Рыжик В.И.

Радость видеть и понимать
(35 000 уроков математики)

Глава I
В ПОИСКАХ СМЫСЛА

1.1. КАЖДЫЙ ВЕЗЁТ СВОЮ ТАЧКУ

Больше пятидесяти лет у классной доски. Сколько лет, а вроде бы всё одно и то же: квадрат суммы, теорема Пифагора... «И тебе ещё не надоело?» — порой любопытствуют коллеги. Вопросы, задачи, работы, ответы, проверки, отметки...

— Здравствуйте, дети, садитесь, пожалуйста...

Уроки, уроки, уроки... Что-то около 35 000 уроков. Сколько же уроков запомнилось из этих тысяч?

Урок в темноте, замена заболевшей коллеги в неизвестном мне 11 классе. (Нумерация классов — современная.) Два урока подряд, первый и второй по счёту. За окном январская темень. За минуту до начала урока, когда я уже открывал дверь в класс, во всей школе погас свет. Вошёл — не видно ни одного лица. Что-либо делать на доске и в тетрадях невозможно. Сейчас я совершенно не помню, о чём говорил. Но точно помню: это был урок математики, я что-то объяснял, задавал вопросы, ученики отвечали и даже вставали с места. И была перемена, а потом ещё один час. И был звонок, прекративший этот кошмар, оборвавший меня на полуслове. Это помню точно — не успел договорить. Но что договорить — не помню.

Урок без меня. Собираюсь в школу, и вдруг из водопроводной трубы забил фонтанчик, заливая квартиру. Звоню в аварийную службу и в школу — говорю завучу, что на первый час спаренного урока, видимо, опоздаю. Приезжаю в школу ко второму часу. Спрашиваю, что они тут без меня делали.

- То же, что и с вами бы делали,— проверяли домашнюю самостоятельную работу.

— Был кто-нибудь из учителей?

— Нет, мы сами управились.

— Отметки себе поставили?

— Конечно.

Отметки, как за домашнюю самостоятельную, выставил в журнал.

Контрольная работа в 7 классе. Я пошёл позвонить в учительскую. Зашла завуч и спросила у меня: «А что делают без вас дети?»

— Пишут контрольную.

— Без вас?

— А вы зайдите к ним и посмотрите.

Посмотрела, вернулась.

— А где задание для них?

— Как это где? На доске, разумеется.

— Но там всего один вариант.

— Ничего странного, дети уже привыкли.

Три урока. А остальные? Просто работа —- тут бы поставить сразу два знака: и вопросительный знак, и многоточие.

Мне нравится притча о Шартрском соборе. Путник спросил трёх его строителей, кативших по дороге тачки с камнями, что они делают.

Первый сказал:

— Везу тачку, пропади она пропадом.

Второй сказал:

— Зарабатываю на хлеб. Семья.

Третий сказал:

— Я строю Шартрский собор.

Что бы сказал путнику я? И первое, и второе, разумеется. Смог ли бы я сказать третье?

Так зачем же я иду на урок? Ну, конечно, преподавать математику. Математика так важна, математика так полезна, математика так интересна, какие тут могут быть сомнения — с такими мыслями, взращёнными в студенческие годы, я пришёл работать в школу сразу по окончании института и довольно долго их лелеял. Теперь от них мало что осталось. Всем ли математика важна? Всем ли интересна?

На геометрию в школе отводится около 400 ч. Так ли уж важны для всех с точки зрения общего образования, скажем, свойства вписанных углов, уравнение плоскости в пространстве и построения именно циркулем и линейкой? Так ли уж полезно для всех умение решать треугольники? («Зачем Лидии Васильевне сферическая тригонометрия?» — вопрошает один из героев А. Островского.) Может быть, важнее научить делать искусственное дыхание? Может быть, полезнее дать детям курс практической психологии — учитесь властвовать собой! Мне не один раз довелось выслушивать от учеников этот вопрос — а зачем? И даже не надо было выслушивать — его можно было видеть в их тоскливых глазах . Я научился отшучиваться, цитировал В. Маяковского: «Крошка сын к отцу пришёл, и спросила кроха: « Папа или мама, а как решить задачку, которую нам задали?» Но даже если дети не задают этот вопрос, а успешно решают разные примерчики, то тем более вопрошаешь сам себя: «Что же я с ними делаю, чем же таким необходимым для них я с ними занимаюсь?» Впрочем, я не оригинален в таком вопросе. Вот что нам выдал журналист Ю. Рост: «Господи, каким только мусором не забивали нам голову учителя! Что, какая часть из того, чем мучили нас и чем мучают теперь наших детей, сгодилась нам в жизни для дела, любви, радости?»

И даже такое было сказано американской журналисткой Ф. Лебовиц: «Твердо стойте на своем нежелании вникать в формулы алгебры. В реальной жизни, уверяю вас, никакой алгебры нет».

И в самом деле, 90% школьников никогда не будут использовать математику в своей деятельности. И в самом деле, мои коллеги и друзья, специалисты гуманитарных профессий, из всего школьного курса устойчиво помнят разве что теорему Пифагора. Да и как сказать. Мой коллега поведал однажды, что вспоминают учителя (не математики) в ответ на прямой вопрос: в чём суть теоремы Пифагора? Среди ответов были и такие: «В треугольнике три стороны» и «$3^2 + 4^2 = 5^2$».

В 1976 году журнал «Математика в школе» опубликовал статью «О сохранности математических знаний». Её авторы В.

Панкратова и А. Сергеева провели в университете некое исследование среди студентов гуманитарных факультетов, причём, надо заметить, большинство из них окончили школу с хорошими оценками по математике. Что же показало исследование?

1. Определения математических понятий, даже таких основных, как понятия функции, уравнения, иррационального числа, простого числа, через 2—3 года после окончания средней школы исчезают из памяти выпускников полностью. При этом забываются не только чёткие формулировки соответствующих определений, но и существенные признаки понятий. В памяти остаются лишь внешние, несущественные их признаки , наиболее часто встречающиеся в практической деятельности в период обучения в школе. В силу этого представления о понятиях сохраняются нечёткими, часто неверными, непригодными к использованию.

2. Неосознанные умения быстро утрачиваются (выполнение тождественных преобразований тригонометрических выражений, решение квадратных уравнений и т. п.). Лишь те умения, которые были доведены почти до автоматизма или сохранили теоретическую основу, остались действенными (приведение подобных членов, умножение многочлена на одночлен, умножение многочленов, алгоритмы решения уравнений).

3. Многие выпускники не обнаружили умения проводить самостоятельно простейшие математические рассуждения. Так, не вспомнив формулы площади поверхности прямоугольного параллелепипеда, испытуемые не смогли сами вывести её.

4. Отсутствует у выпускников и самоконтроль, критическое отношение к своим действиям, высказываниям. Вот так.

А. Пушкин заметил как бы между прочим, но совершенно точно:

«Мы все учились понемногу / Чему-нибудь и как-нибудь.»

«Чему-нибудь» — это программа, «как-нибудь» и «понемногу» — это, выражаясь современным языком, методика и организация обучения. Вопроса «зачем?» мы здесь не видим. Своим появлением этот вопрос обязан такой концепции общего среднего образования, при которой одинаково надо учить всему и всех, даже тех, кто не хочет, и тех, кто не может.

Я никогда не «боялся» инспекторов, методистов, администрации — пусть ходят и смотрят, что я делаю. Никогда не понимал так называемых «открытых уроков», из которых делают спектакли. Как вообще можно прятать от людей свою деятельность? Секретов у меня никаких нет, работа наша большая, всегда делаешь что-нибудь не так. В оценках, которые доводилось мне выслушивать, бывало много вкусового, и, к сожалению, мне так и не довелось послушать серьёзного профессионального разбора хотя бы одного из моих уроков. Но не в этом дело. Как отчитаться в своей работе перед детьми? Как вдохнуть смысл в их ежедневную и практически однообразную деятельность?

Как-то получается, что, оставаясь только в рамках предмета, я не мог сам себе ответить на этот вопрос. Вся моя энергия, и нервная, и физическая, похоже, уходила «в свисток».

Немудрено, что такое толкование ситуации приводило к постоянному профессиональному дискомфорту. Появились и невесёлые симптомы —-однажды пришлось брать бюллетень почти на месяц. Как тут не вспомнить А. Чехова — один из его персонажей, старый педагог, воскликнул в дневнике: «Дети! Какое блаженство получать пенсию!»

Но, как говорят, «появился свет в конце туннеля». Выход вроде бы нашёлся в попытках решить на уроках математики не только и даже не столько задачи обучения, сколько задачи образовательные, в частности, воспитательные. В самой общей постановке решение этих задач, как и любых общепедагогических задач, неоднозначно. Многое зависит от толкования таких понятий, как «образование», «обучение», «воспитание», «просвещение», «развитие», а эти толкования не единственны. (Для меня: образование = просвещение (знания) + обучение (умения) + воспитание (ценности); преподавание = просвещение + обучение.)

На практике воспитание может идти в разных направлениях. Говорят об интеллекте, мировоззрении, характере, нравственности.

Сам перечень не полон, и приведённый порядок — условность. Традиционно на первое место в этом перечне наша педагогика ставила воспитание мировоззрения, причем научного, ещё точнее — диалектико-материалистического. Привлекательна точка зрения о том, что пишет В. Овчинников в «Корнях дуба»: в Англии в лучших частных школах на первое место ставят воспитание характера. Можно делать особый акцент на воспитании творческого начала личности, в частности, на её социальной активности. И наконец, никаких результатов в образовании не добиться, если у ученика нет необходимой мотивации.

Когда начинаешь двигаться в новом направлении, открываются и новые горизонты. Сама постановка задачи — воспитание ученика в процессе   преподавания конкретного предмета — вряд ли нова. Издавна известно ведь: «Учитель, воспитай ученика». Не «научи», что так естественно, а «воспитай»! Что же стоит за этим «воспитай»?

Воспитай, как я понимаю,— передай детям частицу самого себя, своего понимания предмета, понимания смысла образования, в частности, математического, передай свои приятия и неприятия, передай своё отношение к работе. И тут, совершенно ясно, никаких методичек и быть не может. Всё, что я хочу передать детям, именно передать, а не перепасовать,— то «разумное, доброе, вечное» — существует только как часть моего «я» — и никак иначе. Я как «обучатель» или «просветитель»— проводник, но я как «воспитатель» — генератор.

А теперь вернёмся к линиям в воспитании. И тут, где, казалось бы, всё ясно с точки зрения теоретической педагогики, сколько монографий создано, главнейшее — личностное влияние. Мировоззрение, к примеру, не в книжках сидит, а в собственной голове. К тому же его не продиктуешь и на дом не задашь, чтобы выучили к следующему уроку.

Как можно было воспитывать у ребёнка ответственность за собственную работу, если по большому счёту её не было у меня самого? Вопрос отнюдь не риторический. Многие годы, что я проработал в школе, у нас была единая программа, единый учебник, единые экзамены, единый обязательный уровень образования и единые требования к отметкам, а теперь вводятся стандарты. Но если всё едино и обязательно, то у меня нет возможности выбора, а если нет её, то самостоятельностью и тем более ответственностью даже не пахнет. Их нет по сути, так как нет серьёзного личного решения. И в самом деле, посмотришь на большинство методических статей — и что видишь? Из года в год обсуждение весьма частных задач преподавания. Попытки выйти за эти пределы, мягко говоря, не приветствовались. Некогда мой коллега получил выговор от администрации за преподавание в школе интегрального исчисления, которое не входило тогда в программу.

Мне ещё повезло — я сделал многое из того, что хотел. Но тем не менее вот два примера из моей практики. Из некоторых соображений мне было удобно в старших классах чередовать занятия алгеброй и началами анализа с занятиями геометрией — неделя алгебры, затем неделя геометрии или даже так: две недели алгебры, затем две недели геометрии. Администрация не возражала в принципе, но журнал я должен был заполнять по-старому, т. е. по стандартному регламенту занятий, когда каждую неделю есть уроки как алгебры, так и геометрии. Довольно быстро я перестал соображать, куда и что надо записывать.

Ещё пример - преподавание информатики, когда оно только вводилось. Дисциплина была для меня, по существу, новая, пришлось долго вникать в дело. Когда пришла некоторая ясность, я изучил только что созданный школьный учебник под редакцией А. Ершова и В. Монахова. То, что в нём сказано мало соответствовало тому, что я понял. Пришлось готовить совсем другой курс. Никто после моих объяснений не возражал против предлагаемой трактовки, но в журнал мне посоветовали делать записи в соответствии с разделами учебника.

Перейдём к мотивации. По-моему, невозможно воздействовать на появление и развитие интереса детей к математике, если затух собственный интерес к ней. Невозможно передать школьнику радость от решения трудной задачи, если сам уже забыл, что это такое.

При всём при том необходимо как можно чаще ощущать себя в «шкуре ученика». Делается это весьма просто — вполне достаточно, если в голове «сидит задача», к которой не знаешь как и подступиться, а на столе лежит математическая книга, в которой непонятна уже первая страница.

Персонаж кинофильма «Доживём до понедельника» — пожилая учительница — жалостливо произносит что-то вроде:

— Им отдаешь целиком самого себя, а они... (имея в виду учеников).

— Дело не в этом,— отвечает главный герой фильма,— А есть ли у нас, что отдать?

За достоверность фраз не ручаюсь, но смысл точен.

1.2. «АСУ» УЧИТЕЛЯ

Осмысливая свою деятельность учителя-предметника в школе, я пришёл к выделению трёх её составляющих: **установки, системы** и **атмосферы** — «АСУ», как я их называю сам для себя, составив аббревиатуру в обратном порядке. Я сразу же хочу оговорить, что эти составляющие, конечно, не абсолютны. Более того, наверняка есть разумная работа теоретического характера, в которой вся деятельность учителя разложена по полочкам. Даже если так, давайте предположим, что педагогическая теория ценна для нас в первую очередь тем, что мы смогли из неё присвоить и употребить в дело. В конце концов что-то из этой теории начинаешь постулировать для себя, как нечто исходное. И становится не так важно — в практическом отношении, — откуда эти постулаты появились. Главное, чтобы они работали, (Многие мои коллеги и профессиональные математики весьма скептически относятся к теоретической педагогике. Я уподоблю их инженеру, который полагает, что $\pi = 3{,}14$, на худой конец — 3,1416, а всё остальное от лукавого.)

Теперь я постараюсь раскрыть содержание «АСУ», как я его понимаю. Установка отражает ту часть целей и ценностей, которая принята учителем для повседневной деятельности. В конечном счёте она отражается на его учениках, если понимать это достаточно широко. Конкретно: знает ученик о геометрии Лобачевского или нет, зависит не столько от программы, сколько от установки учителя, а ещё глубже — от его интерпретации целей и ценностей образования.

Различать цели и ценности необходимо. Например, можно поставить такую цель — научить школьника строить графики несложных функций, что легко проверяется. К ценностям же разумно отнести такие параметры образования, выявление которых проблематично, а то и невозможно. Как, например, проверить наличие у выпускника научного мировоззрения?

Установка включает в себя отношение к математике, к задачам образования и отношение к ученику. Причём это отношение должно быть очень личным, выращенным в себе. Пусть при этом оно будет односторонним, возможно, корявым — я готов принять любые упрёки. Но это — моё, и с этим я иду в класс.

Можно ли говорить о своём понимании математики? Думаю, что не только можно, но и необходимо. Оно начинается с детских лет собственного ученичества, формируется в студенческие годы, обогащается в дальнейшем чтением и встречами с профессионалами-математиками и уточняется в практике преподавания. За годы работы учитель не один раз столкнётся с изменением программ, учебников. В этом нет ничего страшного, более того, такой процесс естественен: меняются времена — меняются ценности и цели образования, вызывая все последующие изменения. Причины новаций могут быть и непредсказуемы. Кто, например, мог предвидеть, что преподавание школьной математики так сдвинется под влиянием Н. Бурбаки? В каком-то смысле история повторилась: «Начала» Евклида вовсе не были учебником по геометрии для школьников, но ещё сравнительно недавно по ним кое-где учили детей. В последнее время, наоборот, шарахнулись от Н. Бурбаки. Не имея собственного взгляда на предмет, легко оказаться в растерянности.

Что же для меня математика, даже в своих элементарных основах? Прежде всего — наука, а не практическое руководство по счёту и измерению, не набор сведений, которые надо вбить в голову ребёнка, что при известном усилии всегда можно сделать, не набор задач и примеров, которые надо решить, чтобы набить руку для поступления в вуз, а нынче – для написания ЕГЭ.

Именно потому, что большинство учеников общеобразовательной школы не будет использовать математику в своей профессии, именно потому, что, быть может, от учителя они слышат последние в своей жизни математические фразы, именно потому важно, чтобы они имели представление о математике как о науке. Но дело не только в этом, даже не столько в этом. Через математику (а других средств у меня просто нет) я хочу передать детям научный стиль деятельности, прежде всего критичность, самостоятельность, добросовестность и ответственность. Я надеюсь, по всей вероятности наивно, что влияние этого стиля хоть как-то защитит их в будущем от лавины пошлости, чепухи, демагогии и попросту вранья. «Кто пропитался с детства математикой в такой мере, что усвоил себе её неопровержимые доказательства, тот так подготовлен к восприятию истины, что нелегко допустит какую-нибудь фальшь» — так сформулировал в XVII в. П. Гассенди. Но это не всё.

