b \cdot \sin\varphi$ - не что иное как площадь параллелограмма со сторонами a и b и углом φ между ними. Если этот параллелограмм переместить параллельным переносом на высоту h , то получим параллелепипед именно с этими параметрами, объём которого равен как раз $a \cdot b \cdot h \cdot \sin\varphi$. А коэффициент 1/6 даст нам объём соответствующего тетраэдра, осталось только понять, почему именно 1/6.

И ещё. Из этой формулы даром получается такой, вообще говоря неочевидный результат: если по двум заданным скрещивающимся прямым движутся два отрезка фиксированной длины, то объём тетраэдра, вершины которого находятся в концах этого отрезка, не меняется.

9. Д е в я т ы й с п о с о б вычисления угла между скрещивающимися прямыми – *через направляющие косинусы.*

Пусть три прямые попарно перпендикулярны. Пусть ещё одна прямая образует с ними углы α, β, γ соответственно. Тогда верна формула

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Из полученной формулы следует, что, зная только два из этих углов, можно найти третий.

При этом совсем необязательно, чтобы все эти прямые пересекались. А потому по этой формуле можно находить угол между скрещивающимися прямыми.

10. Д е с я т ы й с п о с о б вычисления угла между скрещивающимися прямыми – *координатный.*

Его естественно применять, когда прямые заданы уравнениями в системе координат. По сути дела этот способ векторный, координатный он только по форме.

Уравнение прямой в координатной форме выглядит так

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} .$$

Здесь (x, y, z) - координаты переменной точки прямой, (x_0, y_0, z_0) - координаты фиксированной точки этой прямой, (m, n, p) - координаты направляющего вектора этой прямой. (Аналогичная формула есть и для прямой в плоскости; она будет содержать вместо трёх дробей – две, не будет третьей дроби.) Векторный метод, с помощью которого выводится эта формула , «убивает двух зайцев».

Пусть прямая a задана уравнением $(x - x_1)/m_1 = (y - y_1)/n_1 = (z - z_1)/p_1$, где x_1 , y_1, z_1 - координаты какой – либо её точки, m_1 , n_1 , p_1 - координаты её направляющего вектора, а прямая b задана уравнением $(x - x_2)/m_2 = (y - y_2)/n_2 = (z - z_2)/p_2$, где x_2 , y_2, z_2 - координаты какой – либо её точки, m_2 , n_2 , p_2 - координаты её направляющего вектора. Формула для угла между этими прямыми получится, если выразить угол между их направляющими векторами с помощью скалярного произведения и формулы длины вектора через его координаты.

Имеет смысл найти всеми десятью приведёнными способами угол между скрещивающимися диагоналями соседних граней куба.

Особенно эффектно можно использовать некоторые из этих способов для проверки перпендикулярности двух прямых. Соответствующие примеры подобрать несложно.

Угол между скрещивающимися прямыми помогает при нахождении других углов: угла между прямой и плоскостью, двугранного угла, угла между плоскостями.

Для нахождения угла между прямой и плоскостью можно, обходя его определение, идти другим путём. Если мы введём в рассмотрение нормаль (т. е. перпендикуляр) n к данной плоскости α, то угол φ между прямой a и плоскостью α будет дополнительным до прямого к углу φ_1 между данной прямой a и нормалью n к плоскости α То есть $\varphi + \varphi_1 = 90^0$. Найдя φ_1, мы находим искомый угол φ.

Находить угол прямой с плоскостью через угол прямой с нормалью к этой плоскости вполне «нормально», если помнить, что угол характеризует отклонение. От какого направления отклоняется наша прямая? От направления нормали к плоскости.

Работа с нормалью имеет и такое преимущество по сравнению с традиционным методом – через проекцию. Проекция прямой на плоскость (используемая при традиционном способе нахождения угла между прямой и плоскостью) фиксирована и потому может быть не вполне удобна для вычислений, а нормали можно рисовать где угодно и выбирать такие, которые позволяют вычислять угол наиболее коротко.

Так как нормаль выбирается произвольно, то можно свести задачу к планиметрической, выбрав такую нормаль, которая пересекается с данной прямой.

Когда выбранная нами нормаль данной плоскости скрещивается с данной прямой, возможен выбор между разными способами нахождения угла.

Вот пример.

Задача. Вычислить угол между ребром правильного октаэдра и плоскостью грани, имеющей с ним одну общую точку.

Угол быстро находится, если выбрать нормаль к этой плоскости, проходящую через центр правильного октаэдра.

Для нахождения угла между плоскостями можно, обходя его определение, идти иным путём. Если мы введём в рассмотрение нормаль n_α к данной плоскости α и нормаль n_β к данной плоскости β, то угол φ между плоскостью α и плоскостью β будет равен углу между нормалями к этим плоскостям n_α и n_β .

Существенно (как и в случае угла между прямой и плоскостью) , что нормали можно выбирать произвольно, а потому это можно делать наиболее эффективно. Иногда удаётся свести задачу к планиметрической, то есть выбрать такие нормали, которые пересекаются.

Когда выбранные нормали скрещиваются, предстоит сделать выбор между разными способами нахождения угла между скрещивающимися прямыми.

Вот пример.

Задача. Вычислить угол между плоскостями граней правильного октаэдра, имеющих одну общую точку.

Угол быстро находится, если выбрать нормали к этим плоскостям, проходящие через центр правильного октаэдра.

Работа с нормалями позволяет чуть ли не «даром» получить несколько любопытных результатов. Сделаем вот что. Из точки M , лежащей внутри трёхгранного угла с вершиной O и рёбрами OA,OB,OC проведём три нормали: MA_1 к грани OBC, MB_1 к грани OAC и MC_1 к грани OAB . Появляется ещё один трёхгранный угол - с вершиной M и рёбрами MA_1, MB_1 и MC_1 . Такой угол называют полярным по отношению к данному. Отношение полярности взаимно, то есть исходный трёхгранный угол полярен к построенному.

Угол B_1MC_1 дополняет двугранный угол с ребром OA до 180^0, аналогичная зависимость для других углов. Теперь запишем формулу из теоремы косинусов для полярного трёхгранного угла:

$$\cos A_1 = (\cos \alpha_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma_1) / \sin \beta_1 \sin \gamma_1 .$$

И заменим каждый косинус в этой формуле, исходя из соотношения между двугранными углами трёхгранного угла и плоскими углами полярного угла.

Получим: $\cos (\pi - \alpha) = (\cos (\pi - A) - \cos (\pi - B) \cos (\pi - C)) / \sin (\pi - B) \sin (\pi - C)$.

Отсюда: $- \cos \alpha = (- \cos A - \cos B \cos C) / \sin B \sin C$ и, окончательно, $\cos \alpha = (\cos A + \cos B \cos C) / \sin B \sin C$.

Аналогичную формулу можно записать для косинусов других плоских углов трёхгранного угла, используя мнемонику.

*Симпатичная задача***.** Если в тетраэдре все двугранные углы равны, то этот тетраэдр – правильный. Доказательство получается из последней формулы.

11.12. ЛОГИКА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Одна из приоритетных ценностей образования **–** интеллектуальное развитие ребенка, важной составляющей которого является развитие словесно-логического мышления. Посему курс логики почти напрашивается в среднем образовании. Да так оно и было – одно время такой курс преподавался в советской школе, и мне довелось целый год выслушивать его. Было довольно скучно вникать в понятия, суждения, умозаключения, оторванные от жизни, и, что ещё более странно, не связанные с математикой (разве что приводились математические примеры тому или иному положению из логики). Про обратные теоремы, необходимые и достаточные условия, метод доказательства от противного я узнал на уроках математики, а про всякого рода отношения между высказываниями (следование, равносильность) и математическую логику – вообще не в школе.

Когда курс логики убрали из нашего школьного образования, вся сложность проблемы перешла к математике, чему было несколько оснований.

Вот какова позиция самих математиков.

В.Феллер во введении к своему известному учебнику по теории вероятностей отмечал: «В каждой дисциплине мы должны заботиться о различении трёх сторон теории: а) формального логического содержания; б) интуитивных представлений; в) приложений. Характер дисциплины в целом и её прелесть нельзя по-настоящему оценить, не рассматривая эти три аспекта в их взаимосвязи».

На важность развития логического мышления школьников указывали такие известные математики, как А.Колмогоров, Я.Дубнов, А.Хинчин, Б.Гнеденко, Л.Калужнин . Особая роль в этом отводилась геометрии, в которой его ценность выдающимися математиками – авторами школьных учебников считалась неотъемлемой (А.Александров) и даже основной (А.Погорелов).

Школьная математика – школа точного мышления. Развитие точного мышления всегда почиталось как одна из основных ценностей школьного математического образования и в педагогике математики, что нашло отражение как в педагогической теории, так и в нормативных документах .

В связи с возникшей тенденцией – знакомить с логикой в курсе математики – в методической и учебной литературе появились многочисленные пособия по развитию логического мышления школьников. Эта тенденция отразилась и в учебниках математики , и в пособиях для поступающих в вузы . Более того, сегодня в школу возвращается сам курс логики – как элективный . На путях реализации этой тенденции необходимо сделать некоторые оговорки.

Во-первых, в психологии нет термина «логическое мышление», а есть термин «словесно-логическое мышление», и он понимается гораздо шире, чем в математическом образовании. Поэтому я предпочел бы говорить о ***логической культуре*** школьника (своеобразной интеллектуальной гигиене) и о возможном вкладе математики в её формирование. К тому же известно, что словесно-логическое мышление – отнюдь не единственный вид мышления и в определённом смысле «не самый главный». Открытия совершаются не за его счёт.

Во-вторых, мнение об исключительной роли математики в становлении логической культуры ребёнка вряд ли бесспорно. Так, главный редактор журнала «Квант» академик Ю.Осипьян посчитал самой логичной из наук физику.

В целом проблема носит слишком общий характер. Попытаюсь её как-то уточнить и сузить.

Логику можно воспринимать в трёх аспектах.

• Есть *практическая логика*, используемая в повседневной жизни. В ней существен так называемый здравый смысл, личный опыт, контекст.

Напомню хрестоматийный пример, демонстрирующий значение контекста. Приказ «Казнить нельзя помиловать», написанный без запятой, привёл в недоумение его исполнителя. Но стоило тому чуть подумать, и он понял бы, что запятая после первого слова неуместна, ибо не добавляет новой информации (в приказах не объясняют причин). А запятая после второго слова как раз существенна, поскольку указывает, что делать дальше.

Даже эмоциональная окраска и интонация имеют значение – они могут изменить смысл сказанного на противоположный. Как, к примеру, воспринимать ответ «Да» на вопрос «Не хочешь ли ты поесть?»

• Есть *формальная логика*, в которой изучают только формы мышления, полностью отвлекаясь от содержания. Именно здесь можно рассуждать о «чёрном снеге», действиях «глокой куздры» и т.п.

• Есть *математическая логика* –раздел математики. В ней достаточно силён момент формализации, но нет места бессодержательным утверждениям.

Самому себе задаю вопрос: что из формальной и математической логики следует изучать в школе, чтобы в результате практическая логика не подводила?

А то, что она подводит хорошо известно. Логических ляпсусов даже в обычной речи предостаточно. Вот несколько реальных тому примеров, когда видно отсутствие внимания к прямым и обратным утверждениям. .

Пример 1. Недавно в одном из современных российских сериалов услышал следующий обмен репликами между двумя дамами (привожу почти дословно).

Первая дама: «Если мне понравится мужчина, так он обязательно негодяй!»

Вторая дама: «Уж не хочешь ли ты сказать, что если мужчина тебе не нравится, то он – хороший человек?»

Первая дама: «Вот именно!»

Пример 2. Однажды я прочитал такое: «Согласно последним научным данным, чем выше уровень интеллекта, тем меньше человек смотрит ТВ. По-моему, всё наоборот: чем больше смотришь ТВ, тем ниже уровень твоего интеллекта».

Пример 3. Если покопаться в древних источниках, то вот что можно прочитать у Лао Цзы: «Истинные слова неприятны; приятные слова не истинны» .

Пример 4. Много изречений такого рода содержится в сборниках законов Мерфи . Приведу две фразы.

«Если у вас есть время, то не будет денег. Если у вас есть деньги, то не будет времени».

«Негативные ожидания порождают негативные результаты. Позитивные ожидания порождают негативные результаты».

Мы видим вы этих примерах , как перемешиваются прямые утверждения и противоположные, обратные и им противоположные и пр. В литературном жанре это, видимо, приемлемо, но в житейской практике иногда хочется большей точности.

А вот мои аналогичные примерчики.

1) Говорю две фразы. «Всем детям полезны витамины.» и «Всем взрослым полезны витамины.» Возражений не слышал. Второе предложение равносильно следующему: если кому-то не полезны витамины, то это не взрослый, т.е. ребёнок. А всем детям согласно первому предложению полезны витамины. И получается, что если кому-то полезны витамины, то они ему же и не полезны. Что здесь не так?

2) Пример из математики. В выпуклом четырёхугольнике сумма углов равна 360^o. В невыпуклом четырёхугольнике сумма углов равна 360^o. Отсюда, следуя той же схеме рассуждений, получим ляпсус.

3) Не раз я предлагал ученикам разобраться в такой простенькой ситуации. Есть ли смысловая разница в предложениях: «Маша гуляет тогда, когда ей разрешила мама» и «Маша гуляет только тогда, когда ей разрешила мама»? А если разница есть, то в чём она? Если мы видим гуляющую Машу, то какое из этих предложений соответствует её гулянию? Мнения разделялись.

4) Ученики поначалу недоумевают, услышав, что логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел только тогда, когда произведение этих чисел положительно.

5) Совсем шуточный пример. Известному изречению «Кто не рискует, тот не пьёт шампанское» равносильно такое – «Кто пьёт шампанское, тот рискует».

В своё время расхождение между провозглашаемой важностью логической культуры и тем, что мы видим «на выходе», было замечено А.Столяром . Он высказал мнение о том, что традиционных средств, используемых в школьной математике, недостаточно для обеспечения должной логической культуры учащихся и необходимо внедрение в изучаемый курс элементов математической логики.

И впрямь, что – то ведь надо делать с этой самой культурой! И кому, как не нам?

Любой учитель математики знает о так называемых логических ошибках своих подопечных и старается научить их правильно употреблять слово «следовательно», нормально строить отрицание (особенно если в утверждении есть кванторы), доказывать от противного. Необходимо толком объяснить детям, какие бывают определения, как устроены теоремы, как из теоремы получить обратную и противоположную, какая разница между свойствами и признаками, какое свойство фигуры мы называем характерным , что значит «равносильно», каково отличие необходимости от достаточности.

Чтобы ученики стали во всё этом разбираться, приходится им для начала рассказать о простых и сложных высказываниях, как, с помощью каких союзов образуются сложные высказывания.

Первые неожиданности для учеников – уточнение использования союзов «и», «или» .

Вспомним дискуссию героев П. Бомарше о том, что сказано в завещании под кляксой: «и», а может быть, «или»?

«Бартоло. Я утверждаю, что это соединительный союз «и», связывающий соотносительные члены предложения: я уплачу девице и женюсь на ней.

Фигаро. А я утверждаю, что это разделительный союз «или», упомянутые члены разъединяющий: я уплачу девице или женюсь на ней».

Союз «и» в обыденной речи понимается двояко. Надпись «Места для детей и инвалидов» не означает, что на данное место может претендовать только больной ребёнок. А фраза «К доске пойдут Вася и Федя» означает, что у доски окажутся два ученика.

То же касается союза «или». Фраза «Сегодня в шесть часов вечера я буду в кино или на стадионе» подразумевает только одну из двух указанных возможностей, в то время как фраза «Сегодня в шесть часов вечера я буду смотреть кино по телевизору или лежать на диване» не исключает совмещения обоих занятий.

Важно пояснить, что есть два вида дизъюнкции: соединительная и разделительная. В логике она первого вида, а в жизни чаще второго, поэтому в текстах появился новый союз «и/или», соответствующий в жизни соединительной дизъюнкции. А для разделительной дизъюнкции лучше подходит союз «либо».

Двоякость толкования этих союзов, присущая обычной речи, не годится для математики. Естественно (для математиков) трактовать дизъюнкцию с союзом «или» как соединительную хотя бы из тех соображений, что пересечение множеств входит в их объединение.

Долго приходится обучать детей верной формулировке отрицания, особенно если отрицается сложное высказывание да ещё «отягощённое» кванторами. Когда мы с чем-то не согласны, то считаем сказанное предложение неверным. Тогда какое предложение мы считаем верным? Его отрицание. И как его сформулировать? Главный вопрос – где располагать частицу *не* и как от неё при необходимости избавиться?

Возьмём «житейские» примеры. Как выглядят отрицания в следующих ситуациях?

1) Крокодилы живут в Африке;

2) Крокодилы не живут только в Гренландии.

3) Эта кошка пьет только воду.

4) Мои оценки по алгебре и геометрии – четвёрки и пятёрки.

5) Известен анекдотичный случай из американской истории. Некий конгрессмен заявил военному министру, что тот «может украсть всё, что угодно, исключая раскалённую печку». А когда от конгрессмена потребовали опровержения, оно не задержалось: военный министр «может украсть всё, что угодно, включая раскалённую печку».

6) А вот любопытный диалог в суде (из Р.Смаллиана).

« Обвинитель: «Если подсудимый виновен, то у него был сообщник».

Защитник: «Это неверно!»

Ничего хуже защитник сказать не мог. Почему?»

Вот примеры из математики того, что в иных понятиях или утверждениях «упрятано» отрицание: непериодическая функция; последовательность, не имеющая предела (это требуется в известном доказательстве от противного равносильности двух определений предела последовательности); фигура, не являющаяся выпуклой; уравнение, не имеющее единственного натурального корня; отрицание «сидит» даже в определении иррационального числа как такого числа, которое не является рациональным.

Сложно формулировать отрицание предложения, если оно имеет форму конъюнкции, дизъюнкции или импликации. Вы увидите на лицах учеников отсвет недоумения, предложив им сформулировать верное отрицание, например, таких предложений.

1) Число 6 делится на 3 и число 5 делится на 3.

2) Число 5 делится на 3 или число 7 делится на 3.

3) Число 5 делится на 3 либо число 7 делится на 3. (Здесь - разделительная дизъюнкция)

4) Если число 6 делится на 3, то число 5 делится на 3.

5) Данная фигура – квадрат или прямоугольник.

6) Данная фигура – прямоугольник и квадрат.

7) Данная фигура – квадрат либо прямоугольник. (Здесь - разделительная дизъюнкция)

8) Данная фигура – не квадрат и даже не прямоугольник.

9) Данная фигура – не только квадрат или прямоугольник.

10) Данная фигура – только не квадрат или прямоугольник.

11) Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам.

12) Медианы треугольника, пересекаясь, делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.

13) Если функция чётная или нечётная, то ее график симметричен относительно начала координат и относительно оси ординат.

14) Если в четырёхугольнике стороны равны, а диагонали взаимно перпендикулярны, то он является квадратом.

15) Два равновеликих треугольника равны, если они имеют пару соответственно равных сторон.

16) Среди натуральных чисел есть простые и составные.

Уже простейшие эти примеры показывают наличие трудностей при освоении отрицания. Но учитель отрицает постоянно – неверные ответы или решения учеников. Отрицая их, требуется демонстрировать ученикам свои, построенные отрицания и объяснять, почему они построены именно так. Для доказательства от противного надо уметь строить контрапозицию к данной теореме. Без отрицания тут не обойтись.

Возникает соблазн – известным образом формализовать построение отрицания: развесить кванторы и затем обработать их соответствующим образом. Но нужна ли такая формализация, может быть, полезнее добиваться от учеников верного содержательного построения отрицания? А если да — учить манипуляциям с кванторами, то когда это начинать?

Другого типа трудности возникают, когда нам требуется сформулировать теорему, обратную заданной. Несложно это получается разве что в тех случаях, когда в условии и заключении теоремы всего одно утверждение, хотя и тут не всё гладко – об этом дальше. Прямое и обратное утверждение. путают не только ученики, но и мои коллеги. Например, .в газете «Математика» мне попалась следующая «находка». Её автор приводит утверждение «Если сумма коэффициентов квадратного уравнения равна нулю, то один из его корней равен 1». А доказывает его так: подставим в квадратное уравнение вместо переменной число 1 и увидим, что сумма его коэффициентов равна нулю. Вот так!

Ситуация становится запутанной, когда условие или заключение теоремы содержит более одного утверждения. Бывает, что её непросто даже сформулировать. В частности, возникает вопрос, как поступать с разъяснительной частью прямой теоремы при переходе к обратной: оставлять такой же или как-то видоизменять? Как, например, выглядит предложение, обратное теореме «Два перпендикуляра, проведённые к одной плоскости, параллельны»? Или теореме «Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся точкой пересечения пополам»? А о теореме «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.» я прочитал у профессиональных логиков, что она не имеет обратной.

Возьмём теорему «Если прямая касается окружности, то радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен этой прямой.» Аккуратная формулировка обратного предложения выглядит так: «Если радиус, проведённый в точку касания прямой с окружностью, перпендикулярен к этой прямой, то прямая касается окружности», но такая формулировка кажется неудачной. На практике создается другое предложение, близкое по смыслу данному , которое и называют обратным.

Надо подумать, что для нас является дидактической целью. Получить верное предложение, связанное по смыслу с данным, но при этом достаточно вольно обращаться с разъяснительной частью и простыми высказываниями, входящими в формулировку теоремы, а потом назвать полученное верное предложение обратной теоремой? Или же выстроить согласно неким предписаниям структуру обратного предложения и установить, будет ли оно истинным, после чего, возможно, называть его обратной теоремой?

Добавлю к месту ещё несколько замечаний.

- Не для каждого предложения есть обратное. Примеры: утверждение «1 > 0» (дети тут же скажут, что обратным ему будет такое: «0 < 1»); теоремы существования (или не существования); теоремы единственности.
- Фраза «обратная теорема неверна» звучит подозрительно. Теорема – это *доказанное* предложение, а доказанное не может быть неверным. Поэтому лучше говорить «обратное предложение» вместо «обратная теорема» до тех пор, пока не установлена его истинность.
- Никакая теорема не является прямой или обратной *изначально*. Даже теорема Пифагора – обратная к теореме, являющейся следствием теоремы косинуса. Лучше говорить о *взаимно обратных* теоремах, из которых любая может быть названа прямой. Потому (ясный по сути) призыв иных методистов «научить школьников различать прямую и обратную теорему» стоит переформулировать.

Кстати сказать, исторически первой была найдена как раз не теорема Пифагора, сформулированная на «языке площадей», а теорема, позволяющая строить на земле прямые углы (вспомним о египетском треугольнике).

Для создания обратной теоремы обычно советуют ученикам сформулировать исходную теорему, используя союз « если… то». Значит, надо пояснить, что стоит за этим союзом стоит. Это не всё, требуется разъяснить ту часть формулировки теоремы, которая указана или подразумевается перед этим союзом, то есть акцентировать в её формулировке разъяснительную часть теоремы. А в ней всегда присутствуют кванторы.

Приведу примеры. Сначала «житейские» (с их помощью я фиксирую внимание учеников на этом обстоятельстве).

Пример 1. Пусть сказано: «Маша любит кашу». Спрашиваю учеников: это верно или нет? Они пытаются отвечать, но отвечать на такой вопрос бессмысленно, ибо перед нами – предложение с двумя переменными: «Маша» и «каша», а не высказывание.

Сначала надо превратить его высказывание, то есть в предложение без переменных, «навесив» кванторы на «Машу» и на «кашу». Например, можно сформулировать такое предложение: «Любая Маша любит любую кашу». Видимо, это неверно. Другой вариант: «Есть такая Маша и такая каша, что эта Маша любит эту кашу», что, должно быть, верно.

Любопытно, что учителя-гуманитарии заявили мне: ответ на данный вопрос зависит не от каких-то там логических штучек, а от того, кто это говорит.

В математике существует договорённость: если квантора нет, то подразумевается квантор всеобщности. Если эту договорённость перенести на «житейские» примеры, то ответ на поставленный вопрос – «нет». Но надо ли переносить?

Пример 2. Известное выражение «Цель оправдывает средства», как правило, имеет негативный оттенок. Однако если на переменные «цель» и «средства» «навесить» кванторы, то в зависимости от их расстановки возможны четыре варианта толкования. И каждый имеет смысл. А выбор верного варианта – уже вне логики.

Сложилось так, что в формулировках математических предложений кванторы часто «не звучат» в явном виде. Вместо квантора существования употребляются такие слова, как *найдётся* (в круге найдётся хорда, которая делит его площадь пополам) или *есть* (в остроугольном треугольнике есть такая точка, из которой все его стороны видны под равными углами). Ещё хуже обстоят дела с квантором всеобщности, который, как уже отмечалось, опускают. Например, его нет в теореме о площади треугольника (площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту; а сколько таких оснований?) или в формуле квадрата суммы (о каких числах в ней говорится – о любых?).

«Навешивание» кванторов порой необходимо для понимания условия задачи. Вот задача на построение: «Вписать квадрат в треугольник». Как это понимать? Кванторы опущены, значит, на каждую переменную полагается квантор всеобщности. Получается чепуха, а не задача! Любой квадрат не может быть вписан в любой треугольник. Тогда о чём идет речь?

Иногда этих двух кванторов не хватает. Появилось обозначение $\exists!$ в ситуации с существованием одного решения.

Наконец , необходимо рассказывать ученикам о следовании и равносильности – разговор об этом будет чуть далее.

И даже для недвусмысленной записи выкладок и ответа требуется определённая логическая культура .

Я встречал, к примеру, запись $\dfrac{2x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow \varnothing,$ хотя непонятно, как уравнение и множество могут быть равносильными.

Можно увидеть такую запись:

$$AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \text{ определено} \end{cases} \vee \begin{cases} B = 0 \\ B \text{ определено}. \end{cases}$$

В одной строке использованы разные языки: алгебраический, логический и естественный. Мне это не нравится, но так пишут!

. Про ответ в уравнении $x^2 = 1$ Г. Дорофеев полагает, что его можно записать так: «$x = 1$ и $x = -1$», но можно и так: «$x = 1$ или $x = -1$». Тем самым смазано различие в этих союзах в математическом тексте, что сомнительно.

По ходу дела маленькое замечание про запись ответа. Ответ в уравнении, я полагаю, естественно записывать в «том же стиле», в каком было дано оно само. Например, ответ в уравнении $2x = 4$ я предпочту записать так: $x = 2$, нежели в виде $\{2\}$ или $x \in \{2\}$. Запись ответа в виде множества, разумеется, возможна. Однако она менее естественна и чревата сложностями, особенно когда речь идёт об ответе в тригонометрическом уравнении или неравенстве.

Для точности мышления необходима *точность языка*. Точность естественного языка не всегда достаточна, слова и фразы не всегда толкуются однозначно, огромную роль играет контекст.

Суть проблемы в том, что математический текст излагается детям на естественном языке, и требуемая точность понимания математического текста «зависает» из-за неоднозначности толкования фраз естественного языка. Поэтому необходимы чёткие договорённости. Где же их взять? Разве что позаимствовать у формальной или математической логики. Курс информатики только заостряет проблему. Как без использования основ математической логики объяснить ученикам компьютерную идеологию?

К этому можно добавить такое соображение. Один из важных этапов познания – *понимание*. Понимание предложения, в том числе и математического, предполагает оценку истинности не только самого предложения, но и его отрицания, его обращения (обратного предложения) и контрапозиции (предложения, противоположного обратному). Без осознания структуры предложения невозможно грамотно построить ни его отрицание, ни обращение, ни контрапозицию. Их формулировки получить не всегда просто: необходимо уметь отличать предложение без переменных (высказывание) от предложения с переменными (предиката), выделять переменные и устанавливать на них ограничения, «развешивать» (где необходимо) кванторы и вычленять логические операции. Ещё запутаннее становится ситуация, когда мы используем такие слова, как *некоторые, только, не только* и т.п.

Итак, для формирования логической культуры почти необходима некоторая доля формализации. Естественно считать, что таковая обеспечивается начальными сведениями из формальной и математической логики.

Прежде чем говорить о толковании математических предложений в форме высказываний, надо обратить внимание учеников на то, что предложение с переменной превращается в предложение без переменной в результате «навешивания» на последнюю **квантора** (всеобщности или существования), после чего уже можно говорить о его истинности или ложности.

Техника работы с кванторами позволяет упростить формулирование отрицания: можно уже не напрягать умственные способности, а работать чуть ли не механически. Вспомним определение последовательности, не имеющей предела, или функции, не являющейся периодической – после формальной работы с кванторами остаётся только воспроизвести увиденное..

В работе с кванторами требуется соблюдать осторожность. Квантор всеобщности и квантор существования в предложении с двумя переменными нельзя произвольно менять местами (ученики довольно часто допускают такую ошибку).

Например, утверждать, что существует квадрат, который можно вписать в любой треугольник, – глупость. А сказать, что какой бы ни был треугольник, существует квадрат, который в него можно вписать, – значит фактически сформулировать задачу на построение.

Приведу ещё один пример. Высказывание, записанное символически: $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ не равносильно высказыванию, представленному в символической форме $(\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$.

Замечу, что термин «любой» оказывается на деле почему-то менее предпочтителен, чем термин «каждый» или «всякий». Видимо, все дело в языке и психологии. Термин «любой» не всегда толкуется в обыденной речи, как в математике, и это мешает ясному пониманию высказываний, в которых используется квантор всеобщности. В работе с квантором $\forall x$ чёткое понимание достигается быстрее, если его читать как «для каждого *x*».

Перейдём к логическим союзам. В математическом тексте союз «и» между двумя предложениями трактуется как их **конъюнкция**, а посему предполагает совместное рассмотрение двух условий, например: если для параллелограмма существует описанная и вписанная окружность, то он является квадратом.

В свою очередь союз «или» между двумя предложениями трактуется как их **дизъюнкция**:

– *нестрогая*, если допускается одновременное выполнение двух условий. Употребляем «или», например, в предложении « около треугольника или правильного многоугольника можно описать окружность»

– *строгая*, если выполняется только одно из условий. Говорим «либо», например, в предложении « прямые, не имеющие общей точки, параллельны либо скрещиваются».

Замечу, что в математическом языке нет надобности в повторяющихся союзах естественного языка: *и – и* («И Вася, и Федя – оба подойдите ко мне!»), а также *либо – либо* (кто-то один: либо Вася, либо Федя). Когда такие союзы встречаются в математическом тексте, приходится уточнять их значение.

Толкование союза «если» в живом языке и в математике опять-таки различно. В обычном языке за ним может скрываться как достаточность («Родители отпустят меня на футбольный матч, если я получу за контрольную «пятёрку»), так и равносильность (Футбольная команда выиграла матч, если забила больше мячей в ворота соперника), а в математике – только достаточность. Но есть языковая проблема.