Вопрос, который задаёт общество самому себе и, похоже, нет на него окончательного ответа: «Почему во всём мире математика составляет обязательную и значительную часть общего образования, почему на неё отводится так много времени?»

Как ни странно, не вполне чётко объясняется обществу ценность МО.

В самом деле, математику в школе преподают 11 лет и по многу часов, детей обучают всяким замысловатым формулам, каковых полно в алгебре и тригонометрии – зачем всё это? Ведь потом большинство выкинет всё это из памяти, им никогда не придётся раскрывать скобки. Если вдуматься, то в реальной жизни большинству более или менее нужны арифметика и геометрия. А ныне в экзаменационную пору от ученика именно эти сведения требуются меньше всего. Не парадокс ли?

Мой ответ самому себе такой.

1) Математика – школа преодоления интеллектуальных трудностей в абстрактной сфере. Многовековая традиция её преподавания сумела выстроить эту школу

2) Музыка - это красота звуков, живопись – красота красок, поэзия – красота образов, проза – красота языка, математика – красота мысли.

3) Математика – то общее, что есть во всей человеческой деятельности.

Тому – тьма примеров. Осталось донести их до детей.

Возможно, сгодится и такая попытка объяснения - конспективно.

В конечном счёте, образование в целом и математическое образование , в частности, готовит ребёнка к некоему виду деятельности (хотя это далеко не всё).

Инновационная деятельность в обществе сводится к решению разнообразных задач. Задачи эти решаются людьми с развитым теоретическим или практическим мышлением. И тот, и другой тип мышления требует определённой логической культуры. В среднем образовании об этой культуре печётся в первую очередь математика.

Эти типы мышления не следует противопоставлять, они могут достаточно тесно переплетаться, например, в инженерной или преподавательской деятельности - особенно, когда что – то не получается в живом деле и требуется понять, в чём загвоздка.

Основой теоретического мышления является абстрактное мышление, то есть мышление понятиями. Простейшая работа с научными понятиями в школьном образовании происходит именно в математике, ибо первичные математические абстракции (число, фигура) проще абстракций в других сферах научного знания.

Далее.

Чрезвычайно важное значение в развитии ребёнка имеет мотивация. Она во многом обеспечивается удовольствием, полученным в процессе образования. Наибольшее удовольствие в интеллектуальной деятельности доставляет хорошо сделанная и по достоинству оценённая работа. Однако пятидесятое самостоятельно решённое квадратное уравнение вряд ли доставит удовольствие, особенно способному ребёнку. Поэтому наиболее ценно удовольствие, которое получено после определённых интеллектуальных усилий. Для этого требуется преодоление посильных трудностей, связанных с абстрактным мышлением, . Именно в математическом образовании эти трудности на протяжении всех одиннадцати школьных лет возникают совершенно естественно, они хорошо известны, разумно выстроены; известно, как помочь ребёнку их преодолеть.

Среднее математическое образование – школа создания и развития у ребёнка потребности в преодолении интеллектуальных трудностей, а потому оно способствует становлению волевых качеств личности.

Однажды во время дискуссии с коллегами я сказал, что мне нравится в среднем один свой урок из ста. А почему? Да потому, что я занимаюсь с детьми не наукой, а неизвестно чем. Вынужден так делать, увы.

Собственное понимание предмета накладывает обязательства, которые не всегда удаётся выполнить.

Математика предстает передо мной разными своими сторонами.

1. *Математика — дедуктивная паука,* давшая миру аксиоматический метод и некие эталоны строгости рассуждений. Можно

начать с небольшого числа аксиом и всё остальное время, продвигать теорию.

2. *Математика — способ познания мира* («Основа точного естествознания»,— говорил Д. Гильберт) и средство для практической деятельности в этом мире. Предсказать затмение или погоду, построить здание, найти оптимальное решение — примеров, подобных этим, сколько угодно.

3. *Математика — это специфическая техника,* набор приёмов и методов для решения разнообразнейших задач, возможность постоянно тренировать и совершенствовать эту технику. В элементарной математике достаточно вспомнить геометрию треугольника.

И каждая из этих сторон накладывает свой отпечаток на собственную работу.

В силу дедуктивного характера математики я обязан доказывать всё, на что потом собираюсь ссылаться. Не вообще всё, что я говорю детям, есть интересные результаты, доказательство которых дать ученикам просто невозможно, например трансцендентность чисел π и e. Порой дать приемлемое доказательство очень непросто. К примеру, традиционно в школе нет доказательств, связанных со свойствами вещественных чисел: почему, например, $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$?

И что делать? «Отсутствие доказательства для математика подобно зубной боли»,— сказал кто-то. Вряд ли такое состояние возникнет у школьника, если ему вместо доказательства предложат толковое разъяснение, разумеется, не выдавая его за доказательство. Надо искать какие-то выходы, постараться найти другие способы убеждения. При этом единство метода не так важно — важнее дать какое-то доказательство, чем не давать никакого. Можно обыграть то обстоятельство, что сам термин «доказательство» в рамках школьной математики не имеет чёткого определения, насколько я знаю, и далеко за её пределами тоже. Я вполне согласен с таким пониманием доказательства: «Доказать — это убедить другого настолько, что другой сам готов убеждать этим же способом». Отсюда сразу же следует, что доказательства могут иметь разный уровень строгости в зависимости от адресата. Одно дело — доказывать ученику, другое — учителю, третье — профессионалу-математику и уж совсем другое дело — доказывать специалисту по математической логике. И сразу надо сделать оговорку, чрезвычайно существенную для преподавания: абсолютизация этого требования «доказывать всё» приводит к абсурду. Весь опыт преподавания математики говорит о том, что, прежде чем начать что-то доказывать, необходимо пробудить в ученике потребность в доказательстве. Отсюда проистекает серьёзная задача — найти тот уровень строгости, который оказался бы достаточным для обоснования всего существенного и был бы доступен для ученика. О том, что задача эта не только важна, но и трудна, говорит простое наблюдение: есть авторы школьных учебников, которые отождествляют школьный курс геометрии с курсом её оснований, и есть полярная точка зрения, полностью отрицающая аксиоматический метод в преподавании и даже необходимость доказательств. Как мне кажется, оба уклона говорят об отказе авторов решать, а может быть, даже и ставить перед собой эту педагогическую задачу.

Известно, что по мере взросления ребёнка можно предъявлять к нему при соответствующем обучении всё более высокие требования при доказательствах.

Так, в начале курса геометрии вряд ли требуется доказывать, что диагонали параллелограмма пересекаются. Но в старших классах можно обсуждать, почему отрезок, соединяющий точки на разных гранях двугранного угла, пересекает плоскость, проходящую через его ребро и делящую угол пополам. Но даже и старшеклассники вряд ли будут чувствовать потребность в доказательстве, например, того, что выпуклый многогранник является пересечением полупространств, ограниченных его опорными плоскостями.

Что тут поделать — такова природа процесса познания , она, к сожалению, противоречива (а может быть, к счастью?), и превратить живое преподавание в формализованную до конца процедуру вряд ли возможно. Попытки загнать его в некие рамки можно как-то оправдать, но всегда будет интересным только такое преподавание, которое выходит за эти рамки. Что бы мы ни исповедовали в школе, важно не перегибать палку. Надо ли определять, к примеру, что такое функция, уравнение?

Есть притча о трёх апельсинах. В семье заболел ребёнок, родители пригласили врача. Врач обследовал мальчика и сказал:

— Ребёнку нужен один апельсин.

— А два? — спросили родители.

— Два — ещё лучше,— ответил врач.

— Тогда, может быть, дать три апельсина?

— Нет,— ответил врач.— Три апельсина уже хуже.

Уровень строгости в доказательстве, как я уже говорил, не является абсолютом. Любопытно, однако, что иногда это можно продемонстрировать в классе, оставаясь в рамках одной и той же теоремы. Приведу такой пример — доказательство теоремы о производной сложной функции. В свободном переложении её содержание таково: пусть функция $y(x)$ дифференцируема и функция $z(y)$ дифференцируема. Тогда $z'_x = z'_y \cdot y'_x$. Вот «доказательство».

Пусть известна $y'(x)$, т.е. скорость изменения величины y относительно x, и $z'(y)$, т. е. скорость изменения величины z относительно y. Требуется найти z'_x , т. е. скорость изменения величины z относительно x. Возьмём простой пример: по трём дорожкам бегут три спортсмена. Медленнее всех бежит первый. Второй бежит в два раза быстрее первого. Третий бежит в три раза быстрее второго. Во сколько раз третий бежит быстрее первого? Ясно — в шесть раз. (Найдутся такие ученики, которые скажут в пять.) Что делается с этими скоростями? Они перемножаются! Поэтому $z'_x = z'_y \bullet y'_x$.

У меня было много учеников, которых вполне убеждало такое рассуждение. Но если возникало сомнение, то от этого рассуждения, трактующего производную как скорость, можно перейти к более формальному, например такому: возьмём достаточно малое приращение Δx. Так как $y(x)$ имеет производную, то мы можем считать $y\ (x)$ при этих Δx линейной функцией: $y = \kappa_1 x + l_1$. Когда Δx достаточно мало, то и Δy достаточно мало. Поэтому мы можем считать, что при этих Δy
функция $z\ (y)$, также имеющая производную, является линейной: $z = \kappa_2 y + l_2$.
Выразим $z(x)$: $z\ (x) = k_2\ (\ k_1 x + l_1\ ) + l_2 = (k_2 k_1)x + k_2 l_1 + l_2$ Угловой коэффициент функции $z(x)$ оказался равным произведению угловых коэффициентов κ_1 и κ_2. Но угловой коэффициент этой линейной функции и есть производная. Отсюда получаем $z'_x = z'_y\, y'_x$.

Наконец, можно перейти к совершенно формальным выкладкам. Возьмём произвольное приращение Δx . Тогда $\Delta y = (y'_x + \alpha\ )\ \Delta x$ и $\Delta z = (z'_y + \beta\ )\ \Delta y$.

Здесь α и β — бесконечно малые функции. Дальнейшее рассуждение хорошо известно, и я не буду его приводить.

Я не уверен, что сразу же стоит давать именно третье доказательство. Во всяком случае, к такому доказательству учеников надо готовить. (То же можно сказать о доказательстве с помощью пределов.)

Сразу же выскажу сожаление, что авторы учебников математики «боятся» ввести в школу дифференциальную символику и не пишут $y'_x = \mathrm{d}y / \mathrm{d}x$ (физики это делают легко).Доказательство заняло бы одну строчку и было бы всего лишь формальной записью первого рассуждения.

Итак, или доказательства есть — и тогда это наука, или их нет — и тогда это байки. Из этого категорического утверждения вовсе не следует, что я требую от учеников знания или даже повторения доказательств. Ни в коем случае! По-моему, от ученика вовсе не нужно требовать воспроизведения большинства доказательств теорем школьного курса — только самых основных, самых важных, я бы даже сказал самых хороших. («Хорошее доказательство то, которое делает нас умнее»,— пишет Ю. Манин.) Только такие доказательства и стоит воспроизводить. Вот что примерно я говорил в общеобразовательной школе :

— Я понимаю, что большинству из вас сама математика не нужна, а это доказательство тем более. Вам и так всё очевидно. (Предположим, речь идет о теореме Больцано — Коши: непрерывная функция, имеющая на концах некоторого промежутка разные знаки, внутри этого промежутка обращается в нуль.) Более того, вы и так мне поверите, без всякого доказательства. («Зачем вы так долго трудитесь над доказательством,— сказал некто математику,— слова дворянина вполне достаточно, чтобы я вам поверил».) Но я хочу другого. Я хочу, чтобы вы ясно понимали: там, где нет доказательств, там нет и самой науки.

Вторая сторона математики – практическая - мне особенно близка. Хочется привести тут две фразы. Одна — достаточно ироничная — принадлежит Л. Стерну: «...обычная слабость величайших математиков, которые так усердно трудятся над доказательством своих положений и настолько при этом истощают все свои силы, что уже не способны ни на какое практически полезное применение доказанного». Другая высказана в афористической форме и приписывается Г. Штейнгаузу: «Математик это сделает лучше!» А что такое «это» — неважно. Из истории математики известно множество примеров, подтверждающих правоту Г. Штейнгауза.

Решив задачу о семи кенигсбергских мостах, Л.Эйлер в одном из своих писем пишет: «Это решение по своему характеру, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только рассуждением и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике. Итак, я не знаю, каким образом получается, что вопросы, имеющие совсем мало отношения к математике, скорее разрешаются математиками, чем другими».

В школьной практике много ситуаций, подтверждающих иронию Л.Стерна, и очень мало — говорящих о правоте Г. Штейнгауза.

Традиционно прикладная сторона математики в среднем образовании была на положении Золушки. О ней, разумеется, знали , были неплохие методические работы — обычно они шли под лозунгом межпредметных связей. Однако я не помню, чтобы мало-мальски серьёзные задачи прикладного содержания предлагались ученикам на экзаменационной, контрольной или самостоятельной работе. Отсюда, в частности, и отношение к таким задачам со стороны учителей. Замечу также, что и в иных учебниках не очень-то жалуют эту сторону математики. Вот только один пример: традиционно рассказ о производной начинается с задачи о нахождении мгновенной скорости неравномерного прямолинейного движения; однако мне довелось видеть подход к этому понятию , никак не связанный с проблемами, которые поставило перед математикой развитие естествознания.

Но как бы передать детям убеждение, что математика не бухгалтерия, и не фокусы с закорючками, и не интеллектуальное времяпрепровождение? Как сделать так, чтобы детей не отпугивала абстрактность понятий, формализм определений, занудность доказательств, искусственность задач и полная оторванность от их реальных проблем?

В последние годы, правда, положение стало несколько меняться. Видимо, это вызвано возросшей ролью прикладной математики в жизни современного общества (или, если угодно, усилением прикладного направления в математике). Появились серьёзные методические работы, наборы прикладных математических задач. На уроке уже позволительно составить хотя бы пару дифференциальных уравнений, решить задачу линейного программирования, ещё кое-что. Но этого мало, очень мало. Конечно, можно рассказать, как И.Кеплер искал законы движения планет, как измерили расстояние от Земли до Луны, каким путем летит самолёт из Новосибирска в Санкт-Петербург. Всё это хорошо, но не решает проблемы. На самом деле нужна деятельность по решению прикладных задач, и как можно более частая. Повод для такой деятельности можно найти даже в ежедневных газетах. Один пример. Как-то было напечатано такое сообщение из-за рубежа: «Министр социального обеспечения Великобритании Николас Скотт сообщил депутатам парламента, что с 1984 по 1988 год число мужчин, достигших столетнего возраста, увеличилось в стране со 100 до 210. В случае сохранения этой тенденции через 66 лет на Британских островах почти невозможно будет встретить мужчину моложе 100 лет». Вопросы ученикам: каким образом министр получил число 66 и как вы относитесь к его выводу?

После одного давнего случая я стал относиться к практическим задачам с большим почтением. Был как-то у меня (я работал тогда в математической школе) выдающийся ученик Саша Л.- победитель всяческих олимпиад по математике и физике, включая международную. Учась в 7 классе, он стал победителем городской олимпиады по 11 классу, а в 8 классе полностью был знаком с курсом анализа Г. Фихтенгольца. Как-то он мне сказал: «У меня сейчас такое ощущение, что я могу решить любую задачу». И это не было бахвальством. В 11 классе он заинтересовался некоторыми проблемами высшей алгебры. Я попросил содействия у профессора университета. Профессор пригласил Сашу на свой семинар для старшекурсников и аспирантов по теории Галуа. Я предупреждаю Сашу, что семинар идёт для специалистов по алгебре. «А о чём у них семинар?» — спрашивает он. Я отвечаю и даю ему книгу А. Постникова по теории Галуа. До очередного занятия семинара оставалось меньше недели. Когда Саша появился в школе на следующий день после семинара, я, естественно, поинтересовался, как прошло занятие.

- Нормально.

— И ты всё понял?

— Почти всё.

— А книжка помогла?

— Конечно. С книжкой было проще —там я понял всё.

Так что прикажете делать с таким вот учеником на устном выпускном экзамене по геометрии, который проводился тогда по общегосударственным билетам для массовой школы? На глаза мне попалась модель неправильной треугольной пирамиды. И что-то пришло в голову.

— Вот тебе тетраэдр и вот тебе линейка. Чему равен объём этого тетраэдра?

Проблема ясна: как вычислить высоту тетраэдра? В громадном числе задач на объём пирамиды она обычно дана или легко находится. А тут неясно даже, в какую точку основания она падает.

Задачу эту Саша, конечно, решил, но, как говорится, пришлось ему «попотеть».

В прикладной задаче, если говорить в общем, важна сама её постановка: учёт условий и формулировка вопроса. Почему выбраны именно эти условия и почему задан именно этот вопрос? В традиционной школьной математике всё иначе: дано вот это, а доказать (вычислить, найти, построить) требуется вот это.