Равносильности в математике соответствует союз «если и только если» (он не прижился в русском языке, обычно говорят «тогда и только тогда, когда»), который частенько опускают, предпочитая оставлять «если». И что получается? Типичный пример – в определениях : «прямая параллельна плоскости, если она не имеет с этой плоскостью общих точек». Приходится объяснять ученикам, что за этим «если» скрываются два утверждения – прямое и обратное. В других ситуациях , в теоремах, «если» означает только достаточность. Например, «Если треугольник прямоугольный, то квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов двух других его сторон.»

Итак, благодаря формальной логике можно добиться точности в употреблении союзов. Но, увы, внедрение формальной логики может внести (и вносит) некую сумятицу в молодых умах.

Я поведу сейчас речь о союзе *если … то*, о следовании предложений, об импликации, будь она неладна. Начну с последней.

Напомню, что **импликация** двух суждений имеет вид «если p, то q». Она ложна только в одном случае: когда p истинно, а q ложно, и истинна в остальных случаях.

Ученикам всегда приходится специально пояснять истинность импликации при ложной посылке (условии, антецеденте). История с импликацией давняя. Ещё Филон Мегарский (III в. до н.э.) «определил условное предложение как такое предложение, которое ложно тогда и только тогда, когда его антецедент (условие) истинен, а консеквент (заключение) ложен, и которое истинно в трёх остальных случаях. Это определение положило начало спорам о смысле импликации. Должно быть, споры по этому вопросу были очень оживлёнными, коль скоро Каллимах, библиотекарь в Александрии, во втором веке до н.э. увековечил их в эпиграмме: “Уже вороны на крыше каркают, какая же импликация правильная”» .

Со времён древних греков не счесть работ по логике, в которых так или иначе не обсуждался бы этот феномен. Но и по сей день истинность импликации при ложной посылке подвергается сомнению. Даже предлагается в этом случае считать ее неопределённой или вовсе бессмысленной .

В парадоксальной форме это толкование импликации подается в виде известной фразы: «Если $2 \times 2 = 5$, то существуют ведьмы». Такое «странное» соглашение об импликации требуется как-то пояснить ученикам. Раньше рассуждали, например, так. Суждение «если A, то B» означает, что «если нет A, то нет и B». Но если A вообще нет, то B тем более нет .

Ученикам я иллюстрирую истинность импликации при ложной посылке на примерах. Говорю фразу: «Если у меня есть свободное время, то я гуляю». А затем спрашиваю: «В каком случае я вас обманул?» Ответ ясен: когда свободное время было, а гулять я не пошёл. Во всех прочих случаях я не обманывал, т.е. говорил правду. Любопытен и такой пример. Скажем: «Если сегодня среда, то завтра четверг» и зададимся вопросом – в какой день недели это высказывание верно? Ясно, что в любой. Не только в среду, а, к примеру, во вторник, т.е. тогда, когда условие ложно.

Импликация – это «полбеды». «Беда» поджидает нас дальше, когда мы начинаем разговор об отношении следования и произносим «из A следует B» или «ещё хуже» – «если A, то B», приплетая сюда терминологию импликации.

В обычной речи следование подразумевает наличие причинно-следственной связи (из того, что идёт дождь, следует, что улицы мокрые), логической связи (из того, что Сократ – человек, следует, что он смертен, ибо все люди смертны), содержательной связи (следствия из формул). Тем самым, на практике из ложного условия не может следовать верное предложение.

Но если отношение следования имеет форму импликации, что происходит при использовании союза «если … то», то ситуация запутывается. А когда ещё говорят нечто эпатирующее, вроде «изо лжи следует всё, что угодно», в головах учеников наступает окончательное помутнение.

В формальной логике ситуация такова. На множестве высказываний **отношение следования** («из A следует B», «A влечёт B») означает, что импликация «если A, то B» верна при условии истинности A. При ложности A сказать «из A следует B» просто невозможно – не тот случай. Иначе говоря, изо лжи ничего не следует. Можно сказать: «Если $2 \times 2 = 5$, то существуют ведьмы», но я бы не сказал: «Из того, что $2 \times 2 = 5$ *следует*, что существуют ведьмы». Я могу сказать: «Если $0 = 1$, то $1 = 2$», но язык не повернётся сказать: «Из того, что $0 = 1$ *следует*, что $1 = 2$». (У некоторых моих весьма компетентных знакомых – повернётся.)

Мне хочется упомянуть один пример В.Арнольда . В нём приводится следующее определение импликации из французского учебника для математиков: «Пусть A и B – два любых утверждения. Если они оба верны, то говорят, что из A вытекает B». Далее В.Арнольд пишет: «После таких «импликаций» учить студентов каким бы то ни было естественным наукам бессмысленно: они думают, что из того, что дважды два четыре, «вытекает», что Земля вращается вокруг Солнца».

Чтобы различать импликацию и следование, в формальной логике для импликации часто употребляется не союз «если … то», не глагол «следует», а глагол «имплицирует». Скажем так: «Равенство $2 \times 2 = 5$ *имплицирует* существование ведьм». Будь такой оборот принят повсеместно, вряд ли кто-то стал бы удивляться, и вороны в Древней Греции не каркали бы. Но ни в обыденной речи, ни в школьной математике термина «имплицирует» нет, да и вряд ли он привьётся – по иррациональным соображениям.

И с обозначениями можно напутать. Знаки импликации (чаще всего $\to$) и следования (чаще всего $\Rightarrow$) не равноправны, а потому их употребление требует точности. Здесь имеется несколько заморочек. Одна из них такова: знак $\Rightarrow$ у некоторых авторов означает импликацию, а для следования используется знак $\supset$ или $\models$. Хорошо бы чётко определить, каково употребление в школьной математике не только слов «если…, то», «следует», но и знаков $\to$, $\Rightarrow$. Однако этого, увы, нет.

Приведу примеры того, как путаница в терминологии и обозначениях сказывается на решении уравнений, неравенств, систем (дальше я для краткости буду говорить только об уравнениях), если трактовать их как предикаты.

Такая точка зрения очень четко выражена А. Земляковым:«В действительности алгебраические задачи с переменными относятся к математической логике, и в ней они называются предложениями с переменными. Например, уравнение можно определить как предложение, имеющее вид равенства между двумя выражениями (содержащими переменные)». И далее дается такое определение уравнения: «…уравнением с переменной x называется предложение, имеющее вид равенства между двумя выражениями, содержащими эту переменную». (В это определение не вписывается, например, равенство $x^2 = 1$, но сейчас речь не об этом.)

При решении уравнений авторы многих пособий при переходе от имеющегося уравнения к следующему как выводному (не равносильному) говорят, что второе уравнение есть следствие первого, и ставят знак $\Rightarrow$.

По существу происходит отказ от импликации предикатов, речь идет об их следовании, по сути – об отношении включения между двумя множествами. Однако при решении уравнения не исключен случай отсутствия корней. Я вижу здесь некое противоречие: из ложной посылки не бывает следствий, однако пустое множество включено в любое множество. Так что, в этом случае возвращаться к толкованию процесса решения уравнения как к импликации предикатов?

Есть два выхода из положения. Первый – формальный: трактовать уравнение как предикат и ставить между уравнениями знак импликации $(\rightarrow)$. Второй вариант – не рассматривать уравнение как предикат, считать, что оно предполагает некий императив. (Само по себе равенство $x = x + 1$ можно полагать бессодержательным. Мало ли что пишут, не сказав, что делать дальше. Поэтому, рассматривая уравнение, говорят: «решить», «найти x».) При этом надо оговорить, что термин «следует» («следствие») при решении уравнений означает не то же самое, что в логике из-за возможного случая отсутствия решения исходного уравнения. Мне больше нравится второй вариант.

(Этот разговор с соответствующими поправками переносится на равносильность и использование знака $\Leftrightarrow$.)

Второй момент, когда приходится обсуждать с учениками расхождение формального и содержательного, возникает при встрече с задачей, условие которой противоречиво. Тут я подробности опускаю, ибо об этом говорил выше.

Внедрение формальной логики в математическое образование полезно, но следует соблюдать разумные границы. Надо хорошо понимать, что введение её чревато некими методическими проблемами, ибо она не вполне согласуется как с математическим, так и с естественным языком. Если я говорю: «2 + 2 равно 4 или 5», то это верно с точки зрения логики, но неверно в житейском понимании.

Демонстрируя преимущества использования формальной логики, не стоит забывать о том, что в ней есть свои проблемы.

Существуют предложения, которые противоречат сами себе, например, знаменитое : «Я лгу», а также «Никогда не слушайте чужих советов!» и т.п.

С помощью двух предложений можно доказать всё, что угодно. Вот пример из Р.Смаллиана.

На листе бумаги записываем предложения:

1. Астрология – точная наука.

2. Оба предложения на этом листе – ложные.

Поразмышляв, «получаем», что «астрология – точная наука».

Известны логические парадоксы из древности (парадокс лжеца) и последних времен (парадокс Рассела, парадокс Ришара, парадокс Берри, парадокс Греллинга). Их обсуждению посвящена обширная литература.

Возможности формальной логики в установлении истинности не беспредельны, даже если все суждения достаточно чётки. Мы знаем, конечно, что она может выручить в сконструированных специальным образом задачах, когда требуется установить, кто лжёт, а кто говорит правду. Но из двух простеньких суждений: «Вася говорит, что Федя лжёт» и «Федя говорит, что Вася лжёт» средствами формальной логики не установить, кто из ребят говорит правду (пример Ж.Буридана).

Вообще, формальный ригоризм в школьном курсе вряд ли уместен. Нет вреда в том, что иногда для удобства приходится переходить на некоторое арго.

Более того, иногда логика бывает даже не в ладах с математикой. Так, в логике различают доказательство *приведением к абсурду* и доказательство *от противного*. Математики называют доказательством от противного рассуждение, основанное на контрапозиции, и не обращают на существующую разницу никакого внимания.

Полагаю, что не стоит здесь вдаваться в различие между двумя этими толкованиями, хотя в дидактической литературе уже предлагают это сделать. Практичнее остановиться на ясной позиции, именно: для доказательства теоремы $A \to B$ предполагают истинным высказывание $\overline{B}$ и пытаются вывести отсюда справедливость высказывания $\overline{B} \to \overline{A}$; если это удаётся (т.е. если доказана теорема $\overline{B} \to \overline{A}$, противоположная обратной), то исходная теорема $A \to B$ также считается доказанной.

Различие между логикой и математикой в этой нестыковке я понимаю так. В школьном курсе математики предложения в основном доказывают, почти никогда не опровергают, очень редко исследуют (раньше исследование встречалось гораздо чаще – в задачах на построение, в решении уравнений с параметром). Для того чтобы опровергнуть математическое предложение, достаточно получить такое его следствие, которое противоречит чему-то известному или данному в условии. Опровержение математического предложения может состоять в доказательстве предложения, являющегося его отрицанием, – косвенном доказательстве (замечу, что косвенные доказательства невозможны в юридической практике: работает так называемая презумпция невиновности). В таком случае говорим, что мы доказали «от противного».

В задачах исследовательского характера мы изначально не знаем, с каким предложением имеем дело: истинным или ложным. Начинаем получать из него следствия. Если приходим к противоречию, то исходное предложение является ложным. При этом можно считать, что попутно мы доказали (косвенно) предложение, являющееся отрицанием данного. В неявном виде здесь «упрятан» закон исключённого третьего, абсолютная применимость которого принимается не всеми математиками.

Наконец, символическая логика не всегда удобна в работе. Если для работы с компьютером она годится всегда, то при работе с людьми иногда стоит предпочесть более наглядные соображения.

Разумеется, сюда можно отнести работу с кругами Эйлера (по моему разумению их корректное использование является доказательным.

Следующий полезный шаг в деле внедрения логики в школьный курс математики – знакомство учеников с **таблицами истинности**, несложный формализм которых позволяет избежать многих натужных выводов. Так, в некоторых задачах проверку выполнимости следования можно свести к формальной проверке истинности импликации при условии, что условие истинно.

Пример 1. Даны утверждения.

1. Если многоугольник является треугольником или правильным многоугольником, то около него можно описать окружность.

2. Около многоугольника M можно описать окружность.

3. Многоугольник M – не треугольник.

Следует ли из этих трех утверждений, что M – правильный многоугольник?

Пример 2. Имеются утверждения.

1. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

2. Если в параллелограмме диагонали не перпендикулярны, то он не является ромбом.

Следует ли второе утверждение из первого?

А вот любопытная задача о раках.

Пример 3. Я нашёл его в превосходной книге Я. Хургина « Ну и что?» Известно, что:

1. Если рак красный и варёный, то он мёртвый.

2. Если рак красный и мёртвый, то он варёный.

Следует ли из этого, что варёный и мёртвый рак – красный?

Разумеется, в этих примерах возможны разные способы получения результата, но работа с таблицами истинности почти алгоритмична.

Я не знаю, как достаточно просто убедить учеников в логическом законе контрапозиции, о котором упоминал выше. На основе таблиц истинности он выводится моментально. Но довелось мне увидеть, как закон контрапозиции доказывается от противного , что некорректно. Следуя методе, принятой в этих «доказательствах», можно «доказать», что если верно некое высказывание, то верно и ему обратное . Корректно как раз наоборот: метод доказательства от противного обоснован ссылкой на логический закон контрапозиции.

Приведу пример того, как работа с таблицами истинности позволяет откорректировать вольницу, которая иногда встречается.

Пусть мы имеем запись

$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r,$$

в которой указано на равносильность трёх высказываний (или предикатов), $\leftrightarrow$ – знак операции эквивалентности на множестве высказываний. Так как в данной записи скобки опущены, естественно предположить ассоциативность этой операции. Так и есть: проверка по таблицам истинности показывает совпадение значений истинности высказываний

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \text{ и } p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r).$$

Итак, скобки в такой записи опускать можно.

Однако на практике исходная запись может быть воспринята как конъюнкция двух высказываний:

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r).$$

Таблицы истинности покажут нам, что такое толкование не соответствует истине: высказывания

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \text{ и } p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

имеют несовпадающие значения истинности.

Перейдём к школьной практике. Трактуя уравнение как предикат, мы можем написать

$$x^2 = 1 \leftrightarrow |x| = 1 \leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

(без всяких скобок). Но, произнося эту строчку вслух, не стоит употреблять союз *и*. Иначе говоря, произносить фразу: «Из того, что уравнение $x^2 = 1$ равносильно уравнению $|x| = 1$ *и* уравнение $|x| = 1$ равносильно совокупности $x = 1 \vee x = -1$ получается, что корнями данного уравнения являются числа 1 или –1». Мы здесь грешим против точности.

Дальнейшим шагом на пути внедрения логики в курс математики может стать ознакомление школьников с основами **булевой алгебры** . С её помощью можно быстро справиться со многими логическими задачами несложными чисто техническими средствами.

Применение булевой алгебры к контактным схемам служит убедительной иллюстрацией полезности математической логики. (Разве мог предположить такое сам Д. Буль?) На детей производит огромное впечатление, что возня с абстрактными символами позволяет решать конкретные задачи об электрических цепях. Одна из таких задач «висела» у меня дома. В коридоре была лампочка, а при ней были два выключателя, на каждом — две кнопки. Нажатие любой кнопки на любом выключателе приводило к смене состояния лампочки: если она горела, то после нажатия гасла, и напротив. Вопрос: какова соответствующая электрическая схема? Поднаторевшие мальчишки решали эту задачу безо всякой там алгебры логики, но тем интереснее было получить результат от тех, кто ни разу не возился с проводами.

И прекрасным примером тому, как нечто написанное математиком «из головы» спустя много лет находит применение в других науках и сферах человеческой деятельности: в информатике и в разработке компьютерных технологий, в криптологии. Оказалось, что её можно использовать также в теории множеств и теории вероятностей.

Особый разговор поведу об **обратной теореме**. Мы, практически никогда не задумываясь, считаем, что высказывание, обратное высказыванию $p \to q$, выглядит так: $q \to p$. Однако не всё просто даже с предложением, условие и заключение которого содержит одно (без логических союзов) высказывание.

Рассмотрим дизъюнкцию двух импликаций в общем виде:

$$(p \to q) \vee (q \to p).$$

Проверка по таблицам истинности показывает, что она истинна, тогда хотя бы одно из высказываний должно быть истинно. Но мы знаем, что это не обязательно так: и прямое, и обратное предложения могут быть ложными.

Этот пример показывает сложности формализации. Необходим более серьёзный анализ процедуры *обращения* высказывания. В частности, при формулировке теоремы необходима разъяснительная часть, в которой «развешены» кванторы.

Например, теоремы вида

$$p \to (q \to r) \text{ и } (p \wedge q) \to r$$

равносильны, но обратные им теоремы

$$(q \to r) \to p \text{ и } r \to (p \wedge q),$$

полученные по стандартной схеме, – нет. И какую же из последних двух теорем мы будем считать обратной? А может и вовсе никакую: сделаем осмысленную перекомпоновку из простых высказываний данного предложения, которая приведёт нас к верному предложению, и именно его назовем обратной теоремой?

Итак, я не вижу бесспорного алгоритма или даже правила для создания обратного предложения. Поэтому говорить об обратной теореме как о полученной из прямой теоремы одной лишь перестановкой условия и заключения сомнительно. А может быть даже не разумно. Увы, мне не раз приходилось читать об этом в методической литературе, сталкиваться с тем, что в формулировке исходной теоремы игнорируются разъяснительная часть, семантика и акценты в расстановке союзов.

- Говоря об обратных предложениях, следует объяснить ученикам, в чём состоит *доказательство исключением* (теорема Гаубера, названная по имени немецкого математика), чтобы не доказывать обратные предложения каждый раз, когда можно дать одну только ссылку. Приведу теорему Гаубера (в усиленной форме). Пусть имеется система нескольких предложений вида $A_i \Rightarrow B_i$. Если предложения A_i и B_i содержат перебор всех возможностей, то верны и обратные предложения вида $B_i \Rightarrow A_i$. Такова схема, к примеру, когда мы рассматриваем зависимости между длинами наклонных и их проекций; видом треугольника и соотношением квадратов длин его сторон и т.д.

Сделаю несколько заключительных замечаний.

- И формальная, и математическая логика – это модели логики практической. А модель *не абсолютно* копирует реальный объект. Например, человек может «полагать», «предполагать», «надеяться», «верить», «думать» , «рассчитывать» и т. д. То есть, говоря об одном и том же событии, можно построить такие фразы, как: «Я полагаю, что…», «Я предполагаю, что…», «Я надеюсь, что…», «Я верю, что…», «Я думаю, что…», «Я расчитываю, что…». Оттенки очевидны и вряд ли формализуемы.

- Внедрение формальной и математической логики в школьный курс математики оправдано. Таких явных оправданий несколько.

1. Она способствует росту логической культуры школьника.
2. Она может помочь точному языку там, где это необходимо: в документах, юридических ситуациях, в ответственном разговоре
3. Она может помочь в усвоении математических предложений.
4. Она необходима для уяснения основ информатики.
5. Она эффективно работает в целом классе задач логического характера.
6. Она демонстрирует удивительную способность интеллекта – применять математические знания, в совершенно другой области, например в технике.
7. Работа с предикатами естественно увязана с основными понятиями теории множеств, без которых нынешнее математическое образование выглядит странно.
8. Сама идея – свести умозаключения к формальным алгебраическим выкладкам и её осуществление не могут не вызывать восхищение.
9. Ученикам должна быть понятна неэквивалентность формальной логики и «житейской». Проще всего показывать эту разницу на примерах. Вот один из них. Возьмем два простых и верных высказывания. 1. Если температура у человека повышается, то он потеет. 2. Если человек потеет, то его температура понижается. Формально конъюнкция верных высказываний верна, но что получается? А вот что: «Если температура человека повышается, то она у него понижается». Ничего себе, следствие!

В этой связи интересно обсудить такую ситуацию. Пусть задана система двух уравнений с одной переменной:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases},$$

Из неё (сложив и разделив полученное равенство пополам) получаем, что $x = 3$. Формально всё верно: из ложного утверждения следует всё что угодно.

Любопытно, что если от точного знака равенства перейти в этих записях к приближённому, то получится вполне содержательный результат — среднее арифметическое двух измерений. Более того, именно по такому принципу мы порой выставляем отметки школьнику.

10.Вместе с тем, формальная и математическая логика не всегда применима на практике, иногда попросту неуместна и даже нелепа; она может только помочь человеку избежать явных логических ляпов. Надо хорошо понимать, насколько оправдано её применение в каждом конкретном случае.

11. Такие расхожие словечки, как «нужно», «надо», «можно», попавшие из житейской практики в математику, также требуют чёткого формального истолкования. А ещё лучше употреблять их пореже.

12. Тут же уместно сказать об употреблении логической символики; это стало достаточно привычным, но, увы, иногда делается неряшливо.

Ученикам надо объяснить, что знаки символической логики – это не знаки стенографии и в серьёзной работе как таковые недопустимы (учащиеся особенно любят использовать в таком качестве кванторы).

Всему этому стоит учить.

II.13 СОРИТЫ Л. Кэррола

Хорошо известны занимательные задачи —- совершенно вроде бы не из математики —типа «Как зовут машиниста?». Огромный мир таких задач открывается в популярных книгах. Среди авторов этих книг особо отмечу Л. Кэрролла и Р. Смаллиана.

Первый поразил меня своими соритами — вот пример: «Все разумные люди ходят на ногах. Все неразумные люди ходят на руках». Следует ли из этого хоть что-нибудь, а если следует, то что?

Второй — чрезвычайной изощрённостью в логических построениях — чего стоит его способ доказательства любого (!) утверждения (этот пример я приводил выше) .

Занятна и задача о раках, упомянутая выше: «Все красные и мёртвые раки — варёные, а все красные и варёные раки — мёртвые. Следует ли из этого, что все мёртвые и варёные раки — красные?»

Решать столь занятные задачи «чистым рассуждением», однако, не очень весело, ибо весьма непросто даже удерживать в голове этакие умозаключения, а уж манипулировать ими тем более. Стоит при этом добавить, что число исходных утверждений может быть не два, а больше, у Л.Кэрролла есть сориты с десятью исходными посылками.

Нельзя ли действовать как-то иначе? Оказывается, можно.

Один из способов — с помощью символической логики. Способ длинный и скучноват для таких занимательных задач.

Другой способ состоит в том, чтобы рисовать круги Эйлера. Всегда приятно увидеть ответ в трудной задаче, всего лишь внимательно рассматривая некие картинки, но если этих кругов много, то удовольствие пропадает.

Нечто подобное предложил и сам Л.Кэрролл: его способ также основан на картинках, причем разноцветных,— об этом можно прочитать в его книгах.

Я предложу ещё один способ решения соритов — с помощью кругов, полукругов и стрелок между ними. Результат будет получаться из картинок, причём напоминать они будут фигуры, которые называются графами. Кажется, что такой способ ещё не предлагался — и похоже, что он попроще. Исходную идею этого способа предложил Б. Кулик, петербургский специалист по искусственному интеллекту.

Для начала немного логики. Общие суждения про объекты и их логические связи делятся на два вида: утвердительные и отрицательные. Каждое из них является либо истинным, либо ложным.

Примеры общих утвердительных суждений:

1. Всякое положительное число больше отрицательного — истинное суждение.
2. Любой ромб является квадратом — ложное суждение.
3. Каждая блямба имеет финтифлюшку (при произвольном понимании оных) — пример общеутвердительного суждения, которое мы сами можем считать либо истинным, либо ложным.

Разговор о блямбах и финтифлюшках не такой уж бессмысленный, как может показаться. Мы ведь не всегда понимаем точный смысл того, о чём говорится, а иногда и вовсе не понимаем. Но даже в этом случае, как учит логика, мы можем делать разумные заключения об истинности или ложности полученных суждений. Говоря проще, иногда возможно установить, прав человек в своих выводах или не прав, даже ничего в них не понимая, но только следя за логическими конструкциями в его речи.

В языке общеутвердительное суждение может передаваться самыми разными словесными оборотами, но суть одна: в нём говорится о том, что всякий (любой, каждый) рассматриваемый объект обладает некоторым свойством. Или чуть иначе: всякий объект, обладающий свойством *A* (т. е. рассматриваемый нами), обладает и свойством *B*. Общий вид таких суждений: все *A* есть *B*. Условимся записывать это так: $A \to B$, а рисовать так (рис. 24):

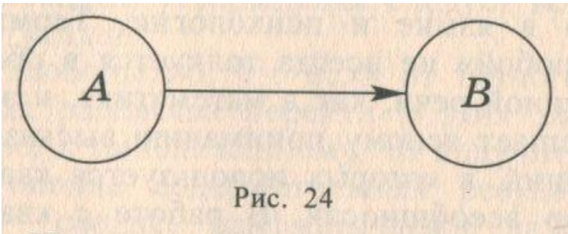


Рис. 24

Примеры общих отрицательных суждений:

1. Всякое положительное число не может быть меньше своего модуля — истинное суждение.
2. Ни один квадрат не является ромбом — ложное суждение.
3. Какую блямбу ни взять, ни у одной из них не бывает финтифлюшки — мы сами можем считать это суждение либо истинным, либо ложным.

Опять же слова для выражения отрицания могут быть разными, но суть одна: в общем отрицательном суждении говорится о том, что всякий рассматриваемый объект не обладает некоторым свойством.

Чуть иначе: всякий объект, обладающий свойством *A*, не обладает свойством *B* (обладает свойством не *B*). Общий вид таких суждений: все *A* не есть *B* (есть не *B*). Записывать это мы будем так: $A \to \overline{B}$ а рисовать так (рис. 25):

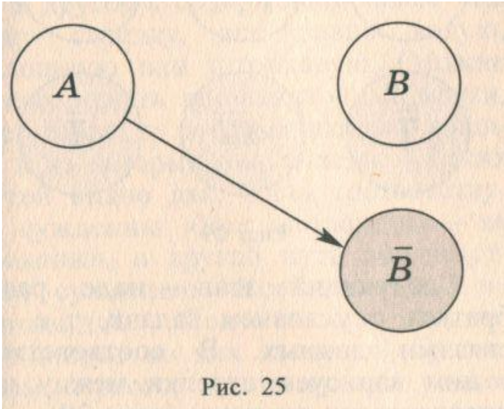


Рис. 25

Множества *B* и не *B* (*A* и не *A* — название множества не принципиально) назовем дополнительными.

Надо ещё заметить, что и здесь, и в дальнейшем полагаем про любой рассматриваемый объект следующее: либо он обладает некоторым свойством, либо не обладает им.

Далее понадобятся два важных утверждения про общие суждения. Будем называть их в дальнейшем тексте «правилами разыгрывания сюжета».

1. Из двух суждений «Все *A* есть *B*» и «Все *B* есть С» следует, что «Все *A* есть С». Это правило будем называть **первым правилом достижимости** (из *A* мы «достигли» *C*).
2. Суждения «Все *A* есть *B*» и «Все не *B* есть не *A*» равносильны, т. е. означают одну и ту же мысль. Это правило будем называть **первым правилом обращения**.

Истинность этих двух правил легко проверить на кругах Эйлера или исходя из здравого смысла. На конкретных примерах они становятся совсем очевидными.

(Вот пример из предыдущего текста. Как выглядит высказывание равносильное такому: «Кто не рискует, тот не пьёт шампанское». Ответ: «Кто пьёт шампанское, тот рискует».)

На картинках, которые мы будем рисовать, эти правила разыгрывания сюжета породят некую динамику. Как она получится? А вот как.

Если на нашей картинке с помощью кругов и стрелок будут изображены два следования, соответствующие суждениям «Все *A* есть *B*» и «Все *B* есть С», то согласно первому правилу достижимости мы тут же будем рисовать новую стрелку от круга *A* до круга *C*, только уже штриховую (чтобы не путать ее с исходными стрелками, заданными условием). Вот так (рис. 26):

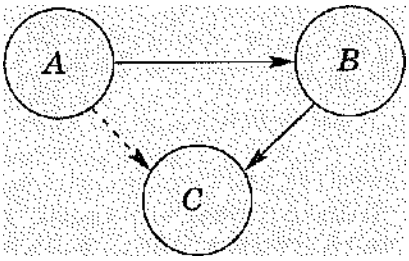


Рис. 26

Если на нашей картинке с помощью кругов и стрелки будет изображено следование, соответствующее суждению «Все *A* есть *B*», то мы тут же нарисуем ещё два круга, обозначим их (с помощью чёрточек сверху) как не *A* и не *B,* выделим их цветом и согласно правилу обращения нарисуем новую (штриховую) стрелку от круга не *B* до круга не *A.* Выглядеть это будет так (рис. 27):

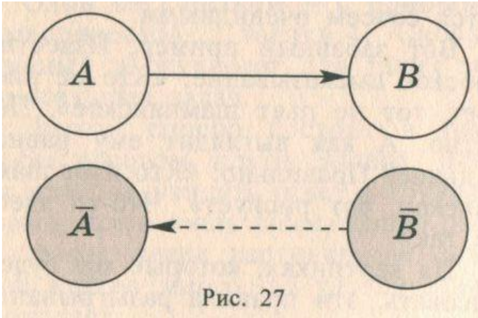


Рис. 27

Иногда нам будет встречаться суждение «Все *A* есть не *B».* Правило обращения приводит нас в этом случае к суждению «Все *B* есть не *A».* Для этого надо учесть, что не (не *B)* есть просто *B.*

Картинка к этому получится такая (рис. 28):

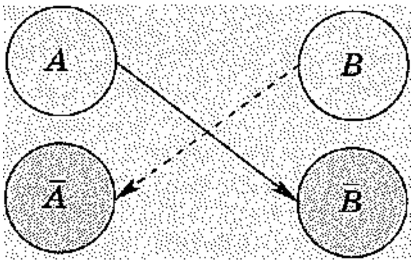


Рис. 28

Перейдём теперь к самым простеньким задачам. Пусть первой из них будет такая задача Кэрролла: «Все драконы не лукавые. Все шотландцы лукавые». Что же следует из этих двух суждений?

Сначала разберёмся с тем, что в задаче дано. Будем называть объекты, о которых идет речь, «действующими лицами» (далее без кавычек). Список действующих лиц в этой задаче выглядит так:

Д — драконы.

Ш— шотландцы.

Л — лукавые.

Заметим, что множества *A* и не *A* мы будем в первых задачах включать в рисунок сразу же, как только упомянуто хотя бы одно из них.