«А откуда они знают, что давать?» — спросила меня как-то вконец недоумевающая семиклассница (сейчас она – преподаёт математику в вузе). Я бы добавил: «И откуда они знают, что спрашивать?»

Третья сторона математики — техническая, в которой она предстаёт как набор методов и приёмов решения разнообразнейших задач. Важность этой деятельности бесспорна, тут даже обсуждать нечего. При этом она хорошо разработана в методической литературе. Беда, однако, состоит в том, что именно эта сторона математики оказалась в школе главенствующей. Есть две замечательные популярные книги о математике в целом: "Что такое математика" Р. Куранта и Г. Роббинса (Р. Курант - выдающийся учёный. Его именем назван математический институт в Нью - Йорке.) и "Математика и логика. Ретроспектива и перспективы" М. Каца и С. Улама - профессионалов высочайшего класса - и посмотрим, что они хотели рассказать. Так вот - о треугольниках и окружностях почти ничего и никаких тебе логарифмических уравнений, тригонометрических неравенств…. Поневоле призадумаешься….

И вот теперь наш разговор об отношении к математике переходит в разговор о математическом образовании.

Этот разговор в каком-то смысле разговор ни о чём. В самом деле, насколько мне известно, содержание среднего математического образования не было ещё задачей обстоятельного педагогического исследования. Та математика, которой учат в школе,— это продолжение того, чему учили когда-то в России. Но ведь в иных странах тоже реализуют среднее математическое образование. И там, судя по обзорам в печати, оно понимается как-то иначе. Не может быть, однако, того, чтобы математика была интернациональной, а математическое образование — по сути своей — национальным. Может быть, ответ на вопрос «Что такое среднее математическое образование?» должен решаться не за столом учёного той или иной страны? Я рискну даже сделать такое предположение: может быть, стоит понимать под средним математическим образованием пересечение того, что понимают под этим в странах, которые имеют в этом деле устойчивую репутацию, скажем, в тех странах, которые регулярно посылают свои команды школьников на международные математические олимпиады? Но пока обо всём этом договорятся (да и договорятся ли?), что-то понимать для себя необходимо.

Я иногда задаю коллегам такие два вопроса:

1. Считаете ли вы, что ваш ученик знает математику (имеется в виду школьный курс), если он знает назубок содержание справочника по элементарной математике, т. е. знает все формулы, все теоремы и даже методы решения стандартных задач?

2. Считаете ли вы, что ваш ученик знает математику, если он умеет решать все задачи из какого-либо задачника для поступающих в вузы?

Ответ на первый вопрос я слышал только отрицательный. Ответ на второй вопрос неоднозначен, есть разные точки зрения. Важно, что они есть!

В той или иной степени среднее математическое образование, я убеждён, должно отражать все стороны математической науки. И отражать не только на бумаге: в программах, учебниках, но и в практической работе учителя. Но, как ни покажется парадоксальным, оно должно быть в каком-то смысле ещё шире. За счёт чего?

Во-первых, за счёт исторических сведений. Математика занимает тут в среднем образовании исключительное место. Трудно себе представить школьный курс физики без рассказа об атомной энергии, курс биологии без генетики и т. д. Самые последние крупные достижения математики, о которых более или менее подробно рассказывается в школе, относятся ко времени И.Ньютона и Г.Лейбница, между прочим, к допетровским временам по меркам нашей истории. Но ведь всё, что изучают сейчас, откуда-то взялось! Так откуда? Каким образом? Кто придумал? Как это было? Математика — это же не Талмуд, это живая, развёртывающаяся во времени деятельность, а раз так — это драма идей и людей, их триумфы и заблуждения. Расцветить историей можно почти каждый раздел курса. Здесь я приведу только один пример. Объём шара вычисляется по формуле $V = (4/3)\ \pi R^3$, где R — радиус шара. Формула как формула, ничего особенного, получается интегрированием. Но это сейчас. А как её получали до того, как были придуманы интегралы? И кто получил первым? Пропорциональность объёма шара кубу радиуса очевидна, но как получить коэффициент $(4/3)\pi$? Первым эту формулу получил Архимед — как он додумался? О том, как додумался Архимед, можно провести специальный урок, посвящённый межпредметным связям, ибо этот результат он получил, используя соображения, взятые из механики.

Архимед, - говорю я детям, - признанный в истории науки учёным № 1, так гордился этим результатом, что хотел запечатлеть способ его получения на своём надгробии.

А история открытия иррациональных чисел, комплексных чисел, неевклидовой геометрии — какой здесь богатый материал для разговоров и бесед с учениками! А рождение, взлёт и падение логарифмов? Часть этой истории — последняя — произошла уже на памяти моего поколения. Учась в школе, я старательно логарифмировал многоэтажные выражения, «ползал» по логарифмическим таблицам и переживал, когда в выпускной работе по геометрии получил значение объёма, расходящееся с аналогичным результатом у моего сокашника на единицу третьего разряда после запятой. Потом я обучал всей этой премудрости детей — называлось это практической направленностью. Затем учил вместе с детьми устройство и правила обращения с логарифмической линейкой, учил вместе и забывал тоже вместе. А что теперь? Всё это отправилось в небытие с появлением калькуляторов.

Ещё пример — теория множеств. «Никто не сможет изгнать нас из рая, созданного для нас Г.Кантором»,— было сказано Д. Гильбертом. Но что делать с её парадоксами? И возникает вопрос: «А так ли уж эта теория необходима для обоснования геометрии, анализа?» В результате во многих странах из школьных учебников выкинули самые безобидные сведения даже о простейших теоретико-множественных понятиях.

Уж на что мы привыкли, решая уравнение, переносить всё в одну часть, оставляя в другой ноль. Уж куда проще? Но ведь это – событие в математике. Благодаря такому переносу, появилась теория решения уравнений в радикалах, основная теорема алгебры, решение уравнений стало увязываться с функциональными соображениями….

Да что говорить… И появление нуля, и позиционная система счисления, и буквенная символика – всё это когда – то появилось, не всегда было сходу принято и поневоле спросишь – а как же было до того?

Всё это, а также доступность этого для детей прекрасно известны. Однако в учебниках сведения по истории математики даются только для краткой справки, причем в «обесчеловеченном» виде: имена ученых есть, а что это были за люди, как они приходили к своим результатам — неизвестно. И уж если в учебнике приведен только некий триптих: год рождения — черта — год смерти, то ясно, что остаётся в памяти ученика. Один пример тому. Я как-то по случаю спросил у детей, говоря о ряде Фибоначчи, что они знают о самом человеке, именем которого назван этот ряд, то ответ был и такой: «Это – биолог», видимо, вспомнив задачу о кроликах.

Во-вторых, математика — мир чудес. «Клянусь Богом, это невозможно!»— воскликнул Т. Гоббс, когда в возрасте примерно 40 лет впервые познакомился с теоремой Пифагора. Как бы передать это ощущение чуда? Ведь мы так привыкли к своему делу, что никаких чудес в математике уже и не видим. Но!

Три медианы в треугольнике имеют общую точку.

— Какое же это чудо? — заявили мне шестиклассники, когда увидели сей факт, аккуратно выполнив построения в тетрадке.

— Но это же получилось у всех, правда? — говорю я.— А вы можете объяснить, почему это получилось у всех? Ещё нет. А то, что нельзя объяснить, но происходит, и есть настоящее чудо.

И я помню, как мои выпускники в математической школе ошарашенно смотрели на формулу Л.Эйлера: $e^{\pi i} + 1 = 0$.

В математике можно доказать бесконечность (например, бесконечность последовательности простых чисел. И как доказать! В одну строчку!) В математике доказывают невозможность (например, невозможность решения в рациональных числах уравнения $x^2 = 2$). В математике можно доказать вообще нечто невообразимое (например, что на открытом интервале «столько же» точек, что и на всей прямой. Для этого достаточно построить график тангенса на промежутке (-0,5π. 0,5π). Однажды мой коллега — литератор — по этому поводу произнес: «Я понимаю, что это так, но всё равно — не верю»). А что бы он сказал, интересно, узнав, что в отрезке "столько же точек", сколько в построенном на нём квадрате, а в этом квадрате "столько же точек", сколько в построенном на нём кубе; узнав о канторовом совершенном множестве?

Напомню некоторые "чудеса с бесконечностью", не углубляясь в детали.

1. Можно над отрезком единичной длины построить ломаную бесконечной длины , причём без самопересечений. Это делается так. Нарисуем прямую. На этой прямой отложим последовательно отрезки длиной 1/2,1/4,1/8 … и т. д. , соответствующие бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем 1/2; её сумма равна 1. Из начала первого отрезка в одной полуплоскости от данной прямой построим ломаную, соответствующую гармоническому ряду. Первое звено этой ломаной возьмём равным 1 и так его построим, что оно проектируется (ортогонально) на отрезок нашей прямой длиной 1/2. Второе звено этой ломаной возьмём равным 1/2 и так его построим, что оно проектируется (ортогонально) на отрезок нашей прямой длиной 1/4. Третье звено этой ломаной возьмём равным 1/3 и так его построим, что оно проектируется (ортогонально) на отрезок нашей прямой длиной 1/8. И так далее, до бесконечности. Гармонический ряд расходится, а потому длина такой ломаной сколь угодно велика, хотя проекция любой её части и её самой короче 1. Если эта ломаная имеет вид зигзага, получается любопытный факт: она целиком умещается в ограниченном куске плоскости, в квадрате со стороной 1.

   Эту ситуацию можно оживить, представив себе, что по построенной нами ломаной начала двигаться из левого нижнего угла квадрата материальная точка, причем с громадной скоростью . Она будет сколь угодно далеко по своей траектории удаляться от начальной точки своего движения, но, постоянно приближаясь к правой стороне квадрата, никогда не выйдет за его пределы. Это можно представить ?

2. Рассмотрим единичный отрезок и квадрат, построенный на нём. Каждая точка единичного отрезка [0, 1] может быть записана как бесконечная десятичная дробь в пределах от 0 до 1. Так же двумя координатами можно зафиксировать точку единичного квадрата и получатся две десятичные дроби, каждая из которых лежит в промежутке от 0 до 1. Теперь. данной точке единичного отрезка можно сопоставить точку единичного квадрата, если из данной десятичной дроби образовать две координаты: в одной из них выписать все чётные по номеру цифры данной дроби, а в другой – нечётные по номеру. И наоборот, данной точке единичного квадрата можно сопоставить точку единичного отрезка, если из двух десятичных дробей-координат составить одну десятичную дробь, перемежая цифры координат по одной.

3. Возьмём единичный отрезок [0, 1] , разобьём его на три равные части и среднюю удалим; то же сделаем с двумя оставшимися отрезками. Продолжим этот процесс бесконечно. Несложно подсчитать общую длину удаляемых отрезков, она равна 1. Иначе говоря, от данного отрезка "ничего не остаётся". Однако что-то всё же остаётся и можно показать, что оставшееся множество имеет "столько же точек" сколько исходный отрезок [0, 1].

4. Рассмотрим множество рациональных дробей на промежутке от 0 до 1 . С одной стороны оно всюду плотно, то есть между любыми двумя дробями можно вставить третью С другой стороны, это множество счётное, то есть их все можно занумеровать, каждое из них будет иметь свой номер. Как же тогда можно между двумя последовательно идущими дробями вставить третью дробь?

5. А вот пример, предложенный восьмиклассником Мишей П. Возьмём какой – либо временной интервал, например, 1 час. И займёмся выписыванием знаков числа π. Начнём делить этот интервал времени пополам. Через 30 мин запишем первый знак числа π. Оставшийся временной интервал опять делим пополам и через 45 мин записываем второй знак числа π. Ну и так далее. Таким образом, не пройдёт и часа, как мы выпишем все знаки числа π.

В бесконечности есть что-то пугающее, если задуматься. Один мой случайный знакомый поведал, что он махнул рукой на математику в начале курса школьной геометрии, услышав от учительницы, что прямая бесконечна. Он не смог себе этого представить. И ученики мои однажды затеяли со мной дискуссию, связанную с бесконечностью. Было это так. Я сказал, что прямая *AB* - это объединение всевозможных отрезков, проходящих через точки *A* , *B*. Как же так? - вопрошали они. - Ведь за любым отрезком, проходящим через эти точки, найдутся и другие точки этой прямой! Пришлось думать, чтобы как-то объяснить корректность этой фразы. Любопытно при сём вот что. Без проблем они восприняли такое равенство: (*AB*) = { *X*: $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$}, где $\lambda \in R$. Мне не очень понятна причина такой раздвоенности в понимании.

В бесконечности таится загадка. И вот какая. Оказывается, она может использоваться для объяснения тех понятий, которые никак сами по себе не связаны с бесконечностью. Например, отрезок. Отрезок определяют как часть прямой. Но отрезок (его реальный прообраз) конечен, его можно видеть где угодно вокруг себя. А прямая бесконечна, прямую никто не видел, её нельзя нарисовать, у неё нет реального прообраза. Почему же первичным в наших школьных учебниках геометрии является прямая ? Ещё пример - угол. Где нам нужен угол во всей его бесконечности? По-моему - нигде. Отклонение одного направления на плоскости от другого вполне задаётся на конечном участке плоскости. Однако исходным является понятие угла между лучами, то есть между бесконечными фигурами.

В математике сомневаются в совершенно очевидном (например, доказывают существование прямоугольника).

Но есть куда более простые ситуации. Вот одна из них. «Может ли быть прямоугольник длиной 1 км, а площадью 1 мм^2?» — неосторожно спросил я как-то у 10-летних карапузов в конце урока, под самый звонок. Боже, какая началась буря! Кажется, я не успел их убедить и сказал только: «Ну ладно, уже звонок, поговорите об этом дома со взрослыми». Вышло хуже, чем я полагал. На следующий день Саша Е. звонким голосом отчеканил: «Моя тётя — технолог. И она сказала, что таких прямоугольников не бывает!»

Говорят, А. Хинчин, доказав студентам-математикам формулу Ньютона — Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ лекцию прекращал, чтобы они навсегда запечатлели в памяти ту великую минуту, когда с этой формулой познакомились.

Я уже не говорю об огромном мире занимательной математики. Очень хорошо сказал Д. Пойа: «Учитель должен видеть в себе комиссионера, желающего продать юнцам немного математики».

Но авторы учебников чураются её как последней напасти. А ведь прекрасно заметил Б. Паскаль: «Предмет математики настолько серьёзен, что полезно не упускать случая сделать его немного занимательным».

На уроке хорошо иметь под рукой сборник занимательных и шуточных задач, околоматематических баек, фокусов и головоломок с математическим подтекстом — для разрядки, но не только, иногда в них скрыто богатое содержание. Кроме хорошо известных сборников И. Перельмана, Б. Кордемского (и других — достаточно вспомнить превосходную серию книг, изданную в издательстве «Мир»), отлично подходят книги Ф. Кривина, Г. Остера, Дж. Литтлвуда, И. Зенкевича, И. Славутского. Забавно, что книга Г. Остера «Задачник» была у нас публично осуждена за злонамеренность и вредоносность (эти эпитеты я привожу без кавычек, следуя замыслу хулителей) оч-ч-чень серьёзными людьми — аж неким депутатом Государственной думы и даже членом Государственного совета, но, что более удивительно, и учёным-педагогом, и математиком-методистом. И с юмором, видимо, у этих хулителей что-то не в порядке, и ребёнок для них — некая абстракция. Это ж такое счастье, когда дети смеются на уроке — как солнце в ненастный день.

Мне очевидна общекультурная ценность математического образования. Но здесь моё перо слабеет, и скажу только: ещё древние знали, что ребёнка надо учить музыке и математике. Однако в последнее время, уменьшая количество часов на математику, наши реформаторы с лёгкостью сводят её содержание чуть ли не к таблице умножения. Их можно понять, видимо, им в детстве не повезло с математикой, но и только. Сделать дыру в общей культуре личности нетрудно, да только как её потом латать? Сказал ведь высокий чиновник о Н.Копернике, буде тот перед сожжением произнёс: «А всё-таки она вертится!», свалив в одну историческую кучу Н.Коперника, Д.Бруно и Г.Галилея.

Глядя на большинство наших учебников, на школьные экзамены, нельзя не придти к выводу, что главное в деле математического среднего образования — ловкость в проведении разнообразных выкладок. Так оно сейчас понимается на практике. И вот кульминация школьного обучения — подготовка к выпускным экзаменам, теперь к ЕГЭ. Пример, ещё пример, уравнение, производная, интеграл, вариант, ещё вариант. Какое там развитие личности, развитие способностей, куда-то пропало и разумное, и доброе, и вечное. Всё как у одной из чеховских героинь — учительницы, которая полагала, что самое главное в школе — не дети, не просвещение, а экзамены.

А вот как результат такого «образования» я приведу очень яркий пример.

Однажды газета «Комсомольская правда» напечатала статью «Квадратура круга — это просто». Через некоторое время последовало продолжение: «Кубатура шара? Ещё проще!» Обе эти статьи я читал своим ученикам в 8, 10 и 11 классах. Затем доводилось читать их студентам-математикам, будущим педагогам, а также своим коллегам.

Попробую вкратце передать суть этих статей. В Ставрополе некто В. Касаткин создал прибор для штурманских расчётов, основанный на новом методе. Опытный образец прибора хорошо себя зарекомендовал, однако в массовое производство прибор не внедрялся.