Теперь нарисуем эти множества и дополнительные к ним в виде кругов — вот так (рис. 29):

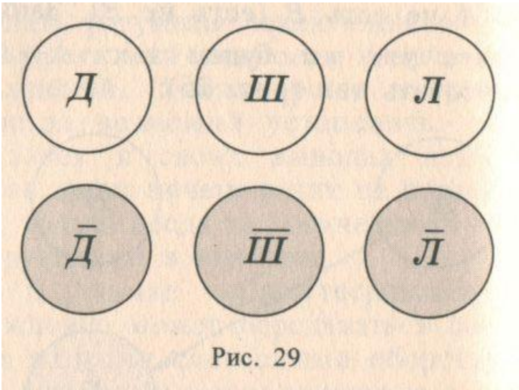


Рис.29

Следующий этап — надо разобраться с условием задачи, т. е. со связями данных. В соответствии с ним нарисуем стрелки между нарисованными кругами (рис. 30).

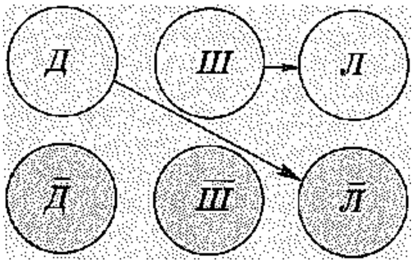


Рис. 30

Затем перейдём к «разыгрыванию сюжета», или, короче, к сюжету, т. е. начнем рисовать штриховые стрелки между нарисованными кругами согласно правилам достижимости и обращения. Получим такую картинку (рис. 31):

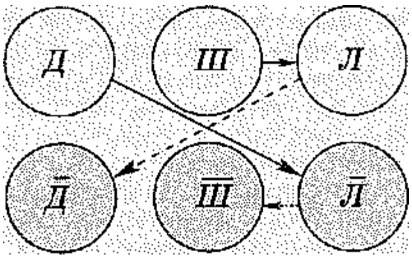


Рис. 31

И всё. Осталось только истолковать то, что у нас перед глазами. Для этого найдем «путь» (далее мы будем убирать кавычки с этого термина) от одного нарисованного круга к другому, содержащий более чем одну стрелку, все равно какую, сплошную или штриховую. (Можно иначе: искать промежуточные круги, т. е. такие, в которые входит стрелка и из которых она выходит.) Таких путей видно два. Один соответствует суждению «Все шотландцы — не драконы», а другой путь соответствует суждению «Все драконы — не шотландцы». Мы видим, что второе из них является обращением первого, а потому они равносильны. Но тогда одно из них (любое) мы можем опустить из списка следствий, ибо оно получается «даром». Окончательное следование в наиболее «кэрролловском», как нам кажется, духе выглядит так: «Все драконы — не шотландцы».

Ещё один пример из Кэрролла, но уже с некоторыми тонкостями и чуть быстрее. «Сахар — сладкий. Соль — несладкая». Что из этого следует?

Список действующих лиц выглядит так:

Сах — сахар.

С — соль.

СВ — сладкое вещество.

Нарисуем данные множества (и дополнительные к ним) в виде кругов и стрелки между ними согласно условию — вот так (рис. 32):

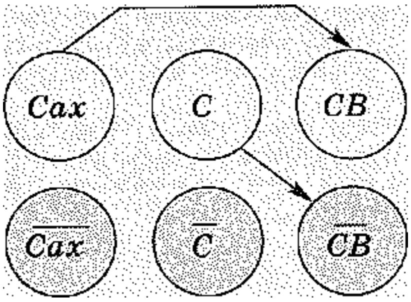


Рис. 32

Теперь начнём разыгрывать сюжет, т. е. рисовать новые стрелки в соответствии с правилами достижимости и обращения,— вот так (рис. 33):

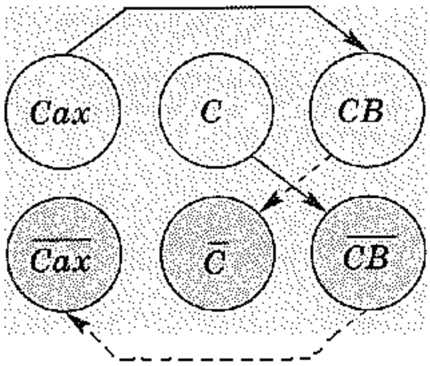


Рис. 33

Посмотрим, что у нас получилось. Как и предполагалось, вывод таков: сахар —не соль. Но дело здесь не в конечном результате, который ясен всем, а в том, что он вытекает из двух данных суждений как бы сам по себе, т. е. чисто логически, без ссылки на какой-либо личный вкусовой опыт.

Ну, наконец, перейдём к тому примеру из Кэрролла, который приведён в самом начале,— о разумных и неразумных людях. Теперь уже совсем быстро.

Р — разумные люди.

Н — люди, ходящие на ногах.

Полагаем при этом, что все люди на Земле разумны либо нет и ходят на ногах либо на руках (т. е. не на ногах).

Нарисуем теперь эти множества в виде кругов и в соответствии с условием задачи нарисуем стрелки — вот так (рис. 34).

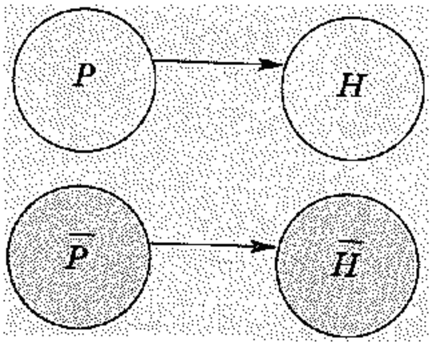


Рис. 34

Согласно сюжету рисуем новые стрелки между имеющимися кругами — вот так (рис. 35):

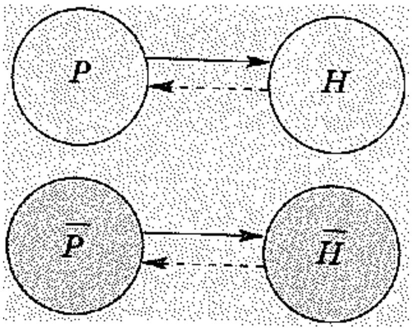


Рис. 35

Теперь рассмотрим полученную картинку и увидим путь из *P* обратно в *P*, ведущий через *H*. Что это означает?

Подробно это означает вот что: все объекты со свойством *P* обладают свойством *H*, а все объекты со свойством *H* обладают свойством *P*. Сие обстоятельство показывает, что эти объекты одни и те же. Иначе говоря, из условия следует, что разумные люди — это те же, что и ходящие на ногах. (В жизни это не всегда так, но жизнь не всегда бывает настолько логична, как кэрролловские задачи.)

Ещё одна задача, которую я уже упоминал. Пусть сказано следующее: «Всем детям полезны витамины» и «Всем взрослым полезны витамины». И что же из этого следует? Очень хочется сказать, что всем полезны витамины, но не будем торопиться.

Задаем список действующих лиц. *Д* — дети. (При этом ясно, что взрослые — не дети.)
В — те, кому полезны витамины. Рисуем картинку согласно условию — вот так (рис. 36):

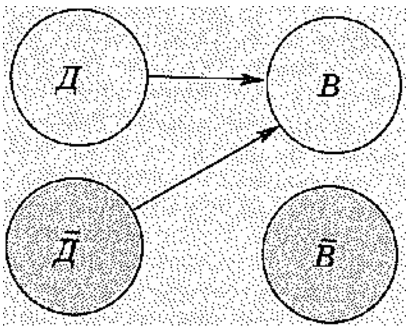


Рис. 36

А теперь дорисовываем ее согласно сюжету —вот так (рис. 37):

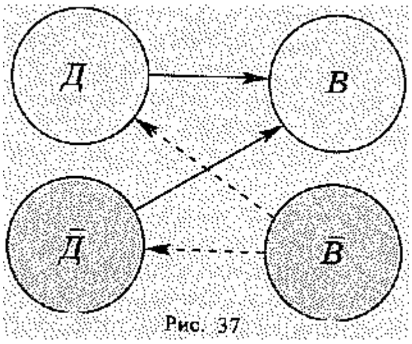


Рис.37

На полученном рисунке видны пути из двух стрелок от не *В* к *В*. Как их истолковать? Получилось нечто странное. Именно: кому не полезны витамины, тому они полезны. Но так не бывает! Иначе говоря, получилось противоречие —
не может объект, как уже было замечено, обладать некоторым свойством и не обладать им. Говорит ли такая ситуация о том, что условие задачи противоречиво? Стоит теперь вспомнить, что «с ходу» мы получили утверждение о том, что витамины полезны всем. И что же? Получается (если ни во что не вникать),что такое общеизвестное и, казалось бы, бесспорное положение о всеобщей полезности витаминов на самом деле противоречиво?

Когда я предлагал это рассуждение ученикам, они довольно быстро находили, в чём дело.

Теперь пора перейти к более сложным случаям. Проще всего увеличить список действующих лиц. Возьмем задачу опять же у Кэрролла. Итак: «Всякие малые дети неразумны. Всякий, укрощающий крокодилов, заслуживает уважения. Всякие неразумные люди не заслуживают уважения». И что же из этого следует?

Список действующих лиц таков:

Д — малые дети.

Р — разумные.

К —укротители крокодилов.

У — заслуживающие уважения.

Изобразим данные и условие задачи в виде кругов и стрелок — вот так (рис. 38):

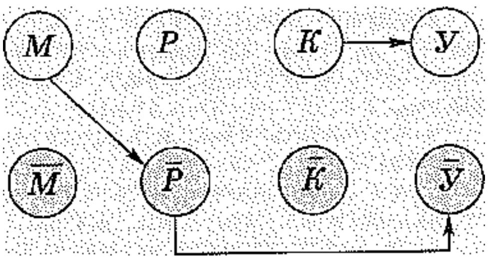


Рис. 38

Уже на этой картинке можно увидеть путь из двух стрелок: от *М* до не *У* (путь длины 2). Он соответствует такому следованию: «Всякие малые дети не заслуживают уважения», или, что всё равно, «Уважаемые люди — не малые дети».

Теперь нарисуем сюжетные стрелки — вот так (рис. 39):

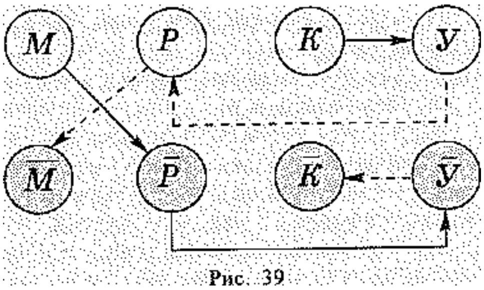


Рис.39

Находим самые длинные пути на этой картинке. Они содержат три стрелки (пути длины 3) и таковы: $М \to$ не $Р \to$ не $У \to$ не $К$ и равносильный ему путь $К \to У \to Р \to$ не $М$. Соответственно полученные следствия выглядят так: «Малые дети не укрощают крокодилов» или равносильное «Укротители крокодилов — не малые дети». Можно выбрать тот вариант следствия, который больше нравится.

При дальнейшем увеличении числа суждений ничего принципиально не меняется — появляется или больше кругов, или больше стрелок, и только.

Приведем тому пример из Кэрролла, который он называет «образцом, достойным подражания». Сорит выглядит так:

«1.Я чрезвычайно дорожу всем, что дарит мне Джон.
2. Ничего, кроме этой кости, не придется по вкусу моей собаке.
3. Я очень берегу то, чем особенно дорожу.
4. Эта кость — подарок от Джона.
5. Вещи, которые я очень берегу, я не даю своей собаке».

И что же следует из всей этой абракадабры?

Составим список действующих лиц, в который включим:

1. То, что подарено Джоном.
2. То, что я даю собаке.
3. То, чем я особенно (или чрезвычайно) дорожу.
4. То, чго приходится по вкусу моей собаке.
5. То, что я очень берегу.
6. Эта косточка.

Нарисуем все круги и все стрелки, соответствующие условию, разыграем сюжет, найдём на полученном рисунке самый длинный путь и придем к такому следствию: «Моя собака любит то, что я ей не даю». Заметим, что для получения этого следствия не понадобятся штриховые стрелки. Некая трудность — чисто лингвистическая — при решении этой задачи (и аналогичных ей) будет состоять в том, чтобы перевести фразы из условия задачи, записанные на «человеческом языке», на более формализованный язык, связанный с кругами и стрелками.

Вот несколько более сложный сорит из Кэрролла:

«1. Ни одного мальчика моложе 12 лет не принимают в эту школу на полный пансион.
2. У всех прилежных мальчиков рыжие волосы.
3. Ни один из мальчиков, приходящих в школу только на занятия, не учит греческий язык.
4. Никто, кроме мальчиков моложе 12 лет, не любит бить баклуши».

Составим список действующих лиц, нарисуем все соответствующие круги, затем полагающиеся стрелки, разыграем сюжет и придём к такому следствию: «Если мальчик учит греческий язык, то он рыжий».

Дальнейшие усложнения в наших задачах — качественные. Рассмотрим суждения ещё двух видов: «Если *А,* то *В* и *С»* и 2. «Если *А* или *В,*то *С*». Переводя на «человеческий язык» схему суждения первого вида, получим вот что: «Если объект обладает свойством *А,* то он обладает свойством *В* и свойством *С*». Соответствующий рисуноктакой (рис. 40):

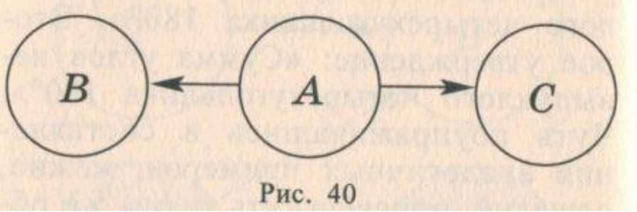


Рис.40

Равносильная картинка, сделанная по первому правилу обращения, такова (рис. 41):

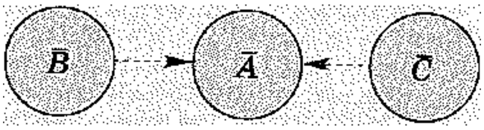


Рис. 41

Схема суждения второго вида приводит нас к фразе:

«Если объект обладает свойством *А* или свойством *В,* то он обладает свойством *С*. Соответствующий рисунок выглядит так (рис. 42):

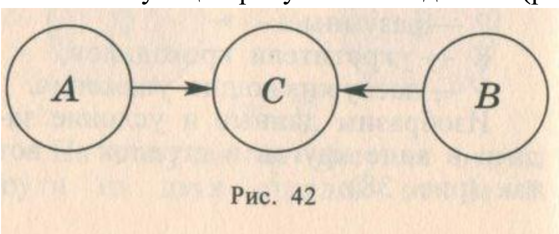


Рис. 42

Равносильная картинка, сделанная по первому правилу обращения, выглядит так (рис. 43):

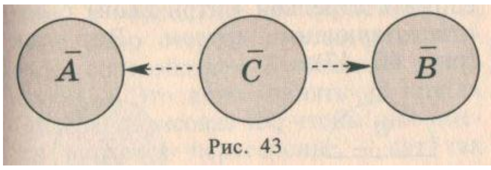


Рис.43

Займёмся суждением первого вида и попробуем взяться за раков, с которых всё и началось, на такой задаче:

«Если рак красный, то он варёный и мёртвый. Если рак варёный, то он красный и мёртвый». Что из этого следует?

Действующие лица:

К — красные раки.

В — варёные раки.

М — мёртвые раки.

Рисунок, соответствующий условию и сюжету, выглядит так (рис. 44):

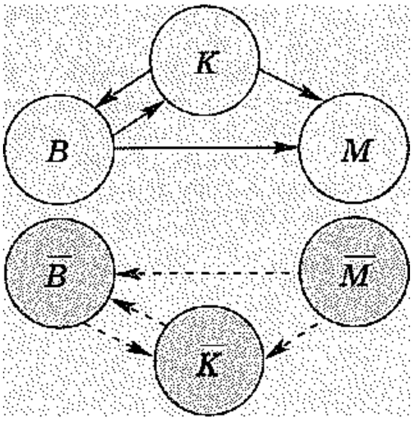


Рис. 44

Видим из полученной картинки, что для рака из этой задачи быть красным то же самое, что быть варёным. Это можно сказать, например, так: «Рак является красным тогда и только тогда, когда он является варёным».