Но при чём тут квадратура круга и кубатура шара? А вот при чём. По словам В. Касаткина, его метод не только основа для конструирования навигационного прибора. Основываясь на нём, можно «вычислить квадратуру круга», «удвоить куб», «решить Великую теорему Ферма» (такова стилистика автора). Более того, можно добиться прогресса «на самых наисовременнейших направлениях: в электронике, кибернетике, приборостроении, макро- и микрокосмосе», а также в решении прикладных задач физики и химии.

В Академии наук к его идеям отнеслись «почему – то» скептически. Был создан круглый стол, но и там В.Касаткин реальной поддержки не получил.

В газетных статьях приводились многочисленные высказывания В.Касаткина, был пространный комментарий самого автора статей, публиковались отзывы разных учёных, как безымянных, так и названных пофамильно.

Сам В.Касаткин был убеждён в том, что его предложения имеют мировое значение. «Хватит нам догонять! А ведь мы можем такое сделать, что и не снилось. И пусть нас догоняют».

Подробный анализ статей из «Комсомолки» чрезвычайно поучителен. Я сделал его в 11 классе. «Такое нагромождение несусветных утверждений,— сказал я в заключение,— оставим на совести газеты».

Академик А. Мигдал, оценивая работы авторов «великих открытий», подытожил:

«Все эти работы имеют общие черты:

1. Перевороту подвергается не какой-либо один вопрос, а сразу все результаты современной науки.
2. Автор не имеет профессиональных знаний в данной области.
3. Никогда не цитируются современные научные работы чаше всего потому, что автор с ними незнаком.
4. Авторы таких «трудов» всегда заявляют, что их работа — плод многолетних усилий, однако видно, что время если и тратилось,

то не на математические выкладки, не на эксперименты и даже не на анализ известных фактов.

5. Никаких других работ меньшего масштаба у автора не было».

Какова же была реакция на прочитанное мною? Почти полное принятие содержания текста статей, причём даже у моих коллег. Надо сказать, что и самые острые обсуждения были с коллегами. После моих критических замечаний в адрес газеты я слышал и такое: «Вот такие, как Вы, и насмехаетесь над всем новым, что у нас рождается! Это такие, как Вы, не давали работать врачу С.Федорову,
врачу Г. Илизарову, учителю В. Шаталову!» Ну и так далее.

И что тут скажешь. Если держаться ближе к тому, о чем мы сейчас говорим, т. е. об образовании, то оно, полагаю, включает в себя знание и некоторых запретов, невозможностей. Мы же знаем, что не может быть вечного двигателя, что не бывает КПД больше 100%. Человечество давно «похоронило» философский камень, эликсир молодости и т. д. Точно так же надо знать о невозможности квадратуры круга, удвоения куба, правильно это понимая.

(К месту, любопытный способ " квадратуры круга" придумал Леонардо да Винчи. Рассмотрим цилиндр, у которого радиус основания R, а высота $R/2$. Площадь его боковой поверхности равна πR^2. Развёрткой его боковой поверхности будет прямоугольник такой же площади πR^2, то есть равновеликий кругу, лежащему в основании нашего цилиндра. Такой прямоугольник можно получить, покатив цилиндр по плоскости. А уж построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику - так это задача для школьников.)

Образование должно воспитывать уважение к науке — тяжелейшему труду человеческого ума.

Окончив школу, человек должен понимать, что дилетанту не «решить теорему Ферма», как выражается В. Касаткин. Более того, «ферматисты» давно имеют печальную известность — и об этом тоже должен знать образованный человек. Я видел не одного такого – грустное зрелище. (История доказательства теоремы Ферма ярко рассказана в книге С. Сингха «Великая теорема Ферма».)

Занятно, что и теперь, когда уже теорема Ферма доказана, продолжаются попытки найти то самое доказательство, которое якобы нашел сам П. Ферма, но, за недостатком места, не записал. И опять же - эти попытки идут от дилетантов. О такой попытке омского инженера, доктора технических наук А.Ильина, недавно стало известно от журналистов. Публикация об этом появилась в сентябре 2005 года в "Учительской газете " под рубрикой "открытие века". Обилие совершенно невразумительных фраз, близких к сумеречному бреду, если говорить попросту, вранья (к примеру, пишется, что эта теорема до сих пор не доказана), да высказывания опять же не математиков, что наконец - то найдено " то самое" - вот и всё, что можно найти в этой публикации .

В другой публикации этой же газеты приводится и само "доказательство". Я вывесил его ученикам на обозрение - пусть ищут ошибку. И находили!

Вот ещё пример: некий журналист пишет о загадках египетских пирамид. Дальше я предоставляю слово А. Хазену. В своей книге он говорит:

«Но вот перед нами, по всей видимости, достоверный факт: отношение длины основания египетских пирамид к их высоте с точностью до нескольких знаков после запятой кратно числу π (точнее, удвоенной длины.— *В. Р.).* В связи с этим появляются досужие домыслы. Известно, дескать, что в Египте тогда числа π не знали, а раз оно участвует в описании геометрии пирамид, значит, в их строительстве участвовали какие-то инопланетяне, и они выбрали размеры пирамид именно такими, чтобы сигнализировать последующим поколениям о своем посещении Земли».

Объяснить эту загадку, следуя автору, можно довольно просто с помощью устройства для измерения длин кривых линий — курвиметра. Грубо говоря, курвиметр — это колесико на палочке, которое может ехать по любой проведённой линии,

Мысленно построим такой прямоугольник. Его длину зафиксируем каким-то числом оборотов колеса курвиметра, а его ширину зафиксируем тем же числом диаметров этого колеса. Тогда отношение длины построенного прямоугольника к его ширине будет равно $(\pi dn) / (dn)$. Здесь d — диаметр колеса курвиметра, n — число сделанных им оборотов.

Таким образом, в отношение размеров этого прямоугольника будет «упрятано» число π.

Остаётся только предположить, что египтяне в те времена умели измерять расстояния с помощью колеса или, скажем, барабана. Конечно, такое предположение не столь эффектно, как визит инопланетян.»

И далее автор продолжает: «В том-то и дело, что проявление свойств математических закономерностей в деятельности человека не требует, чтобы об их существовании знали. Законы математики объективны и, конечно, работают и в том случае, когда человек их не знает». Добавлю: чтобы получить в результате несколько верных знаков после запятой, требуется измерения проводить с запасом, то есть с большим числом знаков. Как же это сделать, измеряя каменные глыбы основания пирамид?

Вот краткое резюме: устойчивость к сенсациям является следствием хорошего образования.

Отмечу, наконец, удивительную особенность среднего математического образования: оно порой вступает в противоречие с тенденциями в самой математической науке. Здесь можно говорить о преувеличенном внимании к частным результатам без какой-либо попытки их обобщить или связать с другими фактами — для примера можно взять подавляющее большинство сборников задач. Теоремы, имеющие второстепенное научное содержание, почему-то становятся чуть ли не основными в школьном курсе — так произошло с теоремой о трёх перпендикулярах в курсе стереометрии. Много времени отнимают у учителя разнообразные трансцендентные уравнения и неравенства, особенно тригонометрические и логарифмические, не имеющие научной ценности. Понятия, не имеющие серьёзного значения, почему-то становятся предметом специального изучения — так было с абсолютной величиной. Вдруг оказывается, что существенно, как записано решение и в какой форме записан ответ — как будто это более важно, чем решить задачу.

Долго мусолится нами подобие треугольников, именно треугольников, причем без подобия фигур вообще. Поэтому ученики наши лихо находят неизвестную сторону в треугольнике, но редко понимают, что масштаб карты — это и есть коэффициент подобия. И мало кто осознает подобие того, что учитель геометрии рисует на доске, и соответствующего рисунка ученика в тетради.

Любопытно, однако, что использование подобия треугольников всего лишь технический прием в планиметрии, например, при доказательстве теоремы Пифагора и выводе свойств тригонометрических функций. Получение этих результатов вполне возможно и без подобия треугольников , только на основании ранее доказанной теоремы Пифагора – так это сделано в учебнике А.Александрова.

Необходимость «псевдоматематики» чаще всего обусловлена подготовкой учеников к вступительным экзаменам, работники высшей школы придумывали новый тип примеров, борясь с репетиторами и их методами натаскивания, а потом делали из решения этих примеров некую «науку». Но иногда это вопрос моды — так было с употреблением кванторов. Обо всём этом приходится говорить со старшеклассниками:

— Дети,— говорю я,—многого из того, над чем вы сейчас мучаетесь, не бывает. Никому не нужны эти радикалы, которые не умещаются на одной строчке, логарифмы с неизвестным основанием, шары, вписанные в замысловатые пирамиды. И никакая это не математика, а придумки экзаменаторов. Но это есть, а потому с этим надо работать хорошо.

О логарифмах - чуть подробнее. Практическое значение логарифмов исчезло после появления калькуляторов. Теоретическое значение логарифмов (для школьного курса) установим мысленным экспериментом. Предположим, что логарифмов вообще нет. Что тогда? 1) У показательной функции не будет обратной, что хотя и не страшно, но как-то нехорошо. 2) "Повиснет в воздухе" степень с иррациональным показателем. Все свойства такой степени легко получаются из равенства $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. "Лобовой" способ доказательства этих свойств невыразимо скучен. 3) Для функции $f(x) = 1/x$ не будет первообразной. Вот это место - самое любопытное, хотя мы привыкли к нему настолько, что перестали удивляться. Но давайте вдумаемся. Первообразной для степенной функции является функция того же вида (с коэффициентом) во всех случаях, кроме одного - когда показатель равен (- 1). Для неё, то есть для x^{-1}, в качестве первообразной невесть почему появляется нечто совсем другой природы - натуральный логарифм. Тут в теории чувствуется незавершённость и хочется перейти к другому, более широкому классу функций, замкнутому относительно интегрирования.

Можно даже рассказать ученикам о непрерывном изоморфизме групп по сложению и умножению между вещественными и вещественными положительными числами с помощью показательной и логарифмической функций. Это свойство может даже определять обе эти функции (здесь особо интересна непрерывность - а что, если её нет? Тогда нет ни показательной, ни логарифмической функции). Ну и, наконец, что-то далёкое от школы - логарифмическая спираль, которую можно увидеть в реальных объектах живой природы, логарифмы с двоичным основанием в теории информации, логарифмические шкалы в многочисленных приложениях.

Пожалуй, всё. А мы мучаем детей тождественными преобразованиями выражений с логарифмами и решением бесконечных логарифмических уравнений, неравенств и систем разве что только для вступительных экзаменов в вузы. И сколько же про это статей и пособий!

Я слежу за ними всю вторую половину прошлого века, начиная с пособий П. Моденова. Ощущение того, что меня втягивают в пропасть интеллектуальной и чрезвычайно надуманной псевдоматематической эквилибристики возникает не на пустом месте - сравнить те же пособия П. Моденова и последних авторов. Когда глядишь на иные нынешние вступительные задачи, возникает противная мысль - её не надо воспринимать буквально - о чуть ли не перманентном заговоре (сговоре) мехматовских "оригиналов" и соответственно поднаторевших репетиторов супротив нашей учительской братии. Любопытно тут заметить, что их позиции не поколебало даже введение единого государственного экзамена - они уцелели от этой новации. Ясно, что будет следствием - таковые пособия выходили и будут выходить, сохраняя вредоносные тенденции.

У такой эквилибристики находятся апологеты – мол, тем самым развиваются мыслительные способности ребёнка. Давайте почитаем Р. Декарта («Правила для руководства разума») :

« …доминирование задачи тренировки ума не только не стимулирует, но, напротив, тормозит развитие умственных способностей ребёнка. Такое обучение приносит больше вреда, чем пользы; оно, хотя и «упражняет ум», но даёт ему слишком скудную интеллектуальную пищу, вследствие чего математика настолько порабощает ум известными правилами и знаками, что из науки, развивающей ум, превращается в путаное и туманное искусство, которое его сковывает.» (Цитируется по сборнику «Логика и проблемы обучения» М. Педагогика, 1977 , стр.188). Именно она, эта эквилибристика порождает формализм в преподавании математики – отрыв формы от содержания, о чём в своё время говорил А. Хинчин, отчего теперь предостерегает М.Башмаков.

Из года в год в профессиональных разговорах муссировался один и тот же вопрос.

— Школа не готовит в вуз,— говорили в приёмной комиссии технического института. — Подавляющее большинство медалистов не подтверждают на экзаменах своих оценок.

— А школа и не должна готовить в вуз,— отвечали учителя,— у неё другие задачи.

Но эти разговоры на поверхности. На самом деле школьный учитель оглядывается на конъюнктуру вступительных экзаменов— от этого зависит его профессиональная репутация.

А вузовскому работнику на самом деле нужны развитые интеллектуальные умения вчерашнего школьника, его умение самостоятельно работать, творческое отношение к знаниям.

Трудно сказать, каков выход из этих противоречий. Но одно ясно — необходимым условием для такого выхода является круглый стол преподавателей вуза и школы, неформальные попытки договориться между собой — для начала хотя бы в пределах одного региона. Нельзя сказать, что эта проблематика никого не волнует. Я бы даже сказал, что лет эдак сто волнует. Яркое тому подтверждение — конференция в Дубне под названием «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», прошедшая в 2000 году. В сборнике материалов конференции очень много интересных сообщений, я постоянно их перечитываю. Обстоятельное концептуальное выступление — «О некоторых проблемах математического образования» — сделал В. Тихомиров. Среди этих проблем — перечень целей математического образования, который он предлагает обсудить участникам конференции:

1. Интеллектуальное развитие.
2. Ориентация в окружающем мире.
3. Формирование мировоззрения.
4. Физкультура мозга.
5. Подготовка к будущей профессии.
6. Подготовка в вуз.

Список отражает некую иерархию предпочтений. Далее докладчик добавляет ещё одну цель:

7. Освоение этических принципов человеческого общежития.

И что же думается — очень вкратце — при размышлении об этих целях (я бы предпочел эти параметры образовательного процесса называть ценностями)?

Прежде всего, в этом перечне не видна специфика собственно математики. Точно такой же список можно отнести, например, к физике или даже к истории (с соответствующей содержательной коррекцией). Тем самым, по сути дела, дано перечисление (причем неполное) ценностей общего, а не сугубо математического образования. И ещё — и этот список, и его иерархия имеют вполне светский характер, как будто в этой проблематике ничего не добыто ни в педагогике, ни в дидактике. Откроем появившуюся около 100 лет назад прекрасную книгу американского педагога В. Юнга «Как преподавать математику», изданную у нас не один раз. Хотя бы просмотрим её вместе со всеми примечаниями и списком литературы. Я уверен, знай мы хотя бы её, мы бы чаще цитировали и реже выдавали результаты собственных размышлений как собственные «плоды раздумий».

Это ещё одна наша особенность — обсуждение образовательных проблем начинать чуть ли не с нуля. Интересно, возможно ли такое в любой другой отрасли профессиональной деятельности?

Ценности математического образования давно известны, и не в их перечне проблема. Проблема в другом: как совместить эти высокие ценности с практикой преподавания? Это ведь только сказать легко: формировать, например, мировоззрение. Какое мировоззрение? Далее, всякое формирование является процессом, причем осмысленным и имеющим какую-то технологию. Какую? Где она вразумительно объянена? Итак, для преодоления разрыва между идеологией математического образования и его реалиями нужно решение серьёзных методических задач. Преодоление этого разрыва должно происходить, я полагаю, и на более общем уровне, нежели методический. Истоки существующих требований к ученику (а потому и к учителю) находятся и в дидактике — общей и частной. Чрезмерен акцент на знаниях и умениях школьника, традиционный для нашей педагогической теории. Прекрасно известно, к чему это приводит. На выходе знания выглядят как вызубренные формулировки определений и заученные доказательства теорем, а умения — как алгоритмические выкладки и решения по шаблону. Что же делать? Для начала, думается, необходимо в школьной математике снизить статус умения (да и знания тоже), увеличивая статус понимания. Для этого есть даже чисто технические предпосылки — калькуляторы и программные математические пакеты (об этой возможности мы ещё поговорим).

Высокий статус умения провоцирует школьную математику на обилие упражнений. Всё правильно, ученик должен что-то уметь. И одна из бед нашей профессии в том, что «доведение до умения» поглощает практически всё время, а на всякие «красивости» и «высокие материи» его почти не остаётся. И всегдашняя головная боль учителя — многочисленные, чисто технические умения, которыми должен овладеть ребёнок: складывать дроби, приводить подобные, решать прямоугольные треугольники, находить x ...—ведь спросят ученика именно это, а не «ориентацию в окружающем мире»!

Добро бы эти многочисленные умения вполне соответствовали духу нашей науки. Ничего подобного!

В книгах можно найти обилие совершенно специальных задач с фантастическими данными типа «Дан круг радиуса $\sqrt{2}$ » или с нарочито надуманным условием (в одном уравнении можно встретить логарифм и синус). Убежден, что из «культурного» преподавания математики необходимо убирать задачи с искусственными условиями и искусственными решениями. Было же сказано французским математиком Ж. Фаваром: «Геометрия остается искусством доказывать какое-либо свойство, рассматривая коварно выбранный круг и удачно соединяя старательно разобщенные точки». Ирония очевидна. Не безумие ли тратить золотое время детства на геометрию, поданную в таком духе? Не такой ли подачей геометрии объясняется то, что во многих странах она потихоньку убирается из обязательных для школы разделов математики?