А вот как выглядит задача второго вида о тех же раках: «Если рак красный или варёный, то он мёртвый. Если рак красный или мёртвый, то он варёный». Нарисуем картинку и увидим, что раку в этой ситуации всё одно – быть мёртвым или варёным.

Перейдём к математическому примеру: «Если четырёхугольник прямоугольник или ромб, то он параллелограмм. Если четырёхугольник — квадрат, то он ромб и прямоугольник». И что же из этого следует? Разумеется, ответ ясен и сам по себе «содержательно», именно: «Квадрат является параллелограммом», но его можно получить — и в этом вся суть — не вникая в содержание этих суждений, а только действуя по этому способу. Можно заметить при этом, что в некоторых задачах дополнительные множества уже не работают, а потому их можно и не рисовать.

Теперь возникает вопрос: а где же суждения вида «Если *A* и *B,* то *C*» и «Если *A,* то *B* или *C*»? Для работы с ними потребуются некоторые дополнительные сведения.

Прежде всего (пользуясь нашей терминологией) понадобятся другие действующие лица, именно частные суждения (в отличие от общих, которыми мы пока только и занимались). Частные суждения характерны тем, что в них говорится не обо всех объектах, имеющих данное свойство, а лишь о некоторых из них. Здесь вместо квантора всеобщности, что характерно для общих суждений, на переменную навешен квантор существования.

Так же как и общие, частные суждения делятся на два вида: утвердительные и отрицательные, при этом и те и другие могут быть как истинными, так и ложными. Вот примеры:

1. Некоторые школьники — отличники (утвердительное истинное суждение).
2. Некоторые числа после возведения в квадрат становятся отрицательными (утвердительное ложное суждение).
3. Некоторые блямбы сражаются с финтифлюшками (суждение, истинность или ложность которого мы определяем сами).
4. Некоторые школьники — не отличники (отрицательное истинное суждение).
5. У некоторых квадратов нет центра симметрии (отрицательное ложное суждение).
6. У некоторых блямб нет ни одной финтифлюшки (отрицательное суждение с произвольно заданным значением истинности).

Обозначать частные суждения будем с помощью тех же букв, что и соответствующие общие, но только маленьких. Вот примеры. Запись вида «Если *a,* то *b*» будет обозначать суждение о том, что некоторые объекты со свойством *A* обладают и свойством *B;* запись вида «Если $\bar{a}$, то *b»* означает, что некоторые объекты, не обладающие свойством *a,* обладают свойством *b.*

Рисовать множества некоторых объектов с данным свойством или его отсутствием будем в виде полукруга: светлым полукругом, если соответствующее суждение утвердительное, а закрашенным полукругом, если оно отрицательное. Выглядеть они будут так (рис. 57):

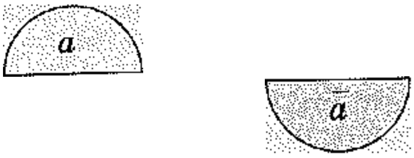
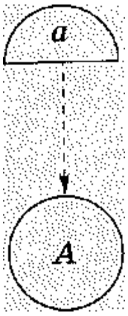


Рис. 45

Каждый полукруг можно соединить стрелкой (штриховой) с соответствующим кругом. Вот так (рис. 46, 47):



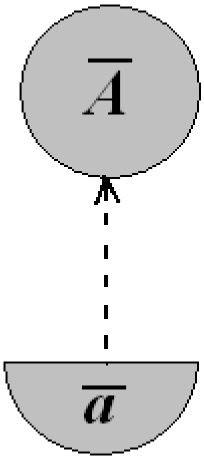


Рис. 46 Рис. 47

Правила (новые!) разыгрывания сюжета здесь таковы.

Второе правило достижимости.

Если имеется суждение вида «Все *А* есть *В*», то суждение «Некоторые *а* есть *В»* очевидно, ибо если все объекты со свойством *А* обладают и свойством *В,* то и некоторые объекты со свойством *А* обладают свойством *В.* Согласно второму правилу достижимости при наличии стрелки от *А* к *В* мы можем рисовать также и стрелку (штриховую) от *а* к *В*. Рисунок получается такой (рис. 48):

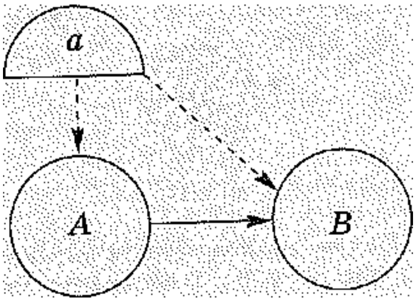


Рис. 48

Второе правило обращения.
Суждения «Некоторые *A* есть *B*» и «Некоторые *B* есть *A*» равносильны. Подробнее. Если нам известно, что некоторые объекты со свойством *A* обладают и свойством *B,* то в свою очередь и некоторые объекты со свойством *B* обладают свойством *A.* Это легко понять на кругах Эйлера, нарисовав их, чтобы они имели непустое пересечение, — вот так (рис.49):

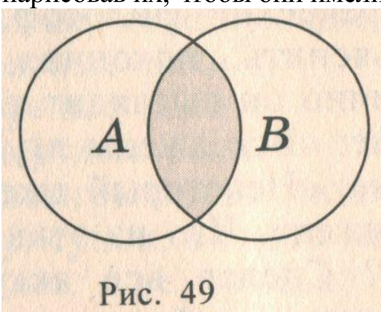


Рис.49

(Заметим, что суждение вида «Если *a,* то *B*» приводит по второму правилу обращения к суждению вида «Если *b*, то *A*».)

В соответствии со вторым правилом обращения, как только появится стрелка от *a* к *B,* будем рисовать штриховую стрелку от *b* к *A* — вот так (рис.50):

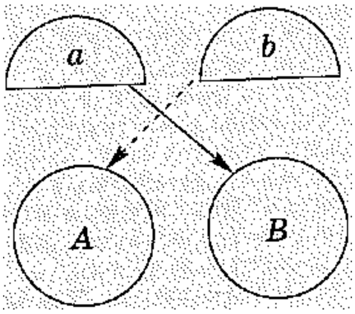


Рис. 50

Аналогично если появилась стрелка от *a* к $\bar{B}$, то будем сразу же рисовать штриховую стрелку от $\bar{b}$ к *A* (рис. 51):

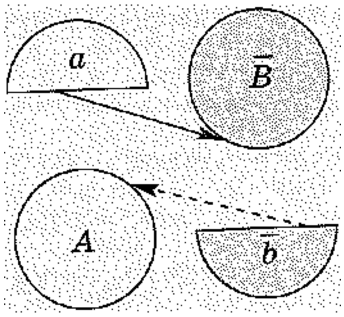


Рис. 51

Перейдём теперь к задачам. Все тот же Кэрролл: «Не существует рыбы, которая не умела бы плавать. Некоторые коньки — рыбы».

Разберёмся в действующих лицах. Налицо рыбы, коньки и умеющие плавать. Введем обозначения:

К — коньки.

Р — рыбы.

П — умеющие плавать.

Первая фраза, если её распутать, означает, что каждая рыба умеет плавать.

Теперь сделаем рисунок по условию задачи (рис. 52):

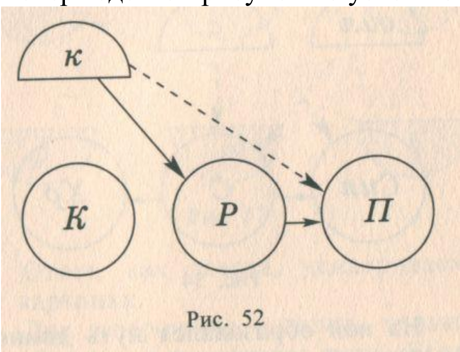


Рис.52

Из этого рисунка видно следствие: «Некоторые коньки умеют плавать».

Ещё пример сорита. «Все солдаты сильные. Все солдаты храбрые». Странный сорит, не правда ли? В нем ведь нет ни одного частного суждения, так зачем он здесь? Немного терпения...

Создадим список действующих лиц:

С — солдаты.

Сил — сильные.

Хр — храбрые.

Нарисуем картинку согласно условию (рис. 53):

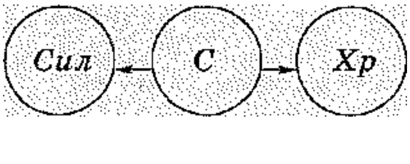


Рис. 53

Глядя на неё, вроде бы никаких следствий не получишь. Но! Подключим к ней светлый полукруг и штриховую стрелку, соответствующую истинному в рамках нашей задачи суждению: «Некоторые солдаты сильные». Но тогда по второму правилу обращения появится штриховая стрелка, соответствующая высказыванию «Некоторые сильные — солдаты», и мы увидим такую картинку (рис. 54):

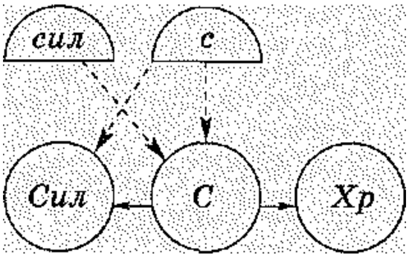


Рис.54

На ней образовался путь длиной 2, который приводит к такому следствию: «Некоторые сильные храбры». Несложно получить и равносильную формулировку: «Некоторые храбрые сильны».

Понятно, что для работы по нашей схеме может понадобиться предварительное осмысление фразы из условия. Возьмем задачу из Кэрролла: «Лишь тот, кто храбр, достоин славы. Некоторые хвастуны — трусы». Что отсюда следует?

Вторая фраза сорита формализуется легко, но как истолковать первую? Предлагаю такое истолкование: «Трус недостоин славы». Теперь уже несложно разыграть сюжет и получить такое следствие: «Некоторые хвастуны недостойны славы».

Теперь хочется напомнить знаменитый ещё со времен древних греков парадокс лжеца (говорят, некий древнегреческий философ, не сумев его объяснить, покончил с собой). Схематично он выглядит так. Первое суждение: «Все лжецы лгут». Второе суждение: «Некоторый лжец говорит, что он лжец». Что из этих суждений следует? Сделав все аккуратно по нашей схеме, придём к суждению: «Некоторый лжец не является лжецом», т. е. к противоречию. А такое у нас уже встречалось, и можно поразмышлять, что же в этом случае делать дальше: то ли бросать эту задачу, сказав, что так не бывает, то ли пытаться понять, откуда оно взялось... (Замечу, что у специалистов по логике нет простого и, главное, однозначного объяснения этого парадокса.)

После того как стало известно о частных суждениях, можно истолковать по нашей схеме те общие суждения, которыми мы ещё не занимались.

Возьмем суждение вида «Если *A* и *B,* то *C*». Это значит, что объект, обладающий свойствами *A* и *B* одновременно, если он существует, обладает также и свойством *C.* Ясно, что объект, обладающий свойствами *A* и *B,* принадлежит соответствующим множествам *A* и *B,* т. е. речь идет о некоторых объектах из множества *A* и одновременно о некоторых объектах из множества *B.* На картинке это будет выглядеть так (рис.55):

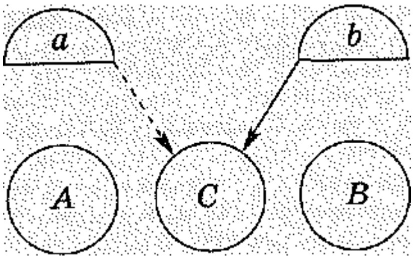


Рис. 55

Вот теперь мы уже можем вернуться к задаче о раках, с которой все началось. Итак, действующие лица:

К — красные раки.

В — варёные раки.

М — мёртвые раки.

При разыгрывании сюжета потребуется рисунок, включающий, как теперь ясно, не только круги, но и полукруги. Разыграем сюжет и получим такую картинку (рис. 56):

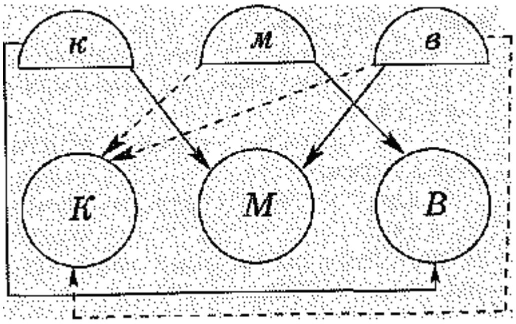


Рис. 56

Осталось только осмыслить увиденное: даже если варёный и мёртвый рак действительно красного цвета, то это необязательно следует из двух исходных суждений.

Перейдем к частным отрицательным суждениям. Начнем опять же с сорита Кэрролла: «Ни один философ не тщеславен. Некоторые тщеславные люди — не игроки». Каково следствие? Кэрролл приводит 6 различных способов решения этой задачи. Используя наш метод, можно решить её седьмым способом и получить такой ответ: «Некоторые не игроки — не философы».

Работаем по известным образцам.

Действующие лица:

Ф — философы.

Т — тщеславные.

И — игроки.

Рисунок, составленный согласно условию задачи и правилам разыгрывания сюжета, выглядит так (рис. 57):

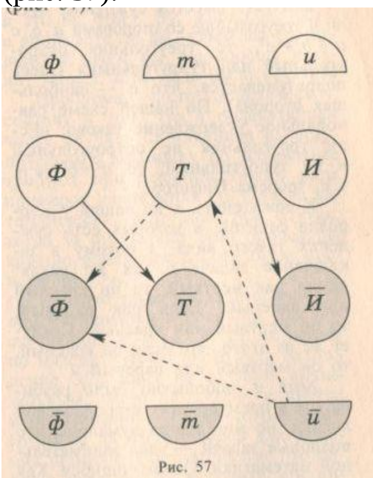


Рис.57

Ответ, как всегда, усматриваем из картинки.

Для завершения осталось только разобраться с суждением вида «Если *А,* то *В* или *С*». Перевод его на нашу схему более сложен, нежели предыдущих. (Аккуратно это можно сделать, используя таблицы истинности.) Нужный нам результат (т. е. равносильный этому суждению и реализуемый на нашей схеме) получается после применения первого правила обращения (но не только) и таков: «Если не *B* и не *C,* то не *A».* Этот результат легко проиллюстрировать на кругах Эйлера или на конкретных примерах. Вот они:

1. Пусть имеется суждение: «Если $|a|> 1$, то $a>\backslash$ или $a<-1$». По нашей версии ему равносильное суждение таково: «Если $a<1$ и $a>-1$, то $|a|<1$». Содержательно эти два суждения имеют один и тот же смысл.

2. Пусть имеется суждение: «Если в треугольнике со сторонами a, b, c $a^2 + b^2 \neq c^2$, то треугольник остроугольный или тупоугольный» (здесь подразумевается, что c — наибольшая сторона). По нашей схеме равносильное утверждение таково: «Если треугольник не остроугольный и не тупоугольный, то $a^2 + b^2 = c^2$», т. е. теорема Пифагора.

К сожалению, я не нашёл у Л.Кэрролла соритов, в которых есть суждения такого вида, а потому в заключение задача о тех же раках: «Если рак мёртвый, то он красный или варёный. Если рак варёный, то он мёртвый или красный. Следует ли из этого, что если он красный, то он мёртвый или варёный?»