Н как же долго всё это длится! «Устрашающий» характер имели в этом отношении иные задачи на выпускных экзаменах в России. Приведу пример такой задачи (она предлагалась в 1911 году):

«Определить число членов кратной (геометрической. — *В. Р.)* прогрессии с положительными членами, у которой сумма всех членов равна наименьшему трехзначному числу, делящемуся на 17 без остатка, а при делении на 16 дающему в остатке 15. Седьмой член этой прогрессии двузначен и изображается соответственно цифрами десятков и единиц коэффициента того члена разложения $\left(\sqrt[9]{a^4} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{14}$, который после упрощения содержит a и b в одинаковых степенях. Сумма третьего и пятого членов этой прогрессии равна сумме всех корней уравнений

$1\log(z - 6) = 2 / (1\log(z - 6) - 1)$ и $10x^2 + 921x + 5 = 0$». Ясно, какое это имеет отношение к математике. С тех пор много что поменялось в мире, но дурь в наших учебных книгах как была, так и есть. Сравните, к примеру, геометрические задачи в нынешних учебниках (пособиях) для школьника или абитуриента с задачами в классическом учебнике Ж. Адамара. (Я говорю не о прямом сопоставлении, оно неуместно, а о сопоставлении тенденций.) И ладно, если бы специфика подобранных задач соответствовала некой педагогической или дидактической идее —увы. Вот пример современной конкурсной задачи по геометрии:

«Дана треугольная пирамида $ABCD$. На ребре AC взята точка F так, что $CF : FA = 2:9$, на ребре CD взята точка M так. что AM — биссектриса угла DAC. Через точки F, M и точку пересечения медиан треугольника DAB проведена плоскость, пересекающая ребро DB в точке N Известно, что

$CA/AD = (DN / NB) + 1$. Известно также, что отношение площади треугольника ABD к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$ равно p, а длина перпендикуляра, опущенного из вершины C на плоскость ABD, равна h. Через точку N проведена плоскость, параллельная плоскости ACB и пересекающая ребра CD и DA в точках K и L соответственно. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $DKLN$.»

Лично мне не хочется ни решать такую задачу, ни даже читать до конца её условие. Но приходится. Когда я прочитал её группе петербургских математиков, раздался хохот. Что особо поразительно: нередко такого рода задачи составляют профессиональные математики. Ныне ориентиром для обучения умениям становятся материалы Единого государственного экзамена. В своё время я с долей надежды посмотрел варианты этого экзамена. И увидел всё те же тенденции: ученик, оказывается, должен уметь производить формальные операции с радикалами разных степеней из специально подобранных чисел, с логарифмами при странных основаниях. Почему, зачем — кто бы сказал. Математическое содержание первых задач ЕГЭ столь убого, что поневоле задаёшь вопрос: ради этого мы учим детей столько лет и многими часами? На так понятую математику хватило бы и одного часа в неделю.

Это совсем не та математика, которая развивает ребёнка и может помочь в практической жизни. И даже в профессиональной деятельности она не нужна. Я как – то в аудитории, в которой были математики петербургских вузов, задал вопрос: кому из вас приходилось в профессиональной деятельности перемножать радикалы разных степеней? В ответ было молчание.

Ну что тут добавить? Пожалуй только, что почти всё из содержания ЕГЭ будет спустя некоторое время напрочь забыто большинством россиян. И правильно, зачем нормальному человеку помнить такое? Но в чём же тогда общекультурное значение математики? Что останется, когда всё наспех выученное будет забыто? Если же посмотреть задачи последних разделов ЕГЭ, то поражает их нарочитая усложнённость, я бы даже сказал – не эстетичность, на них и смотреть не хочется, не только решать.

Точности ради замечу, что в ЕГЭ просматриваются и содержательные новации, однако же странного свойства. Так, среди предлагаемых заданий можно увидеть текстовую задачу и задачу по планиметрии. Задачи обоих типов решались только в девятилетке. Ясно - без специальной работы учителя, а, скорее всего, репетитора не обойтись.

От Единого государственного экзамена тянется естественная ниточка к образовательным стандартам. Здесь всё то же, да ещё поджидает одна, причем серьёзнейшая, заковыка, уже не имеющая отношения собственно к математике, — она спрятана в «долженствовании для любого ребёнка». Что бы мы ни предписали, какой бы минимум обязательных умений ни выбрали для ученика, всегда найдётся ребёнок, который его не осилит. Или сделает нечто обязательное, соответствующее стандарту, но сегодня, сейчас, тут же после моего объяснения и только когда я сижу с ним рядом. А завтра уже не сделает. Потому, какие бы мы ни предлагали стандарты, необходимо понимать их условность по отношению к детям. Эта условность неизбежна, ибо стандарт и по смыслу своему, и на деле — это ведь способ отбора, способ сортировки. Ну, отсортируем мы детей — ученик *Х* соответствует стандарту, а ученик *У* не соответствует. И что мы будем делать с учеником *У*?

Проблема разрыва между ценностями и реалиями порождает в математическом образовании вопрос вопросов: с чем же мы в конце концов имеем дело в школе — сколком науки, набором сведений, алгоритмов и интеллектуальных загадок? Чем-то ещё? Ответ на него прояснит и способы преодоления этого разрыва.

Проблемы, сто лет почти, одни и те же проблемы — и никак не вырваться из их будто заклятого круга... Почему, что за напасть такая? Я полагаю, что история подсказывает ответ: мы не можем найти методологию для их решения. И даже не пытаемся её искать. Те, кто «делает погоду» в математическом школьном образовании, атаковали эти проблемы, исходя из собственных установок. вкусов, понимания дела — и только. Продолжая в том же духе, мы долго ещё будем наступать на одни и те же грабли, увы,

1.3. ПОНЯТЬ, ЧТО ДЕЛАЮ

От математического образования естественно перейти к образованию вообще. Дело это большое и многостороннее — всех сторон можно и не увидеть. Хочется остановиться на чём-то, что-то отобрать, принять и работать с этим дальше. Хочется иметь собственное понимание.

Я в образовании в первую очередь выделяю управление, ещё шире—руководство развитием. Пришёл я к этой краткой формулировке давно, и все эти годы она разве что уточнялась. Для меня в этой формулировке соединились и понятие кибернетики — управление, и понятие психологии — развитие, хотя развитие, вообще говоря, категория общенаучная и даже философская. Развитие (интеллектуальное) я понимаю нарочито прагматично, но и такого понимания хватает для дела. Именно - я могу судить о развитии ученика, если он «выдаёт» новую (для себя) информацию.

Мне не хочется противопоставлять обучение и развитие (также образование и развитие, просвещение и развитие...). Обучение, просвещение, воспитание, образование я понимаю в первую очередь как процессы. А развитие я интерпретирую как ценность (достижимую или нет) в этих процессах. В них можно даже не ставить задачу развития. (Например, я хочу научить детей приёмам решения квадратных уравнений. Можно прекрасно это сделать, вовсе не думая о развитии ребёнка.) Управление — опять же в практическом смысле — я понимал раньше несколько прямолинейно, как последовательность заданий, предлагаемых ученику. При таком понимании получалось, что обучить чему-либо, в частности математике, — это предъявить ученику такой набор задач, в процессе решения которых происходит развитие.

Вот пример урока, соответствующего этому пониманию. В его начале я даю детям набор задач. В конце урока, обойдя класс, смотрю, что они сделали, и разбираю задачи на доске. Формы такого урока могут быть достаточно разнообразны. Класс можно разбить на группы, но выбор формы занятия в данном случае не является принципиальным. После моего разбора задач ученики либо сами оценивают собственную работу, либо получают такую оценку от меня.

Но затем пришло понимание ограниченности такого подхода — легко сбиться на чистую технику и заняться решением более трудных, даже конкурсных или олимпиадных задач. Пришлось пересматривать всю картину, до того представлявшуюся стройной и незыблемой, как Александрийский столп.

Как пример - только одна из ситуаций: домашнее задание. Набор задач, который предлагается ученикам в классе и дома, лучше работает на развитие, если такие задачи взаимодополнительны. Иначе говоря, задачи домашнего задания не столько «закрепляют» сделанное в классе, сколько позволяют ученику продвинуться вперёд (как при ходьбе в гору — хоть маленький шаг, но выше). Но тогда — автоматически — обязательно и обсуждение сделанного дома. Очень важный момент взаимодействия учителя и ученика - я уже не ментор, а сотоварищ в деле поиска истины.

Тут естественно спросить: а как насчет знаний и умений? (Здесь пропущено в известной аббревиатуре ЗУН слово «навык». Принятое в психологии толкование навыка как умения, доведённого до автоматизма, приводит к мысли о том, что навыков в математическом образовании вообще нет. Ныне это слово исчезло из программных документов.) При любом понимании образования роль знаний и умений вряд ли может существенно измениться — на них держится всё остальное. (В последнее время в нормативных документах появились такие параметры интеллекта как «представление» , «компетентность» и «понимание». Само по себе это говорит о попытке что – то поменять в устоявшейся парадигме, но хорошо бы толком знать, что означают эти термины на практике и как добиваться этих самых параметров – о понимании мы поговорим позже.)

Сейчас вроде бы происходит смена взглядов общества на образование. Индивид из объекта становится субъектом. Проще говоря, ребёнок теперь не столько будущий элемент государственной системы, сколько личность со всеми её особенностями. И не сосуд, который надо наполнить, и не факел, который надо зажечь. Сравнения, как всегда, хромают, и всё куда сложнее. Но тогда то, что проникнуто идеей профессионализации (накопление знаний и умений), не так существенно по сравнению с тем, что воздействует на персональные свойства индивида. И, следовательно, в образовании не столь важен упор на знания и умения, сколько важно воздействие на развитие. И не так важно, к примеру, знать назубок все свойства квадрата или формулы тригонометрии, как важно видеть в них источник появления новых образов и мыслей.

Принятие этой новой ситуации влияет на установку и частично меняет её, приводит на практике, как я постараюсь показать, к множеству важнейших в нашем деле следствий. И есть ещё одна сторона дела, о которой пока совсем коротко. Обучать, как я понимаю этот термин,— это обучать какому-то виду деятельности. А в школе в лучшем случае обучают учебной деятельности, как принято говорить, «учат учиться». (У кого?) Это само по себе неплохо, но замыкает образовательный процесс на себя. Можно попытаться сделать в школе чуть больше, хотя бы в профильной школе. Именно обучать основам исследовательской деятельности. Вырисовывается интересная педагогическая задача, которая всё больше занимает меня.

В установку учителя входит и отношение к Ученику. Каков он — мой Ученик? Каким я его хочу видеть? И чем мой Ученик отличается от Ученика моего коллеги? Ведь мы рассказываем одни и те же теоремы, задачи, формулы, да и слова говорим, вероятно, одни и те же. Но есть же какая-то разница!

Мои Ученик понимает математику, как и я. Ему нравится в ней то, что нравится мне, и он не принимает того, чего не принимаю я. (Разумеется, речь идет не о буквальном копировании, а о чём-то вроде подобия.) Я легко прощаю ему незнание каких-то формул и определений, но я недоволен, когда он не может их вывести, или разумно придумать, или на худой конец организовать, если так можно выразиться, «процесс вспоминания».

Он относится к своей математической деятельности так же, как и я к своей, прежде всего серьёзно. Он самостоятелен, самостоятелен по мыслям и поступкам.

В Ленинграде (теперь в Петербурге) учился некогда американский студент. У него спросили, как сообщила молодёжная газета, чем отличается американский студент от нашего. «Ничем, за исключением одного только,— ответил американский юноша.—Ваши ребята ждут, когда кто-то за них всё сделает». Вот стоит у доски ученик, он только что пересказал теорему из учебника. Ну и что? Когда он был малышом, сколько раз он говорил: «Я сам!» А сейчас пересказал, как мог, чужие мысли и доволен. Почему он теперь норовит спрятаться за учебник («А в учебнике - так сказано!»), за учителя («А вы так говорили!»), за соседа по парте («Дай списать!»)? Терпеть не могу, когда мне говорят: «А в ответе не так» — и подстраивают свою работу и свои мысли под результат, полученный кем-то. Я вообще не советую ученикам смотреть в ответ, разве что с целью найти опечатку в нём.

Здесь в самый раз сделать «лирическое отступление». Конечно, учителя во все времена и во всём мире сидят в идеологических окопах. Недаром же О. Пешель (немецкий учёный) сказал по случаю, что войну выигрывает не прусский фельдфебель, а прусский учитель. Что может делать с ребёнком школа, я прекрасно вижу и на собственной биографии. Вот несколько примеров. В бытность восьмиклассником я потрудился в невесёлые шестидесятые годы (1951 – 1960 гг.) над сочинением по физике на тему «Приоритет русских учёных в электротехнике», длиной в тетрадку в 24 листа, из которого следовало, что не было Г.Герца, А.Маркони, Т.Эдисона, А.Белла. Н.Тесла и многих других. Тогда мне внушали, что наука может быть национальной: немецкая наука, русская наука и т. д. Изучая дарвинизм — был такой предмет в 10 классе - «Основы дарвинизма»,—я рассказывал о достижениях Т. Лысенко, В. Вильямса, О. Лепешинской и клеймил менделизм-вейсманизм-морганизм (именно так, через чёрточку, все это говорилось в те годы). Была одна «тонкость». Мне была в ту пору интересна физика и попалась в руки замечательная книга Э.Шредингера «Что такое жизнь с точки зрения физики?». Я как мог её осилил и в голове моей ученической вынуждены были сосуществовать две системы знаний – одна включала генетику, а другая её отвергала. Вопросы учителям в ту пору предусмотрительно задавать не хотелось. Почему? Как – то я поинтересовался у учителя биологии вкладом К.Бернара в изучение пищеварительной системы человека, на что мне было сказано, что вклад был сделан И.Павловым.

На устном вступительном экзамене по литературе я рассказывал (согласно полученному билету) о реакционном творчестве А.Ахматовой, М.Зощенко и А.Хазина, ничего не прочитав из их произведений. Нет, М.Зощенко я читал, хохотал над рассказом о приключениях обезьяны, но мне уже внушили, что есть два мнения: одно своё, а другое «правильное». Вот как происходило это внушение. В 10 классе я написал сочинение на тему «Поэт и поэзия в творчестве Пушкина, Некрасова и Маяковского». Помню, я прочитал многое у этих поэтов и решил обойтись без каких-либо критических статей, сказать, что сам думаю. Как сейчас понимаю, сказал я чушь, но всё же пытался её аргументировать. За сочинение получил тройку, но не в этом дело. Эта отметка была мотивирована моей учительницей, о которой, кстати, у меня только самые хорошие воспоминания, примерно так: надо излагать не свою, а общепринятую точку зрения,— вряд ли она сама так думала, но ведь над ней было начальство, инспектора.

И кто знает, были бы эти строки, если бы не 56-й год и не XX съезд партии и закрытое письмо съезда, которое читали студентам.

Всё это я хорошо держу в памяти. Поэтому мой Ученик спорит со мной, не согласен со мной, может быть, даже вредничает в мой адрес: «А вот вчера вы говорили такое, а сегодня совсем другое». Он оспаривает и отметку, выставленную мной. Я счастлив, когда он бывает прав. Однажды двое моих мальчишек, к ужасу своему, нашли ошибку в моём решении задачи, которое я поведал классу. Их опровержение было довольно хитрым, и я повысил им на балл итоговые отметки. Мой Ученик критически воспринимает написанное и сказанное, пропуская всё через себя. Мало ли что могут напечатать и сказать, кого только не громили в газетах и к чему только не призывали с амвона! Порой ставлю отличную отметку всего за один вопрос — бывают такие вопросы, на которые надо отвечать чуть не весь урок. Вот, к примеру, что мне довелось услышать: «А с какой стати мы считаем пустое множество выпуклым? Может быть, оно как раз невыпуклое?», «А можно ли строить циркулем и линейкой точки параболы?», «Что такое нуль?», «Почему нельзя сравнивать комплексные числа?», «Есть ли числа более общие, чем комплексные?», «Что такое n-угольная звезда?», «Чему равна сумма углов любого n-угольника?», «Что такое сторона поверхности", «Является ли поверхность многогранника многогранной поверхностью?", "Зачем нужны радианы?", « Какая связь между гармоническим рядом и средним гармоническим?», «Можно ли доказать, что пустое множество является подмножеством любого множества?», «Можно ли построить циркулем и линейкой число π?», «Есть ли неравенству треугольника аналог для углов?» , « Равны ли два треугольника – один на доске, другой в тетради – если сторонам их предписаны равные числовые значения?», «Почему для определения площади поверхности лучше описывать около неё многогранную поверхность, а не вписывать?»

Если мы хотим стимулировать любознательность ребёнка (замечу, что в педагогической литературе я не встречал этого понятия; интерес, мотивация, способности и т.д. – пожалуйста, а любознательности - нет), то необходимо провоцировать его на задавание любых вопросов и, разумеется, от них нельзя отделываться фразами типа «вырастешь – узнаешь».

Я научился терпимо относиться даже к детскому духу противоречия, хотя он изрядно может насолить, делая ученика просто неудобным. Однажды я в сердцах поставил такому вот ученику сниженную оценку за поведение в четверти, как будто у меня других забот не было, кроме как поговорить с ним на уроке о его фонтанирующих идеях. Сейчас он профессиональный математик, доктор наук, а я про себя думаю, что он научил меня больше, чем все книги по педагогике. Вот так: ценим детей удобных, а помним строптивых.

Мой Ученик ответственен. Когда он пишет «Ответ», то это означает, что он действительно отвечает за полученный результат. А раз так, то отрезано было только после того, как не раз отмерено. Очень не люблю, когда, получив невесть какой результат, дети бегут ко мне: «Проверьте!»

Наконец, мой Ученик чуть ироничен, а ещё лучше — самоироничен. Математика — штука серьёзная, наука — тем более, образование —-ещё более, но есть вещи и поважнее. Однажды два хороших ученика — он и она — получили за самостоятельную работу двойки. Он от обиды скомкал работу и бросил её на пол. Она улыбнулась, сказав чуть слышно: «Подумаешь». Я помню до сих пор эту улыбку, глаза, голос, каким она это сказала...

Вот такого я хочу иметь Ученика. Ещё больше я хочу такого Ученика сделать. Потому «тащу каждый день свою тачку с камнями».

Когда установка осознана, становится яснее ответ на главный вопрос: «Зачем я иду на урок?» Я иду на урок не только для того, чтобы рассказать детям теорему Пифагора, но с надеждой, что после него они станут чуточку - чуточку другими.

Мне должно нравиться то, что делаю на уроке. Нравиться может только тогда, когда то, что делаю, соответствует (явно или неявно) собственной установке. Той же теореме Пифагора можно дать много разных доказательств. Доказательство по принципу «смотри» мне куда симпатичнее прочих. Вот его вариант (рис. 1). Здесь $BC=a$, $AC = b$, $AB = c$. Видно:

$c^2 = 4 \cdot 0{,}5\, ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$.

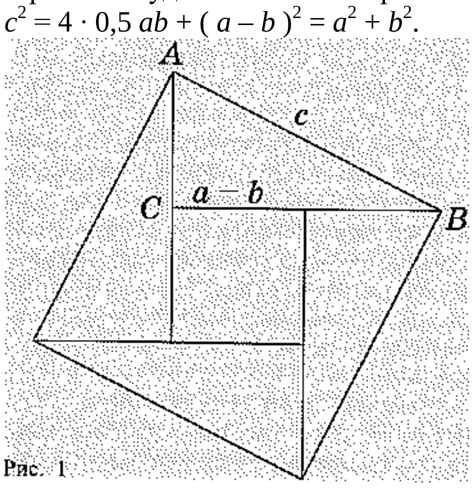

Рис. 1

Один мой коллега как-то по особенному, не по учебнику, вёл в школе курс геометрии. Однажды к нему на урок пришёл некий доцент. Послушал он учителя, а затем поделился со мной: «Твой коллега не всегда сам понимает, что говорит!»

— Конечно, это плохо,— ответил я,— но не страшно, сильно ошибиться дети не дадут. А вот то, что у него на уроке глаза светятся от удовольствия, так этому цены нет.

В работе любого учителя независимо от того, осознаёт он это или нет, присутствует система. Система работы учителя взаимосвязана с его установкой, хотя связи тут непростые. Такая связь естественна, ибо средства намечаются целями и ценностями. И чтобы понять систему учителя, необходимо знать его установку.

Система работает лучше, если она известна: например, если ученику известно, когда его спросят и как будут оценивать. Система работы формируется годами и тоже порой неосознанно. Её очень важное свойство — защитное. Урок может не получиться, но благодаря системе круги от этой неудачи не слишком большие. К сожалению, она имеет тенденцию к застою. Это опасно. Всё под неё подгоняется, то, что в неё не укладывается, отметается. Тогда перестаёшь серьёзно размышлять, исчезают проблемы, а с ними и сама жизнь. Система становится догмой, приправленной ощущением власти над ребёнком и всегдашним, как бы по определению, осознанием своей правоты; она превращает учителя в «педагогическую бестию» — мне знакомо это состояние, оно мучительно.

Но в целом система — это некая технология. В разные годы я подолгу размышлял о некоторых её элементах, пытаясь как можно больше её формализовать. Как готовиться к уроку, как проводить урок, как планировать и организовывать изучение раздела курса, как рассказывать теорему и как её спрашивать, сколько и каких тетрадей должен иметь ученик по предмету и даже как рассадить учеников. Я просматриваю сейчас эти старые записи, многое кажется наивным, а что-то совсем уплыло из памяти, хотя и сейчас можно бы пустить в дело. Но так или иначе всё это, видимо, необходимо как некий этап профессионального становления.

Вот только один пример. Сейчас для меня подготовка к уроку сводится к его продумыванию. План урока—в голове, рождается от установки и автоматически вписывается в устоявшуюся систему. Когда-то я делал очень подробные планы уроков, но все они на свалке, не представляю себе мастерского преподавания по бумажке. А как придёт мастерство, если всё время работать по старым планам? Никогда не работал по чужим планам, не вижу смысла такой работы, но ведь до сих пор в методических пособиях печатают такие планы !

Я уже говорил, что система омертвляет. Противодействуя этому, много импровизирую, в частности, позволяю себе идти на урок без чёткого плана. Бывает, ученики предлагают мне решить на уроке задачу, «выкопанную» неизвестно откуда. При желании можно найти на таком уроке много огрехов, но в нём есть ясный смысл. Однажды довелось мне быть на уроке биологии в американской школе. Смотрю, слушаю. И вдруг учительница — хорошо знакомая — предлагает мне занять место у её стола и рассказать ученикам что-нибудь на тему «Геометрия в биологии». Пожалуй, это была рекордная импровизация в моей учительской карьере — я и в России ничего подобного не делал. Иду к столу, а в голове обрывки: двойная спираль, форма вирусов, симметрия в живом мире. Вышел и неожиданно для себя начал рассказывать о том, как измерить расстояние от уха до уха —мол, параметры головы очень важны в антропологии.

Вряд ли эти уроки-импровизации теперь появились бы без предыдущей многолетней работы, которая кажется мне порой едва ли не бессмысленной — подумать только, на что я тратил время!

А однажды я встретился со студентами, будущими учителями математики. Среди прочего поведал им о своём отношении к урокам, которые проводят на конкурсе «Учитель года».

—Эка невидаль,— говорю я.— Любой опытный учитель может приготовить заранее урок-конфетку и провести его с блеском. А вот сказать ему, что урок будет неизвестно в каком классе — то ли в пятом, то ли в десятом, с неизвестными учениками, по теме, которую они сейчас проходят и о которой он узнает только из классного журнала за 10 минут до начала урока, да при этом не позволить ему даже заглянуть хоть в какой-то учебник — так вот это сразу всё прояснит. Потому, что он вынужден будет импровизировать.

И тут-то они мне и выдали. Спрашивают:

— А не можете ли вы сымпровизировать какой-нибудь урок прямо сейчас?

Вот и влип. Но отступать некуда.

— Давайте тему. Голос с места:

— Описанная окружность. Секунды на раздумье. Впрочем, нет — не раздумье. Цепочка ассоциаций. Хаотическая. Какие-то обрывки образов. Надо как-то начать...Затем.

— Представьте себе, что надо сделать правильную пятиконечную звезду, например для флага. И как же? Начнем с окружности. Разделим её на пять равных частей. Затем соединим последовательно полученные точки деления. Получим правильный пятиугольник. Потом известным способом нарисуем звезду. Вернёмся к пятиугольнику. Где расположены его вершины? На окружности. Как?

Дальнейшее разворачивается как бы само собой.

Разумеется, при нормальной подготовке к уроку я бы наверняка начал иначе, да и сам рассказ получился бы другим. Но самому на таком уроке было бы куда менее интересно.

В последние годы я всё больше размышлял об отметке, которую мы ставим ученику. Некоторые считают, что она должна идти по другой шкале — двенадцатибалльной и даже что она вообще не нужна. Думаю, что последнее — крайность, объяснимая господствующим сейчас культом отметки, который весьма грубо может быть передан так: хорошие отметки — хороший ученик. Но мне трудно представить себе безотметочное обучение в старших классах.

С отметкой у нас творится что-то странное. Она выставляется не за то, что ученик сделал, а за то, что он не сделал. В самом деле, имеется некая градация ученических ошибок (грубые, мелкие и т. д.) и отметка выставляется не за качество сделанного верно, а за качество, если можно так выразиться, ошибок: чем грубее ошибка и чем их больше, тем ниже отметка. И ведь медали выдают в соответствии с этим принципом!

Возьмём, однако, такой достаточно частый случай. В работе было несколько задач разной степени сложности. Ученик хорошо справился с более сложной задачей, а в менее сложной ошибся, пусть грубо ошибся. За грубую ошибку я имею право существенно снизить отметку, иногда до «3». Ну а куда же тогда девалась работа ученика в сложной задаче? Быть может, грубая ошибка в работе и появилась потому, что её автор слишком много сил затратил на решение сложной задачи? Ну а не сделал бы он этой сложной задачи вообще, зато, предположим, не сделал бы и этой грубой ошибки — и тогда была бы возможна отметка «4». Конечно, это именно рассуждение носит умозрительный характер. Но ситуация, когда в работе ученика сделаны сложные примеры, но допущены ошибки в простых, хорошо известна каждому учителю. И ещё необходимо учесть, что классная работа — это фиксированное время. Не хотим ли мы чересчур многого от детей?

А вот отрывок из беседы с коллегами:

— Представьте себе, что ученик решал непростую геометрическую задачу. И всё у него правильно, за исключением последней строчки, в которой есть что-то вроде $2 \cdot 2 = 5$. Так что вы ему поставите?

Подавляющее большинство ответов: 4.

— Почему 4? Вы же ставите отметку по геометрии, а не по арифметике!

— А что ему поставят за это на приёмных экзаменах? — слышу в ответ.

В деле выставления отметок можно идти по иному пути — не от анализа ошибок (как это требовали от нас при исполнении каждой работы, спущенной «сверху»), а от анализа того, что и как учеником сделано. Если ученик делает только те задачи, для решения которых есть недлинный алгоритм или очень простой образец, разобранный к тому же в классе, то он получает не больше «тройки». Например, такое задание: «Решить неравенство $x + 5 > 3$». Если же он делает задачи, уровень сложности которых требует знания длинных алгоритмов, или эвристических предписаний, или достаточно сложной комбинации алгоритмов, но образцы всего этого были даны на уроке, то ученик может получить «четыре». Например, такое задание: «Решить неравенство относительно x: $ax>1$». И наконец, отметку «пять» получает ученик в том случае, когда делает то, что не объяснялось и не имело аналогий на уроке. Например, в той же теме «Решение линейных неравенств» можно предложить решить такое неравенство: $(a/x) > 1$.

При этом, разумеется, отметка напрямую зависит от того, что делалось в классе. А то, что делается в классе, определяется, в частности, установкой. А установка у каждого своя. Вот и получается, что отметки, которые ставит учитель Пётр, отличаются от отметок, которые ставит учитель Павел, причем за одну и ту же работу!

Страшно ли это? По-моему, нет, скорее, непривычно. Хотя так ли уж и непривычно? Известно ведь, как разнятся отметки в одной и той же школе у разных учителей даже по одному и тому же предмету. Но совершенно ясно, что такая позиция резко противоречит имеющейся тенденции к унификации, так чётко выраженной в ЕГЭ.

Такая система в выставлении отметок не есть революция, но не всё тут очевидно. Как быть, например, если требуется проверить ученика сразу по нескольким разделам темы или по нескольким темам? Скажем, по тригонометрическим функциям в 10 классе: здесь ведь и тождества, и уравнения, и неравенства... Я делал так. До работы предлагал ученикам определиться, т. е. понять, на какую отметку они претендуют: «3», «4» или «5». А на самой работе каждая группа учеников согласно своему самоопределению выполняла своё задание. Таким образом, задачи предлагаются не по вариантам, а по трём группам, по степени сложности.

У меня не было полной ясности в этом деле. Вот ученик претендует на «пятёрку», а им ничего не сделано. Что ставить? Можно, конечно, поставить «двойку» и выдать нравоучение, да как-то жалко. Или другой пример: из двух заданий на «четвёрку» ученик сделал одно — тут что ставить? Эти трудности частично преодолимы в соответствии с чётким принципом: «сомнение учителя — в пользу ученика» или ещё красочнее: «Полбалла – в пользу юнкера».

А в целом убеждён, что выставление отметок — дело неформальное. Вот ещё одно соображение по этому поводу.

В последние годы я практически перестал ставить отметки «за знания и умения». Я их ставлю за работу. «Работа» ученика — понятие интегральное, сюда входят не только знания и умения, но и их уровень, а также, как бы это сказать поточнее, «количество и качество вложенного труда», что ли. Сюда входят и способ подачи работы, и её оформление, и качество рисунков, и даже соображения по поводу работы, например, появившиеся вопросы.

— Как вы можете хотеть, чтобы я относился к вашей работе хорошо, если вижу, что вы сами относитесь к ней плохо? — вопрошаю я, когда вижу работу, сделанную несерьёзно, неряшливо, некрасиво. Разумеется, в классной работе, идущей на скорости, такие требования нуждаются в корректировке.

Несколько слов про оформление работы. Вопрос: "А как надо оформлять работу?" я слышал много раз - от учеников, от коллег. Моё мнение - здесь не может быть никаких формальных требований. Письменная работа, которая подаётся куда-то кому-то, должна быть понятна. Ещё сильнее - она не должна быть непонятной ни в одном месте.

Использование символического языка (логического или языка теории множеств) полезно, но в меру. Чрезвычайно трудно проверять работы, в которых нет или почти нет слов, одни только символы. Этот символизм ещё допустим при решении некоторых аналитических задач, но не более. Приходится идти на компромисс между символическим и естественным языком, используя неформальные соображения. Идеал оформления - решения задач в наших журналах ("Квант", "Математика в школе" , «Математика для школьников»), в пособиях для поступающих, созданных культурными (в математическом смысле) авторами. Отсюда мораль - учить детей создавать связный математический текст, а не набор формул и выкладок, неизвестно откуда взявшихся. На обучение культурному математическому письму уходит очень много времени и сил, видно как дети этому сопротивляются.

Любопытно, однако, что иногда моих учеников "заносит", и они пишут решение задачи чуть ли не как сочинение, включая в текст свои гипотезы, даже неудачные, даже оценки сделанного. Когда дети начинают создавать вполне читаемые тексты - впечатление от работы бывает прекрасное. Некоторые из таких работ я храню у себя дома.

И совсем здорово, когда ученик в конце работы (домашней) укажет и тех, кому он признателен за советы и помощь. Я никогда не снижаю за это отметку. Наоборот - подчёркиваю, что такие благодарности - норма в любой работе, к которой сам относишься уважительно.

По ходу замечу, что в математическом образовании за кадром всегда остаются титанические усилия, дабы научить школьников не только созданию культурного текста, но также усваивать математический текст, слушать говорящего, наводить порядок в собственной голове, говорить так, чтобы понимали - над этим работаешь годами.

Ну а как быть в этой системе с пресловутой отметкой «два»? В начале своего пути я, если можно так выразиться, шёл с «программой на ребёнка» и в самый первый год работы в четырёх пятых классах оставил на повторный курс чуть ли не 10 детей. Сейчас мне неприятно это вспоминать, но, что поделаешь, было. Это ведь почти аксиома — ребёнок не виноват. Он не виноват в том, что у государства мизерные расходы на образование, что в классах бывало больше 40 учеников (мой «рекорд» такой – в выпускном классе - 44) , что его обучают нередко ненужным да ещё малоинтересным вещам, что и тому, что нужно, обучают плохо, что ему неуютно в школе... И потому я иду сейчас в обратном направлении: «от ученика к программе». Значит ли это, что вообще не надо ставить «двоек»? Да нет, конечно. Просто я не люблю выводить в журнале эту цифру, «лебедя». Ставить можно столько «двоек», сколько нужно, но при одном условии — при сопереживании этой отметки с детьми. Если такого чувства нет, то или надо прекратить ставить «двойки», или вообще менять профессию.

А ещё с отметкой можно «играть», Так, работая с малышами, я объявил субботу «днём пятерок» — других отметок в этот день не ставил. Или — в старших классах — отметка в журнал ставится только тогда, когда ученик с ней согласен, когда он не берётся её улучшить. Например, он чувствует, что классная работа ему не удалась. Он может «отказаться» от неё и получает тогда возможность справиться с ней дома, правда на более жёстких условиях. Возможны и другие примеры.

Я полагаю, что школьная отметка субъективна не только фактически, но и по существу. От субъективности её никуда не деться, как бы мы не пытались формализовать критерии для её выставления. В конце концов и задачи, и критерии отметок придумывает человек со всеми его особенностями и вкусами (и нелепостями). И потому я должен понимать всю меру ответственности, выставляя отметку (сколько ученических обид прячется за этой сухой фразой - я до сих пор помню свои детские слёзы, когда получил первую в своей жизни "двойку").