Хотя и любопытно было разбираться в премудростях кэрролловской логики, но мне всегда думалось, что подобные задачи — удел занимательной математики. Однако ошибся. Как оказалось, в Израиле существуют «Психометрические тесты», предназначенные для поступающих в высшую школу (они переведены на русский язык). И вот, к радостному моему изумлению, я обнаружил целый раздел чисто логических задач, большинство из которых легко решается в описанной выше технике — назову ее условно «графской». Привожу только два примера.

Пример 1. Какой вывод следует из сочетания двух утверждений? А. Все лягушки зелёные. Б. Все лягушки любят есть мух.

(1) Все зелёные любят есть мух.
(2) Все, кто не любит есть мух, зелёные.
(3) Только тот, кто любит есть мух, зелёный.
(4) Ни один из ответов не верен.

Пример 2. Какое из нижеследующих утверждений в сочетании с другими не является необходимым для того, чтобы заключить, что все рыбы едят сельдерей?

(1) Все рыбы плавают в море.
(2) Все плавающие в море ныряют глубоко.
(3) Тот, кто не ныряет глубоко, ест сельдерей.
(4) Ныряющие глубоко не плавают в море.

Точности ради замечу, что в «Психометрических тестах» есть такие задания, выдержанные в духе приведённых примеров, которые мне пока не удалось решить в «графской» технике. Значит, есть над чем подумать.

II.14.Ранняя тригонометрия

Идея использовать тригонометрию раньше, нежели подобие, реализована в учебниках по геометрии А.Александрова. Это замечательная методическая находка Александра Даниловича. Существенным техническим аппаратом при изучении математики в целом во многих ситуациях является именно тригонометрия, подобие треугольников – всего лишь частность.

Хорошо известные формулы тригонометрии выводятся для произвольных углов, и вывод их в старших классах не слишком прост.

Вместе с тем эти формулы можно получить несложно, используя при этом только решение прямоугольных треугольных треугольников. Разумеется, углы в полученных формулах такие, которые отнесены только к остроугольному треугольнику.

Зачем это нужно? Во - первых эти формулы – не все, конечно - нужны для решения иных задач по физике раньше, чем они появляются в курсе математики. Во - вторых, они знакомят учеников с тем, что их ждёт в старших классах, для пропедевтики. В – третьих, получение этих формул – хорошее упражнение в планиметрии.

Первая формула, которую мы получим – формула синуса двойного угла.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Вторая формула, которую мы получим – формула косинуса двойного угла.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Из рисунка 58 (равнобедренный треугольник *ABC* , в котором *AB* = *BC* = 1 и три перпендикуляра: *BD*, *AL*, *DK*) ясны обозначения данных и результатов.

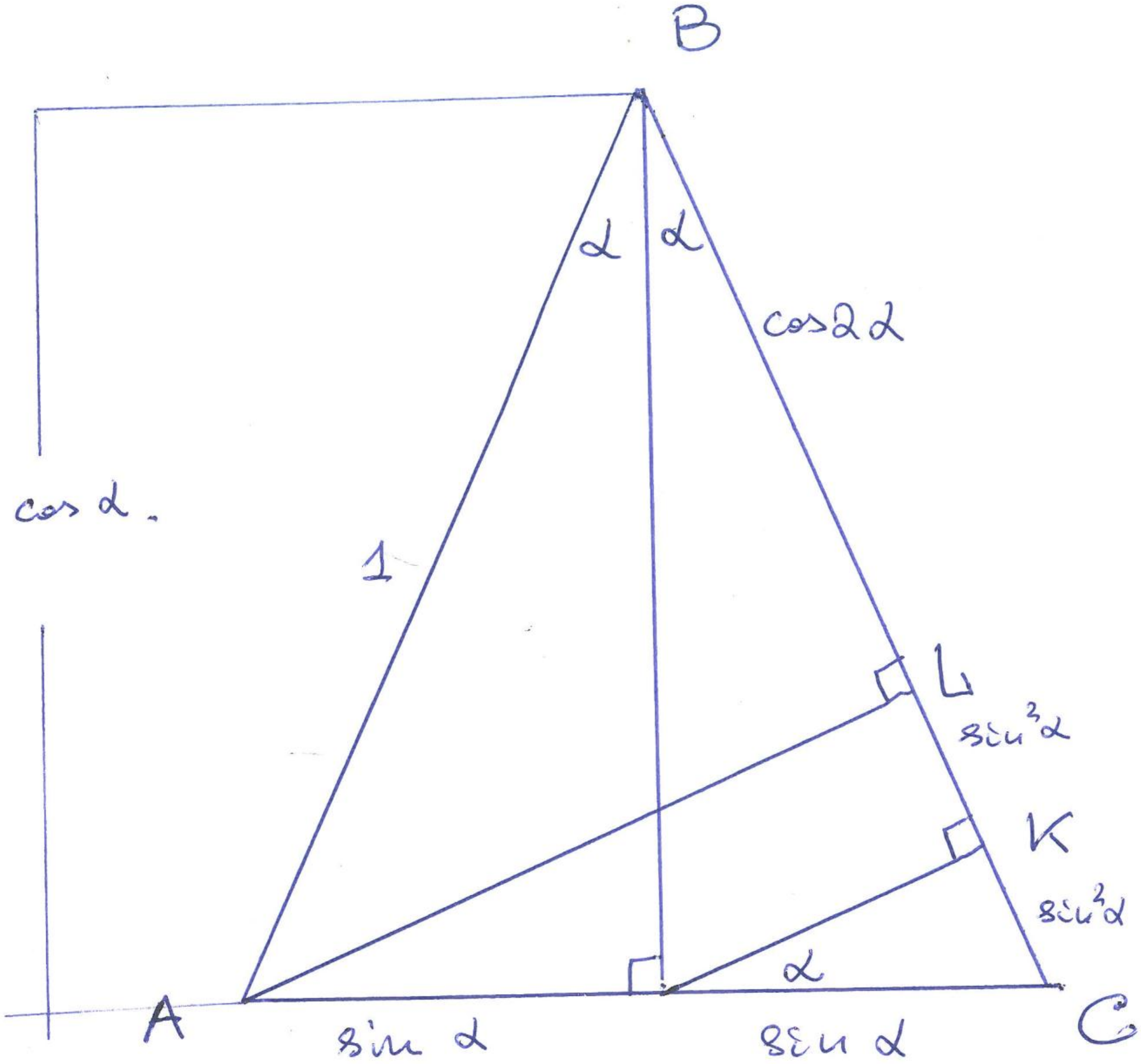


Рис. 1.

Рис. 58

Из прямоугольного треугольника *ABL* имеем равенства:
$BL = AB\cos 2\alpha = \cos 2\alpha$,
$AL = AB\sin 2\alpha = \sin 2\alpha$.
Из прямоугольного треугольника *CBD* имеем равенство:
$CD = CB\sin\alpha = \sin\alpha$, $BD = CB\cos\alpha = \cos\alpha$.
Из прямоугольного треугольника *CKD* имеем равенство:
$CK = CD\sin\alpha = \sin^2\alpha$, $DK = CD\cos\alpha = \sin\alpha \cos\alpha$.
Так как $CD = AD$, $DK \| AL$, то *DK* – средняя линия треугольника *ALC*.
Следовательно, $KL = KC = \sin^2\alpha$,
$AL = 2\, DK = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.
Сравнивая два выражения для *AL* и, получаем

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Этот же результат можно получить иначе. Именно.
Из треугольника *ABL* имеем $BL = \sin 2\alpha$.
Из треугольника *BLC* имеем $BL = BC \cos\alpha.= 2BD \cos\alpha$
Из треугольника *ABD* имеем $BD = \sin\alpha$..

Отсюда $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$./

Двигаемся далее.
Из прямоугольного треугольника *ADK* имеем равенство:
$BK = BD\cos\alpha = \cos^2\alpha$.
Имеем: $BL + LK = BK$, следовательно, $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$. Отсюда получаем

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha .$$

Докажем теперь формулы.

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2\alpha. \qquad (3)$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha. \qquad (4)$$

По ходу дела понадобятся результаты из п. I.
Из рисунка 59 (равнобедренный треугольник *ABC* , в котором $AB = BC = 1$ и три перпендикуляра: *BD, AL, AM*) ясны обозначения данных и результатов.

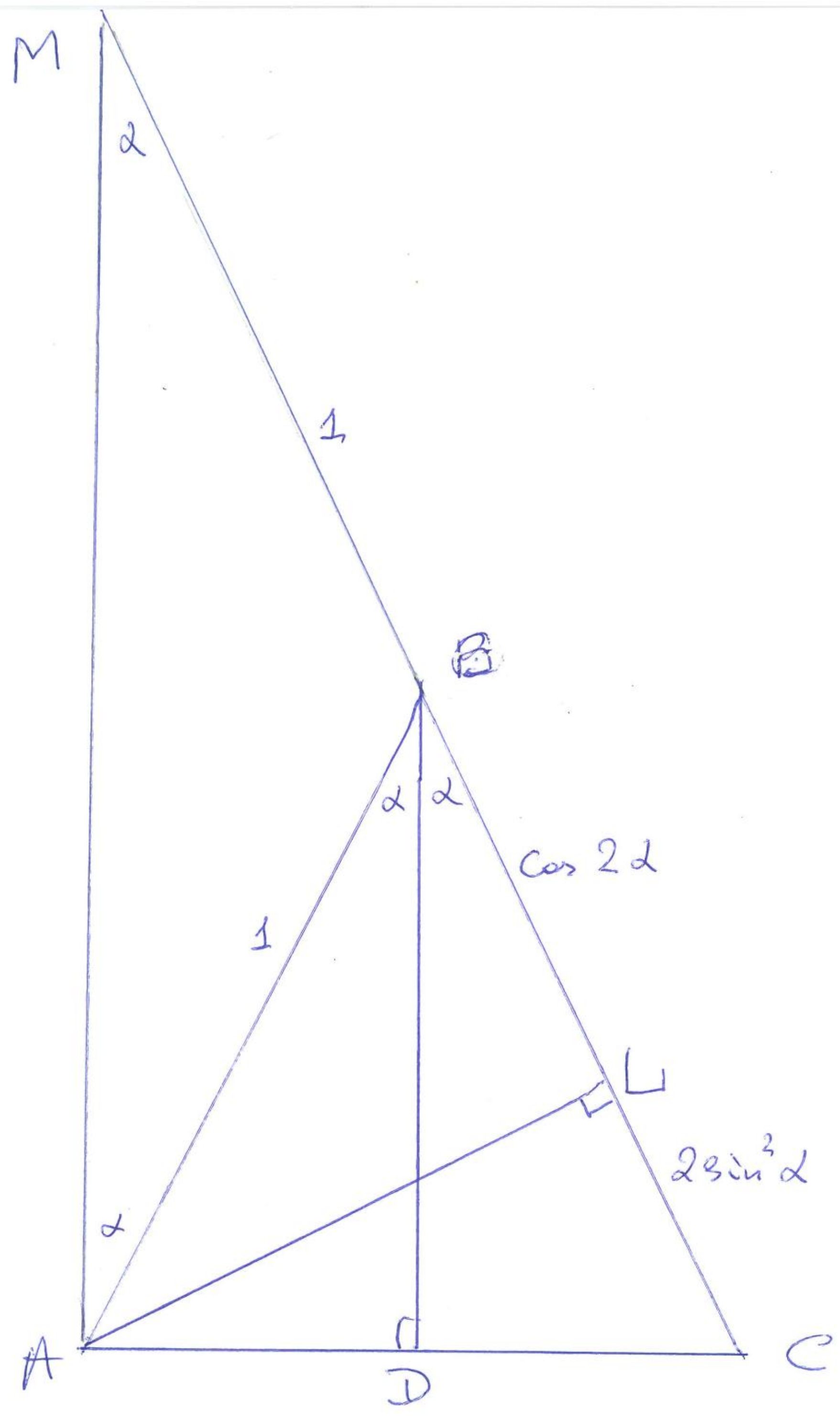


рис. 2

Рис. 59

Выше получено $BL = \cos 2\alpha$, $LC = 2\sin^2\alpha$.

Так как $BC = BL + LC$, то

$$1 = \cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha, \text{ откуда получаем}$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Выше получено $AL = \sin 2\alpha$.

Из прямоугольного треугольника AML имеем равенство:

$ML = AL\,\mathrm{ctg}\alpha = \sin 2\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos\alpha / \sin\alpha) = 2\cos^2\alpha$.

Так как треугольник ABM равнобедренный, то $AB = BM = 1$.

Так как $MB + BL = AL$, то

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha.$$

Разумеется, эти формулы можно получить иначе, рассматривая треугольники ABD и ADL.

Получим теперь формулы для синуса и косинуса суммы двух углов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (5)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (6).$$

Из рисунка 60 (два прямоугольных треугольника ABC и ACD, $AD = 1$ и два перпендикуляра: DK, CM) ясны обозначения данных и результатов.)

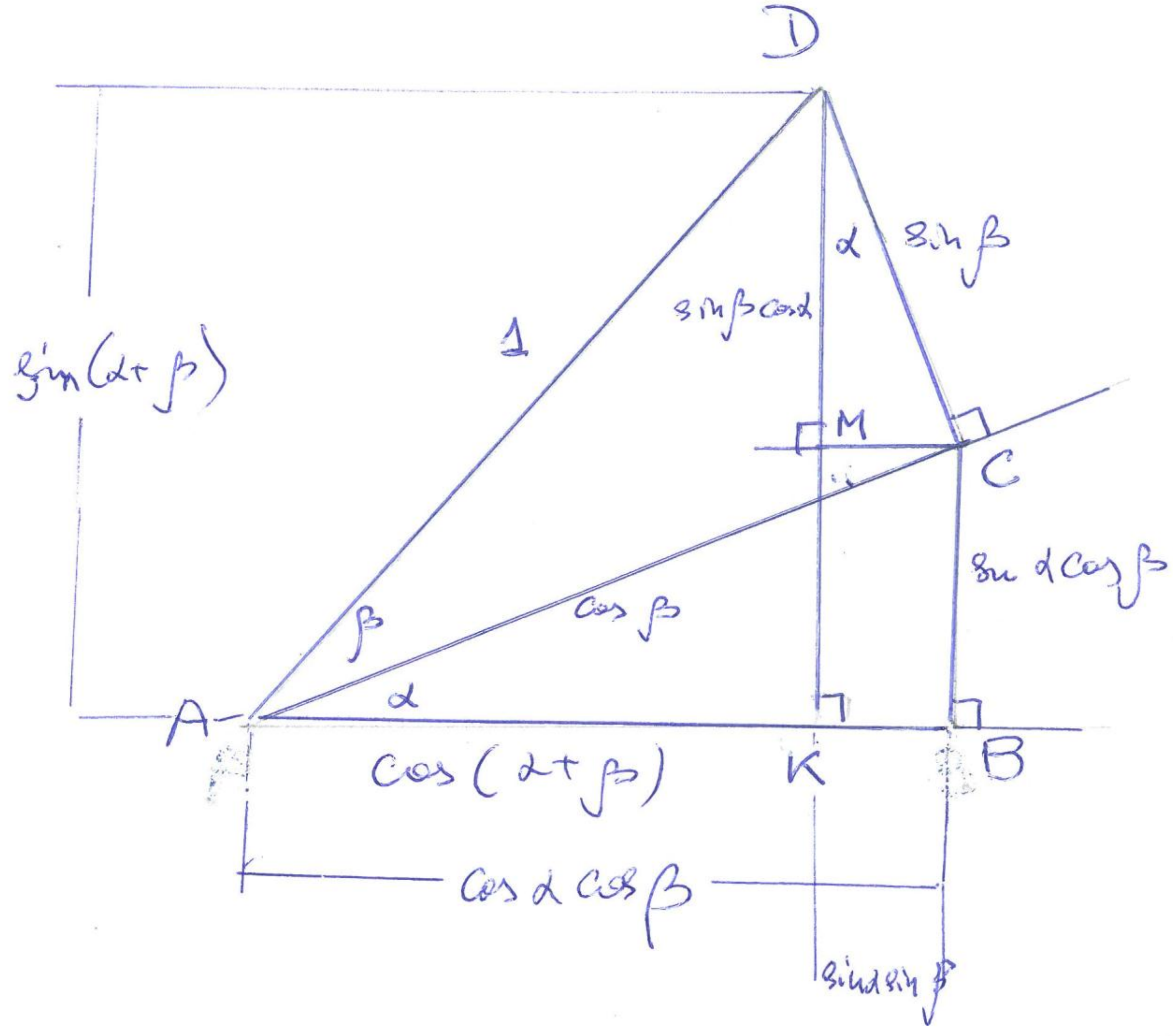

D
sin β
α
sin β cos α
1
sin(α + β)
M
C
sin α cos β
β
cos β
α
A
K
B
cos(α + β)
cos α cos β
sin α sin β

Рис. 3

Рис. 60

Из прямоугольного треугольника *AKD* имеем равенства:

$AK = AD \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$,

$DK = AD \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$.