Особенно острая ситуация возникает на экзаменах. Не очень - то я принимаю необходимость так называемых "экзаменационных комиссий ". Если два учителя думают про конкретный ответ ученика одинаково, то один из учителей - лишний (для выставления отметки). Если же они думают по - разному, то либо их расхождения сказываются на отметке, либо нет. Если не сказываются, то опять же - один из них лишний. А если их мнения об отметке расходятся принципиально, то экзамен - не то место, где "выясняются отношения". Тут уж точно один из учителей - лишний.

Убеждён, что экзаменационная отметка может служить поводом только для улучшения годовой отметки. Требование - ставить итоговую отметку не выше экзаменационной полагаю нелепым, ибо всякое бывает на экзамене. Однажды хорошая моя ученица пришла на выпускной экзамен по физике с температурой 39 с чем-то. И никому не сказала. Ясно, что она могла наговорить. Хорошо, что нам удалось увидеть её болезненное состояние. А если бы не увидели?

Другой случай у моих учеников - день похорон члена семьи совпал с днём экзамена. Ещё случай - пришла девушка на письменный экзамен по математике и целый час пила валерьянку - никак не могла успокоиться. А кто-то проспал, и пришёл только за час до окончания экзамена. Да и у меня самого было нечто подобное - ни о чём математическом некоторое время думать не мог.

Может быть всяко…

Ещё добавлю, что иногда предлагаю поставить отметку самим школьникам - и соученикам (за выслушанный ответ у доски или за письменную работу, ими проверенную), и себе (после публичного разбора иной работы или задачи) . Любопытно послушать, как они мотивируют своё мнение - тут-то и становится понятно, чему их научил.

Совсем недавно методист и математик И. Высоцкий, анализируя ситуацию со школьной отметкой как специалист по достоверному получению результатов, заключил: «…нельзя использовать школьные оценки…как объективный показатель знаний ученика или, упаси боже, эффективности работы учителя.»

Несколько слов о дополнительных занятиях с учениками после уроков и о переписывании ими неудачных работ —опять же после уроков. Я уж и не помню, когда проводил такие занятия в последний раз. Но в первую половину моей школьной стези они считались для учителя чуть ли не обязательными. Разумеется, не оплачивались. Мой отказ проводить их квалифицировался администрацией и даже «общественным мнением» чуть ли не вызовом всей образовательной (и даже более) системе. Даже и сейчас довольно много моих коллег считают этот вид деятельности вполне нормальным. А если подумать...

С какой, собственно, стати (юридической, гуманистической, моральной — как угодно) мы имеем право посягать на личное время ребёнка? Хорошо бы нам всем понимать, что личное внеучебное время школьника (и вообще любого человека) — это святыня. Это раз. Далее, наше дело — научить, причём, что особо подчеркиваю, за отведённое время. Если я считаю, что процесс в положенное время не завершён, что «научить» не получилось — а основанием такому мнению являются учебные неудачи ребёнка, то сие означает, что я свою работу не сделал так, как хотел (я исключаю форсмажорные причины). А посему надо что-то менять в своей системе работы. И, наконец, если какие-то учебные акции и можно делать в сверхурочное время, то только на консультациях, вне-сённых в расписание, и только на добровольных началах. Добровольных в точном смысле слова, без всякого нашего лукавства. Ясно ведь, что никакой ученик не заинтересован в плохих оценках, и я запросто могу выдать его «переписывания» как совершенно добровольную акцию. И даже участие в классном часе при таком понимании дела для учеников должно быть добровольным.

Заключая разговор о системе, ещё раз хочу подчеркнуть её потенциальную изменчивость. У меня уже более полувека учительского стажа, но и сейчас что – то да меняется. Например, в последние годы домашнее задание перестало быть единообразным. Каждый выбирает для себя задачи к уроку в заданном мной числе – обычно 3, но приветствуется их увеличение. Одна задача оформляется учеником тщательнейшим образом - для проверки. Общее число решённых задач фиксируется отдельно, причём эта информация имеет публичный характер, она вывешена на доску информации в кабинете математики. Например, в году было 64 урока, поэтому должно быть решено не менее 192 задач, из коих 64 должны быть оформлены наилучшим образом. Я не проверяю, сколько на самом деле решено задач – эту информацию ученик выдаёт «по совести». Убеждён, что основой ученического продвижения является рост его самосознания, всё прочее вторично. Мне остаётся только его развивать. Задачи, предназначенные к проверке, стараюсь просматривать наиболее тщательно, отмечая уровень их сложности и качество исполнения, включая грамотность, эстетичность (рисунки!) и даже стиль. С иным почерком «борюсь», предлагая ученику оформлять работу в текстовом редакторе. При выставлении итоговых оценок просматриваю весь набор задач, подготовленных учеником к проверке – есть ли динамика по трудности и качеству работы? Разумеется, возможны нюансы, ничего не стоит абсолютизировать.

Ещё одна, третья составляющая деятельности учителя — атмосфера на уроке. В этой атмосфере разворачиваются отношения с детьми и детей между собой. Когда-то, в начале пути, я спросил у своего учителя, а затем коллеги: «А вы не боитесь, когда идёте на урок?» «А чего мне бояться, пусть они меня боятся»,— ответил он. Я не берусь дать определение атмосферы или хотя бы вполне ясное толкование, не довелось мне и читать о ней некое аналитическое исследование. Но её существование — на каждом уроке — мне очевидно. В один класс идти хочется, а в другой — никакого желания; сделали дети домашнее задание — это одно, а не сделали — всё стало иначе; сидит на уроке «ваш закадычный враг» или он пошел погулять — «две большие и разные разницы»; даже если столы и стулья в классе поставлены не так, как вчера, что-то неуловимо меняется.

Одно время я во время самостоятельных работ учеников включал тихую мелодичную музыку. А что? Горох и тот лучше растёт под В. Моцарта (были и такие эксперименты). Большинству это помогало, но, увы, было и меньшинство. А однажды было и такое - девушка, выпускница музыкальной школы, даже решать перестала – заслушалась. И, наконец, с одними и теми же детьми: на уроке — одно, а в походе — другое.

Атмосфера рождается от взаимоприсутствия и взаимодействия вполне конкретных людей, существует вне нас, но и в нас тоже, поскольку мы — взрослые и дети — её и творим. Её основа — отношения, как бы отпавшие от нас: мои отношения к детям и предмету и отношения детей ко мне и к предмету.

Что ясно из этих несложных заметок? Ну, во-первых, атмосферу невозможно скопировать и её нельзя перенять из чужого опыта. Во-вторых, она зависит от установки, и если изменилась установка, то каким-то образом меняется и атмосфера.

Был у меня такой печальный опыт. Работал я в одном классе несколько лет, сначала с малышами, что называется, душа в душу. Но по мере их взросления, по мере близости к переходным экзаменам в старшие классы я стал «подкручивать гайки». И то ли не так «подкрутил», то ли ещё что-то, но постепенно атмосфера в классе изменилась. Вместо уроков-праздников стали всё больше получаться уроки-будни.

В своей работе учитель может идти разными путями: от атмосферы к уроку, т. е. подстраивая работу в классе под уже имеющуюся или формирующуюся атмосферу; от урока к атмосфере, т. е. от конкретных педагогических процессов и лишь учитывая ауру вокруг них; комбинируя оба варианта в зависимости от сиюминутных задач преподавания. Всё это хорошо видно, например, при выходе ученика к доске. Если ученик вызван на отметку, то выбран второй путь; если же вокруг его ответа организовано живое обсуждение, как и было задумано учителем, то выбран первый путь.

Идеальная атмосфера — это совместная работа в поиске истины. Когда и я участвую в таком поиске, без всякой игры, текут прекрасные и, к сожалению, редкие минуты — класс их чувствует и становится другим.

Разговор об атмосфере достаточно деликатен, ибо напрямую выходит на разговор о личных качествах учителя. Оставим эту тему, но один пример хочется привести. Подсказка на уроке — дело ученической доблести, а также педагогическая задачка. К её решению можно прийти, идя от представления об идеальной атмосфере. Оно весьма просто.

— Вы, дети, хотите помочь стоящему у доски. И я хочу ему помочь. Мы вместе хотим помочь ему выяснить, что же он знает на самом деле. Подсказка никогда не помогала тому, кто ничего не знает. Поэтому ваша лучшая подсказка заключается в том, чтобы задать ему вопросы по поводу того, что он сказал. Если он ответит на ваш вопрос и тем самым дополнит свой ответ или поправит его, то отметка ему снижена не будет. И ему вы поможете, и вам самим зачтётся за помощь. Итак, всё, что вы хотите подсказать, не надо таить от меня, а, наоборот, надо высказать вслух, но только в виде вопроса.

Наблюдать за такими организованными «подсказками», слушать их, комментировать, сравнивать — большое удовольствие.

Сравнительно недавно появилась концепция «педагогики сотрудничества». Как я её понял, эта концепция в основном и относится к атмосфере в школе и классе. Смысл её в том, что она противостоит концепции авторитарного руководства детьми. Такую точку зрения на атмосферу можно только приветствовать. Но! Положение осложняется тем, что практически приходится работать в обоих режимах: авторитарном, скажем мягче — программном, и режиме сотрудничества. Подлинная проблема — это проблема выбора того или иного режима для решения поставленной педагогической задачи. Разрешая эту проблему, мы опять придём к понятию установки. А то, что программный режим необходим, прямо следует из степени ответственности участников педагогического процесса за его результат — ясно, что у детей и взрослых она разная. И ещё — никакая атмосфера не решает сама по себе всех проблем образования и даже главных проблем. Конкретно: в любой атмосфере ребёнок с пониженной обучаемостью таковым и останется. Не исключено, по-моему, и то, что в программном режиме ему будет комфортнее.

Компоненты «АСУ» учителя взаимосвязаны и существовать отдельно могут только в логическом анализе. Атмосфера и установка непосредственно «завязаны» на личность учителя. Всякие попытки популяризировать ту или иную систему работы отдельного учителя, только систему, вряд ли могут привести к широкому её распространению. Ибо система мало того что определяется установкой, но реализуется в определённой атмосфере. Значит, хотя и опосредованно, система зависит от личности учителя. Система работы не золотой ключик к всевозможным проблемам образования, а всего лишь организационная форма взаимодействия ученика и учителя. И только!

Более того, становится понятно, почему так трудно переносится и заимствуется иной педагогический опыт. Иной опыт — это иное «АСУ», а за ним стоит иной человек. Разумеется, я не против пропаганды того или иного удачного учительского опыта. Только зная его, начинаешь понимать, чего добился сам и чего, увы, не добился. Чем больше новаций, чем они глубже, тем больше они вносят живого духа в наше дело. Тем самым они хоть немного расшатывают изначальный консерватизм сложившейся образовательной машины. Истинный смысл этих новаций в том, что именно они, их количество и качество, определяют жизнеспособность образовательной системы в целом. Я уже не говорю о том, что формирование в детях творческой активности не может происходить тогда, когда административным шлангом гасят творческую активность учителя.

На одной из лекций учителям я услышал жуткую просьбу: «Вы не рассказывайте нам, как можно делать. Вы расскажите, как надо делать!»

Раз мы уже заговорили о системе образования в целом, позволю себе несколько замечаний частного характера. Ясно, что она должна быть гибче и эволюционировать быстрее. Я полагаю, что механизм образовательных реформ, спущенных сверху, доказал свою несостоятельность. Тем более в этой системе не может быть революций, как бы этого ни хотели чересчур нетерпеливые. Что же нужно? Ответ, пожалуй, банален, но другого я не вижу: поднять престиж образования в целом, поднять престиж профессии учителя, вложить в образование хорошие деньги и максимально его децентрализовать.

Эти меры необходимые. Но вряд ли достаточные. Я сомневаюсь, что общенациональный успех системы образования будет достигнут без громадного труда тысяч учителей и громадного труда учеников. Это миф, что можно легко учиться. То есть это, конечно, можно для отдельного человека. Но я не верю в существование какого-то способа или метода, при котором исчезает этот громадный труд. Можно снять лишь отдельные трудности, но при этом они непременно возникнут в другом месте, как говорится, здесь действует «закон сохранения трудностей». Один пример. Мне всегда странно слышать о каком-то убыстрённом прохождении программы. Можно за один урок научить школьника дифференцировать многочлены. Значит ли это, что в его голове, в его абстрактном мышлении произошёл тот сдвиг, который вызван появлением бесконечно малых? Такой же вопрос я могу сформулировать о геометрическом воображении, комбинаторном мышлении и т. д. Вспоминаю одного моего ученика, очень смышлёного пятиклассника. Когда он видел вывод некоего алгебраического соотношения, он тут же норовил проверить его результат и вместо букв подставлял конкретные числа.

Сами по себе установка, система и атмосфера не гарантируют ещё качества урока. Я вообще думаю, что хорошие уроки существуют только на бумаге или в учительских головах. Проводишь очередной урок, и опять не то: что-то не сказал, что-то не сделал, на кого-то не обратил внимания, кому-то не помог. Внешне может казаться все распрекрасным, заливаешься себе соловьём, и дети вроде так хорошо слушают. А начнут говорить...

Урок в некотором смысле обречён быть неудачным. Во-первых, его делают люди со всеми их нелепостями.

(Здесь я позволю себе улыбнуться. Несть числа высказываниям, подобным следующему: «Людские поступки зачастую необъяснимы, и человек весьма смутно представляет, каков он есть на самом деле»,— заметил в своей нобелевской лекции китайский писатель Гао Синцзянь. Кажется, я понял их общую основу. Увы, всё никак не могу найти времени для создания стройной теории «человековедения» — я называю её нелепологией, ибо из всего живого мира нелепым бывает только человек. Теория начинается с аксиомы: «Человек — существо нелепое». Две следующие аксиомы — «Каждая нелепость проявляет себя нелепым образом» и «Нелепости складываются совершенно нелепо». Содержательные следствия получаются почти моментально, среди которых всем известные закон Паркинсона, закон Мерфи и принцип Питера. Разумеется, имеются случаи рационального поведения, но они, так же, как и случаи абсолютной иррациональности, находятся на «хвостах» кривой нормального распределения, но, кроме того, вписываются в аксиоматику.)

Во-вторых, урок —попытка совершить невозможное. Этих симпатичных рожиц передо мной бывало за 40, и во все головы не влезешь. Теоретическая педагогика (для себя я называю её бумажной) необходима, но пока она в основном исходила из молчаливого предположения, что перед учителем от трёх до семи человек, все из приличных семей и очень хотят учиться по всем предметам без исключения. Как-то не очень ясно, что делать с ребёнком, который давно уже махнул рукой на школу и на себя. Как, кстати, неясно, каким образом учить будущего Лобачевского. К тому же эти двое могут сидеть за одной партой. А парт ещё 20. И все заняты. И , в-третьих, на уроке всегда хочется увидеть чудо — миг понимания, момент перехода непонятного в понятное. Когда такое бывает, ходишь счастливый.

Конечно, всегда хочется провести этакий роскошный урок. Стандартное педагогическое решение - предложить детям интересную задачу или богатое поле деятельности. Здесь много возможностей.

Вот одна из них: в теме "Геометрическая прогрессия" рассказать задачу про изобретателя шахмат - о ней можно прочитать у Я. Перельмана. Обсуждая её, я спрашивал учеников: «А почему мудрец изложил свою просьбу так замысловато ?»

У него же приведена задача о римском полководце Теренции. Чуть подробнее - Теренцию представилась возможность разбогатеть, каждый день забирая из казны одну монету, ценность которой вместе с её весом удваивается, при условии, что эту монету он должен вынести только за счёт собственных физических усилий. Вопрос - насколько тут уместно именно удвоение, может быть лучше изменить коэффициент увеличения - как императору, пообещавшему эту награду, но экономящему государственные средства, так и Теренцию, который хочет ухватить побольше?

Ещё задача - об уникурсальных фигурах - тех, которые можно провести на бумаге одним росчерком. Её можно закончить беседой о графах, проиллюстрировав это понятие рассказом о кенигсбергских мостах и намекнув о науке с таинственным названием "топология" .

Вот набросок урока в выпускном классе , "последнего" в году .

Формулу $e^{\pi i} = -1$ запишем чуть иначе: $e^{\pi i} + 1 = 0$. В определённом, может быть даже метафорическом смысле, в ней "запрятана" чуть ли не вся математика.

1) Знак равенства.
2) Операции: а) сложение, б) умножение, в) возведение в степень.
3) Числа: а) 0, б) 1, в) π, г) i, д) e.
4) Исторические сведения.
5) "Шутки" по поводу.

Теперь - по порядку.