Из прямоугольного треугольника *ACD* имеем равенства:

$CD = AD \sin\beta = \sin\beta$,

$AC = AD \cos\beta = \cos\beta$.

Из прямоугольного треугольника *CMD* имеем равенство:

$CM = CD \sin\alpha = \sin\beta \sin\alpha$. $DM = CD \cos\alpha = \sin\beta \cos\alpha$.

Так как $BK = CM$, то $BK = \sin\beta \sin\alpha$.

Из прямоугольного треугольника *ACB* имеем равенства:

$AB = AC \cos\alpha = \cos\beta \cos\alpha$, $CB = AC \sin\alpha = \cos\beta \sin\alpha$

С другой стороны имеем: $AK = AB - BK = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha$.

Сравнивая полученные выражения для *AK*, получаем

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Далее имеем $DK = \sin(\alpha + \beta)$.

Так как $MK = CB$, то $MK = \cos\beta \sin\alpha$.

С другой стороны имеем: $DK = DM + MK = \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha$.

Сравнивая полученные выражения для *MK*, получаем

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Получим теперь формулы для синуса и косинуса разности двух углов:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta, \qquad (7)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \qquad (8)$$

Из рисунка 61 (прямоугольный треугольник *ABC* , $BK = 1$ и перпендикуляр *KL* ясны обозначения данных и результатов.

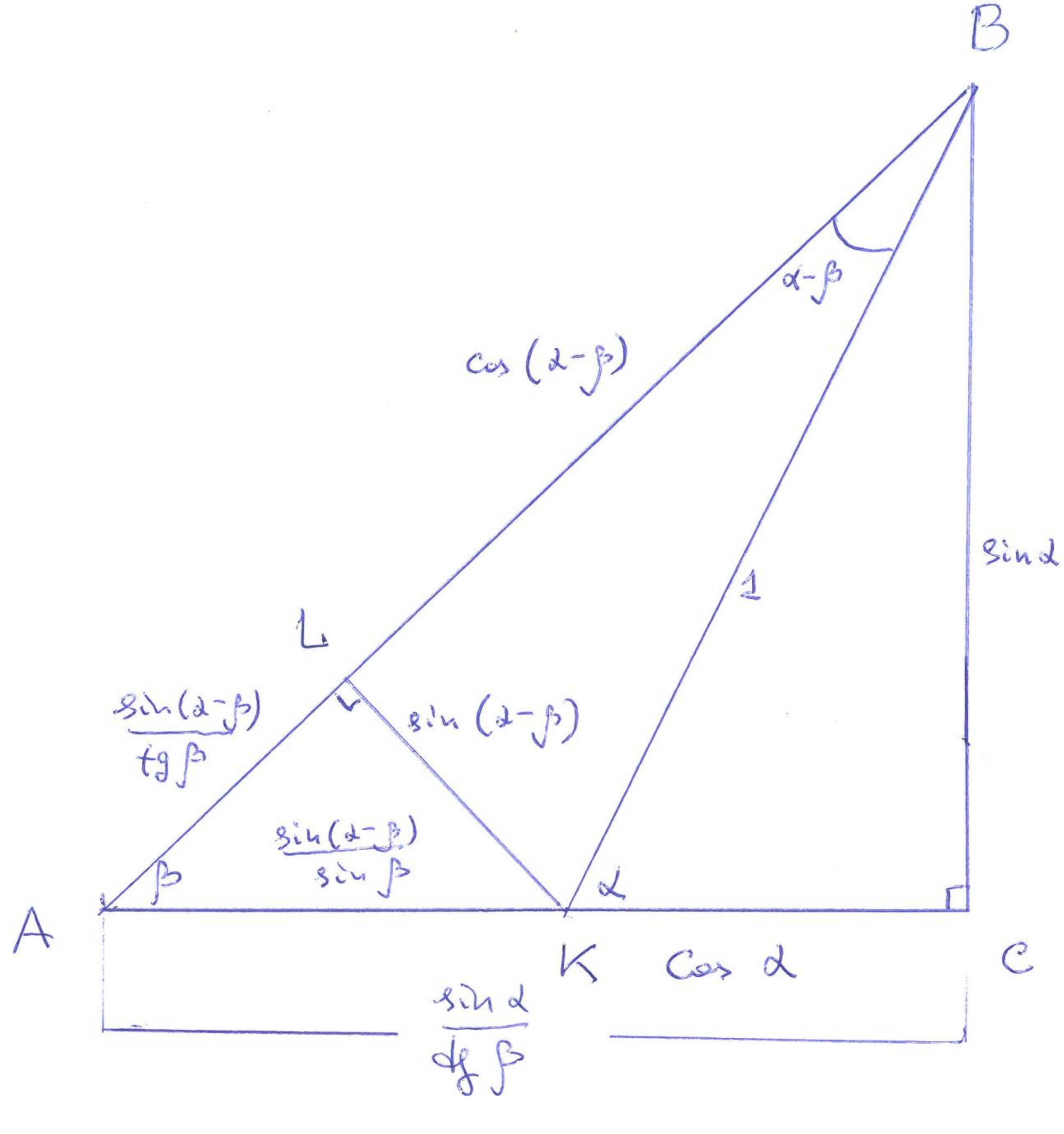

B
$\alpha-\beta$
$\cos(\alpha-\beta)$
$\sin\alpha$
1
L
$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{tg\,\beta}$
$\sin(\alpha-\beta)$
$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}$
β
α
A
K
$\cos\alpha$
C
$\frac{\sin\alpha}{tg\,\beta}$

Рис. 4.

Рис.61

Из прямоугольного треугольника *KBC* имеем равенства:

$BC = BK\sin\alpha = 1\cdot\sin\alpha$,

$CK = BK\cos\alpha = 1\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Из прямоугольного треугольника *ABC* имеем равенства:

$AB = BC/\sin\beta = \sin\alpha/\sin\beta$,

$AC = BC/\mathrm{tg}\beta = \sin\alpha/\mathrm{tg}\beta$.

Из прямоугольного треугольника *BLK* имеем равенства:

$BL = BK\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$,

$KL = BK\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha-\beta)$.

Из прямоугольного треугольника *ALK* имеем равенства:

$AK = KL/\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)/\sin\beta$.

С другой стороны, $AK = AC - KC = (\sin\alpha/\mathrm{tg}\beta) - \mathrm{tg}\,\alpha$.

Приравняем выражения для *AK* в правых частях и выразим из полученного равенства $\sin(\alpha-\beta)$.

После несложных преобразований получим требуемое:

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Двинемся к формуле (8)

Из прямоугольного треугольника *ALK* имеем равенства:

$AL = AK\cos\beta = (\sin(\alpha-\beta)/\sin\beta)\cos\beta$.

Таким образом, для *AB* имеем два выражения:

$AB = \sin\alpha/\sin\beta$ и

$AB = AL + LB = (\sin(\alpha-\beta)/\sin\beta)\cos\beta + \cos(\alpha-\beta)$.

Приравняем выражения в правых частях и выразим из полученного равенства $\cos(\alpha-\beta)$.

После несложных преобразований (учитывая уже найденное выражение (7))получим требуемое:

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Из формул (3) и (4) можно получить основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (10)$$

Для этого достаточно сложить равенства (3) и (4) почленно, а затем упростить полученное.

Тем самым, мы можем получить (9) до теоремы Пифагора, на основании которой это равенство обычно и получают.

Более того. Если обе части равенства (9) умножить на a^2, то приходим к равенству

$$a^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha = a^2 . \qquad (10)$$

Но оно есть не что иное как теорема Пифагора в прямоугольном треугольнике с гипотенузой *a* и острым углом a^2. В самом деле, ведь выражения $a\sin\alpha$ и $a\cos\alpha$ являются катетами этого прямоугольного треугольника. Похоже, что получено ещё одно доказательство теоремы Пифагора.

Получим теперь формулы для тангенса суммы и разности двух углов:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = (\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta)/(1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta), \qquad (9)$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = (\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta)/(1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta). \qquad (10)$$

Из формулы (9) получим формулу для тангенса двойного угла.

Из рисунка 62 (в треугольнике *ABC* проведены высоты *AD* и *BL* , *BL* = 1 ; ясны обозначения данных и результатов.

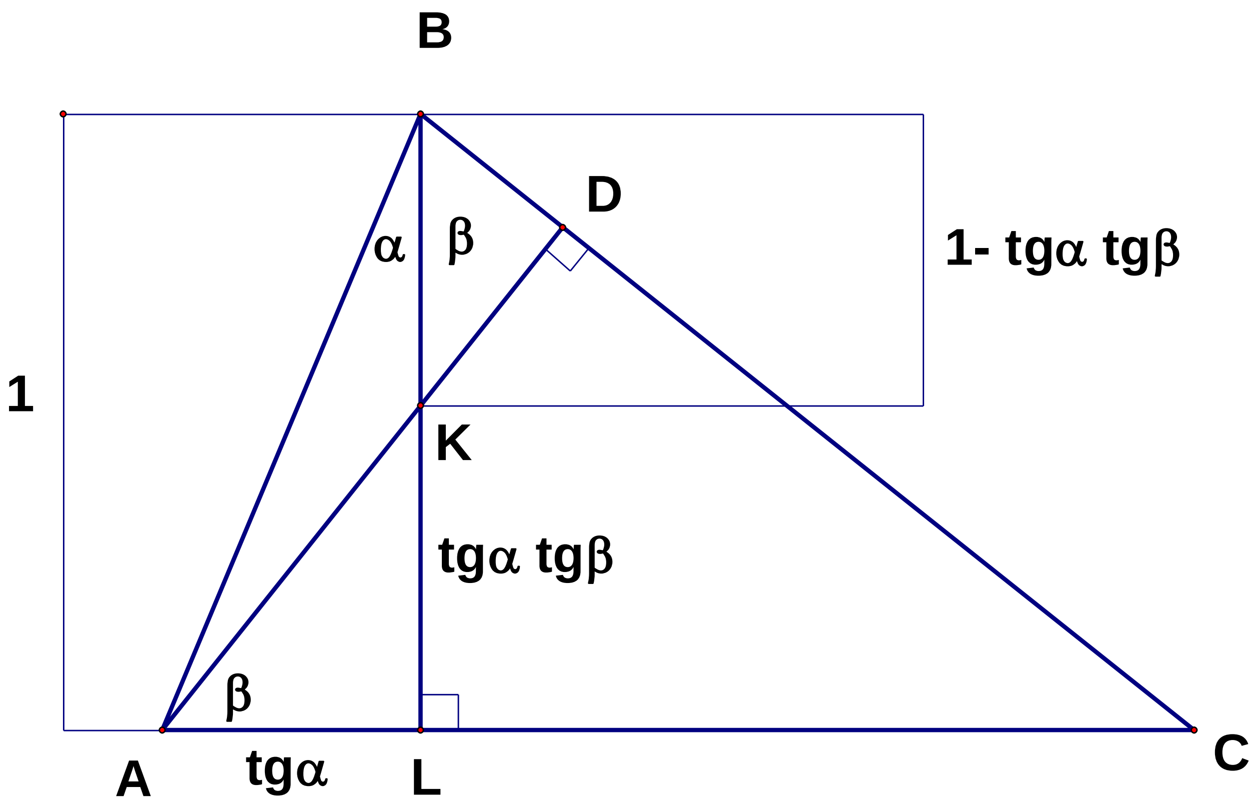


Рис. 62

Далее так. Из треугольника *ABD* имеем tg (α + β) = *AD* / *BD*.
Из треугольника *ABL* имеем *AL* = *BL* tgα = tgα
Из треугольника *CBL* имеем *CL* = *BL* tg β = .tg β
Тогда *AC* = *AL* + *LC* = tg α + tg β .
Из треугольника *ACD* имеем *AD* = *AC* cos β = (tg α + tg β) cos β
Из треугольника *AKL* имеем *KL* = *AL* tgβ = tgα tg β .
Тогда *BK* = 1 - tgα tg β.
Из треугольника *BKD* имеем *BD* = *BK* cos β = (1 - tgα tg β) cos β.
Получаем tg (α + β) = *AD* / *BD* = (tg α + tg β) cos β / ((1 - tgα tg β) cos β) =
= (tg α + tg β) / (1 - tgα tg β),

Формулу (10) можно получить из формулы (9) алгебраическими преобразованиями. Для этого достаточно переписать её в таком виде tg α = tg (β + (α - β)) = (tg β + tg (α - β)) / (1 - tgβ tg (α - β)) и выразить из этого равенства tg (α - β).

При таком выводе формул для тангенса не требуется знать соответствующих формул для синуса и косинуса.

Несколько заключительных замечаний.

1. Разумеется, эти формулы можно получить в другой последовательности. Например, вывести сначала формулы (5) и (6) а затем из них как частный случай получить формулы (1) и (2). Есть и другие возможности. Формулы (9) и (10) можно получить известным способом из соответствующих формул для синуса и косинуса.
2. Формулу (5) получим, рассматривая треугольник со сторонами *a* и *b*, в котором проведена высота на третью сторону. Если ввести углы α и β, которая образует эта высота со сторонами *a* и *b* , затем воспользоваться формулой для площади треугольника, в которой использованы две стороны и угол

между ними, то можно получить формулы (5) и (7) . Для этого потребуется площадь данного треугольника выразить двумя способами – как по указанной формуле, так и как сумму (разность) площадей частичных треугольников, полученных после проведения высоты. При этом надо рассмотреть два случая в зависимости от того как расположена высота – в треугольнике или вне его.

3. Формулы (6) и (8) получим, рассматривая скалярное умножение единичных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые образуют с осью абсцисс углы α и β. Скалярного произведение единичных векторов равно косинусу угла между ними. С другой стороны, есть формула для скалярного произведения в координатах. Используя её и приравняв два выражения для скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получаем нужные формулы. При этом надо рассмотреть два случая в зависимости от того как расположены векторы – в разных полуплоскостях от оси абсцисс или в одной полуплоскости. Сделайте соответствующие рисунки и найдите это доказательство.