1. Многоликость знака равенства: $a = a$ - это само собой. Но что из этого можно "выжать"? Ничего. Что-то начинает получаться, если $a = b$. Но как это может быть? a - это a, b - это b. Как же они могут быть равны? Тут целая "философия". (Как - то академик А. Александров заметил: «Равными являются только неравные».) И всегдашние притом трудности. Пример - равенство векторов. Можно просмотреть не один учебник, пока найдёшь идентичные определения равенства векторов. Вспомним также о пресловутой конгруэнтности треугольников. Почему у нас в своё время "отменили" равенство треугольников, а ввели их конгруэнтность? Заминка – в определении равенства множеств и толковании геометрической фигуры как множества. Далее, есть равенство и тождественное равенство - есть ли между ними разница? "Эпопея" с тождествами: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ – это тождество, а $(x^2 - 1) / (x - 1) = x + 1$ - тождество ли, коли изменилась область определения? Затем - развитие темы. Равенство - это отношение, частный случай отношения эквивалентности с тремя свойствами: рефлексивность, симметричность, транзитивность. Самое интересное свойство равенства - транзитивность. Благодаря ему, мы узнаём о то, чего не знали. Сначала мы знали, что $a = b$. Потом узнали, что $b = c$. И – вот те раз - $a = c$!

Реально это довольно часто происходит в геометрии, вдруг оказывается, что какие – то отрезки равны, потому что каждый из них равен третьему отрезку. (Вопрос по ходу - следует ли рефлексивность из транзитивности и симметричности? Возьмём в записи транзитивности $c = a$ и получается, что следует. На самом деле - нет.) Если убрать из отношения эквивалентности транзитивность, то получим отношение толерантности - "похожести". Очень любопытно его сопоставление с эквивалентностью.

Вернёмся к равенству. Ещё бывает равенство по определению, например, $0! = 1$. Это уже совсем другой тип равенства. Ещё есть знак равенства в уравнении - нечто совсем другое - ни отношение, ни по определению. И ещё – в записи функции: $f(x) = x^2$. И ещё – в записи производной функции: $(x^2)' = 2x$.

2. Замечу, что умножение - результат обобщения сложения, а возведение в степень - обобщение умножения. О чём наука алгебра? Об операциях на множествах.

3. а) О числе 0 можно порассказывать многое. У Ф. Кривина есть даже небольшая сказочка про него, её вполне можно прочитать в классе. Но до нуля ведь надо было додуматься - греки, при всей их гениальности, не смогли этого сделать. И в самом деле - каково было придумать знак для того, чего нет! Это только лет 100 назад стало понятно, что 0 можно рассматривать как нейтральный элемент для операции сложения.

б) О числе 1. Вспомним Л. Кронекера: " Господь бог создал 1, все остальное дело рук человеческих." А также Н. Лузина: "Мы должны склониться перед гением Человека, создавшего…понятие единицы." Разумеется. Опять же, только с развитием абстрактной алгебры стало понятно, что число 1 можно рассматривать как нейтральный элемент операции умножения. Замечу удивительную роль этих двух символов - 0 и 1 - в математической логике, а через неё - во всей компьютерной революции нашего времени.

в) О числе π написана не одна книга. Интересно его появление вне геометрии: как сумма ряда, в виде непрерывной дроби, в игре Бюффона, как площадь под кривой. Как анекдот - постановление неких американских законодателей считать $\pi = 3$. Я читал, что именно это значение для π упомянуто "для гренландских китов" – при каких-то их измерениях.

г) Почти мистическая история числа i. Несколько способов его подачи: как корень квадратный из -1, как упорядоченная пара вещественных чисел (0,1), как оператор поворота плоскости на 90^0, как вектор на плоскости.

д) Несколько ипостасей числа *е*: как предел последовательности, как основание показательной функции, которая растёт определённым образом, из решения дифференциального уравнения, как площадь определённого участка под гиперболой.

4) Исторические сведения. Ведь каждый знак, каждое обозначение как-то появились, кто - то их придумал. У каждого из них своя "история".

5) i^i - число вещественное! Этот фантастический результат получается после несложных действий с комплексными числами в показательной форме.

О комплексных числах более подробно поговорим дальше.

С некоторых пор самое интересное для меня на уроке происходит не тогда, когда говорит учитель или беспрерывно отвечают ученики, а тогда, когда все молчат. Вполне в духе древних китайских философов: что происходит тогда, когда «ничего не происходит»?

Однажды попал я на один урок в незнакомый пятый класс — замещал. Мне надо было проверить срочно пачку контрольных, и понятно, с какой охотой я вошёл к детям. «Ладно,— думаю,— дам им задачку на весь урок, а сам, глядишь, и успею». И рассказываю историю с маленьким К.Гауссом, как ему пришлось на уроке складывать все числа от 1 до 100. Закончил я рассказик, пообещал в конце урока «нашему будущему математику» поставить «пятёрку» не только в дневник и уселся за стол, за собственную работу.

И не тут-то было. Минут через десять на меня обрушился шквал предложений и способов. Способ, предложенный маленьким Карлом, тоже был найден. Куда же они пропадают потом, эти маленькие гении? "Как получается - вопрошал А. Дюма - сын, - что маленькие дети такие умненькие, а большинство взрослых - такие дураки? " И отвечал сам же: " Это издержки образования."

И каждый день всё сначала. Вот я вошёл в класс и закрыл за собой дверь...

Глава II.

В ПОИСКАХ ЛУЧШЕГО

11.1. НАЧАЛО ПУТИ - И СРАЗУ ПРОБЛЕМЫ

Первые три года после окончания института я работал в той школе, где учился сам и где проходил педагогическую практику. Эти годы до сих пор вспоминаю с удовольствием. В основном я входил в мир детства. Воспитательство (а один год из этих трёх я был воспитателем в двух классах: 6 и 8, причем в 8 классе не работал учителем, и вообще мои воспитательские классы занимались в разные смены), математический кружок и его газета «Квадратура», подготовка к олимпиадам, туристские походы, слёты и соревнования — всё было ново и интересно.

Моих математических познаний вполне хватало. Правда, я понял, что не умею решать арифметические задачи, так сказать, «арифметически», т. е. без составления уравнений. А такого типа задачи обязательно предлагались на олимпиадах. Тогда я прорешал все задачи из книги В. Широкова. С тех пор знаю по себе: лучший способ научиться решать задачи состоит в том, чтобы самому решать эти задачи. Не надо жалеть времени, сил и не стоит надеяться, что на каких-то курсах кто-то научит. Впоследствии именно так я учился решать комбинаторные задачи — по книгам Н. Виленкина и векторные задачи — по работам 3. Скопеца, список легко продолжается...

Позволю себе чуть отклониться. За годы работы мне пришлось рассказывать много начальных математических курсов: аналитическую геометрию на плоскости, вычислительную математику, элементы конечной математики, начала теории вероятностей, вести кружки и факультативы разнообразнейшей тематики. Довелось поработать и в вузе, там я готовил к поступлению, вёл занятия по математическому анализу, основаниям геометрии, спецкурсы и семинары. Я увидел, как много красивого есть в математике и как редко эта красота пробивается к школьнику, заваленная Монбланом чисто технической работы. И я понял, что отдача в нашей работе пропорциональна времени, проведённому за рабочим столом — наедине с книгами, учебниками, задачниками. Если на учителя навалено столько забот и обязанностей, что у него не остаётся сил для такого труда, то бессмысленно требовать от него высокого качества работы. И никакие курсы этого не восполнят.

В 1962 году, с грустью распрощавшись с «малышами», я перешёл на работу в только что созданную математическую школу № 239. (Ещё несколько раз в своей жизни я имел удовольствие учить детей математике в средних классах.)

В те годы очередной реформой было введено одиннадцатилетнее обучение, и в старших классах наряду с общим давалось и начальное профессиональное образование. Это было весьма разумно, ибо тысячи выпускников школ, не попавших в вузы, попросту не знали, куда себя деть, так как ничего не умели делать. Как раз ко времени появилась специальность «оператор ЭВМ», которой и обучали в математических школах.

Первый выпуск математических классов в школе № 239 был в 1964 году (инициатива шла от учёных – математиков – Г. Петрашеня, В.Залгаллера и директора школы М.Матковской) . Сейчас уже никто не обсуждает целесообразность профильных классов, но за эти десятилетия и 239-я школа, и ряд других таких же школ города натерпелись много. Неоднократно ставилось под сомнение даже их существование, а некоторые школы просто расформировали, несмотря на успешную деятельность. Причины тому - «идеологические», как – то: нужный социальный состав (поменьше детей интеллигенции), национальный состав (соблюсти процент евреев), подозрительный состав учителей и, упаси господь – проявление юношеского максимализма в борьбе за правду и справедливость во всём государстве.

Почти сразу обозначились *проблемы образования в специализированных школах.* Вот некоторые из них:

1. *Учебный план*. Каким должно быть соотношение математических, естественно - научных и гуманитарных предметов? Возможно ли выделение обязательных и необязательных дисциплин?

2. *Содержание математического образования*. Должно ли оно расширяться, или ему идти в сторону углубления? Конкретно: давать ли ученикам начала, скажем, топологии, или предпочесть изучение разнообразнейших применений комплексных чисел?

И до сих пор среди вузовских математиков (но не только – нынешний министр образования также за это) бытует мнение, что не стоит в школе (любой!) знакомить детей с основами анализа — этому прекрасно научат они сами. Типичный, сугубо специализированный взгляд на наше дело, когда игнорируется общекультурное значение математики и ее необходимость при изучении физики.

Вот ещё вопрос - какова преемственность школьного и вузовского курса анализа? Легко копировать части вузовского курса хотя бы потому, что учителям он хорошо известен и оправдывая это тем, что "потом на первом курсе выпускнику будет легче". Да, конечно, но такое решение проблемы - слишком простое, а потому вряд ли верное. Мне не один раз пришлось слышать от своих воспитанников: "В первом семестре было нечего делать, мы всё это уже проходили в школе. А потому занимались спустя рукава. Отрезвление не всегда приходило быстро. К тому же, глядишь - на втором курсе уже проблемы с учёбой, потому как на первом курсе дурака валял."

Не лучше ли действовать скорее наоборот - построить школьный курс так, чтобы он не дублировал вузовский, хотя бы в методике? Позаботиться в первую очередь о существе дела, а не о технических аспектах.

Пожалуйста, пример - изучение предела последовательности, который является, разумеется, частным случаем предела функции на "плюс - бесконечности". В большинстве известных мне учебников по высшей математике понятие предела последовательности предшествует понятию предела функции. Однако можно (и есть учебники, в которых эти понятия переставлены) начинать с предела функции.

Чуть подробнее. Различают два вида предела функции: в точке и на бесконечности. Для непрерывных функций предел функции в точке не существен, ибо он равен значению самой функции в этой точке. С пределом функции в точке естественно знакомить при изучении разрывной функции. Сами по себе разрывные функции не являются предметом изучения в школе, а служат разве что контрпримерами, полезными для общего математического развития. Поэтому (с некоторыми оговорками, убирая экзотику) можно рассматривать разрывную функцию как кусочно - непрерывную.

Замечу, что определение непрерывной функции можно дать независимо от понятия предела. Более того, можно начать даже с дифференцируемости функции (опять же, обходясь без понятия предела функции), из которой затем вывести непрерывность - ведь в школе изучается в первую очередь класс дифференцируемых (гладких) функций. Разумеется, затем естественно показать существование кусочно - гладких функций.

При изучении предела функции на "плюс - бесконечности", также можно действовать не вполне традиционно. Введём новую переменную, стремящуюся к нулю справа, и тогда предел функции на "плюс - бесконечности" сводится к пределу функции в нуле.

Итак, при изучении понятия " предела вообще " главное я вижу в изучении асимптотического поведения функции. Именно его, в первую очередь, важно было растолковать ученикам. А уж потом получить нужные нам теоретические сведения о пределе последовательности.

К тому же изучение основ анализа в школе порой заформализовано в ущерб пониманию сути. Чрезмерная тренировка в нахождении пределов, производных, интегралов заменяет постижение смыслов. Иногда я предлагал весьма сильным ученикам такую задачу: «Доказать, что «достаточно хорошая» положительная функция, имея максимум и асимптотой ось абсцисс, имеет также и точку перегиба.»

В ответ было: « так это же очевидно».

3. *Учет специфики школы*. Учить математике, к примеру, тех, кто больше любит её,— это совсем не то, что учить математике тех, кто предпочитает физику. Возможно, эти группы надо учить разной математике. Я знаю опытного учителя, который успешно работал с «математиками» и не нашёл общего языка с «физиками».

Различие между «математиками» и «физиками» я вижу, в частности, и в том, как они решают задачи. Для иллюстрации я приведу такую:

«Зафиксируем два состояния стрелок часов: когда они совпадают по направлению и когда они противоположны. При переходе из одного состояния в другое часовая и минутная стрелки образуют между собой и острый угол, и тупой. На каждый из этих углов уходит какое-то время. Так какое из этих времён больше?» Мне не раз приходилось наблюдать разницу в интеллектуальных действиях тех и других: «математика» сразу потянет на составление уравнения, в то время как для «физика» эта задача устная, связанная с переходом в другую систему отсчёта.

Вот аналогичная задача . «По прямой в одном направлении движется отрезок, причём его концы движутся с разными скоростями v_1 и v_2. С какой скоростью движется середина этого отрезка?»

4. *Учебники и учебные материалы*. Или их вообще не было, или мал выбор, или они недостаточно специализированы. По геометрии специализированный учебник появился аж через 20 лет после создания таких школ. На деле почти всё приходилось рассказывать самому.

5. *Установка школы*. Кого она готовит? Личность? Будущего учёного? А может быть, обучение в такой школе эквивалентно хорошей подготовке для поступления в технический вуз? Боюсь, что на практике получается именно последнее, но мне эта задача кажется лёгкой и неинтересной.

6. *Проблема отбора*. Отбирать отличников? Многие из них оказываются беспомощными в профильном обучении. И наоборот. Примеров предостаточно. Однажды мы приняли в 10 класс
Юрия Н. , у которого в свидетельстве за девятилетку были сплошь «тройки» и только по математике «четвёрки». У него оказались прекрасные способности к математике, особенно к аналитическим выкладкам. «Школьные» интегралы он «брал» устно. Грамотность, однако, была близка к нулю, у учительницы литературы волосы вставали дыбом, когда она читала его сочинения с двузначным числом ошибок. Умолчу о том, как он был принят в вуз, нашлись понимающие люди в приёмной комиссии. Сейчас он - профессиональный математик и читает лекции на английском языке.

7. *Проблема развития способностей*. В школе оказываются дети, более способные к математике. Но как эти способности развивать? В каком направлении? К чему стремиться? Кроме того, бывает, что в начале обучения школьник теряется, порой выглядит беспомощным. Одну из учениц мы хотели после первого года обучения исключить из школы за «безнадёжность», но что-то нас удержало. В следующем классе она была уже «на уровне», а в выпускном получила диплом на городской олимпиаде по математике. Сейчас она профессионал-математик. История с ней научила меня на всю жизнь — торопиться с выводами не надо.

С другой стороны – победители международных олимпиад, я ещё рот не открыл первого сентября, а они уже знают почти всю школьную программу, и даже не только школьную. У меня были ученики, которые к концу обучения имели сданные экзамены по университетскому курсу анализ. Тут главное – не мешать им обычными учительскими требованиями. И пусть такой ученик на уроке делает что – то своё, благо у него в голове всегда сидит задача. Будет ему интересно на уроке – замечательно. У меня спрашивали: «А как Вы учили Гришу Перельмана?» Сейчас мне вспоминается, что персонально никак особо не учил. А как учить , если он решал почти любую школьную задачу даже не прикоснувшись к тетрадке? Поднял свою фантастическую голову, слушает, что делается на уроке – уже хорошо.

8. *Методика обучения*. Вопросов — уйма. Вот один из них, чуть ли не самый простой: каков должен быть характер самостоятельных и контрольных работ? В массовой школе они контролируют учебные умения, отсюда и следует их содержание. А что проверять тут? Тоже только учебные умения? Не думаю. Поэтому в черновой работе на уроке даю такие задания, которые заведомо не встретятся в предстоящих работах. Да, но что же тогда проверяется? Кроме обычных учебных умений, ещё и умение соображать на ходу. И ведь в конечном счёте дети обучаются и этому — на то и способности. Но вначале — с очень большим скрипом, с противодействием: «А вы нам это не объясняли!» А со временем даже перестают замечать эту новизну.

Многие из этих вопросов не решены и поныне.

В первые годы существования математических школ математике учили три года, и каждый год было по 12 ч математики в неделю. Таких, можно сказать, неограниченных возможностей у меня больше никогда не было. Изучались алгебра, тригонометрия, геометрия — как положено, а также аналитическая геометрия, математический анализ, приближенные вычисления и программирование. Если преподавание элементарных дисциплин и анализа находилось в одних руках, то довольно быстро стало ощущаться рассогласование между уровнем преподавания этих предметов. В самом деле, элементарные дисциплины преподавались по обычным школьным учебникам А. Киселева и Н. Рыбкина, а анализ — по Г. Фихтенгольцу, причем по «толстому» учебнику для университетов. Уровень строгости в этих книгах был явно несопоставим: анализ начинался с аксиоматики вещественного числа, а в курсе стереометрии А. Киселева логические упущения начинались с самых первых страниц и замечались учениками моментально.

Были и другие рассогласования — например, нахождение объёмов и площадей поверхностей в курсе анализа интегрированием, а в курсе геометрии А. Киселева с помощью довольно искусственных лемм. В курсе аналитической геометрии изучались векторы, о которых не было никакого упоминания в курсе элементарной геометрии и, что особенно жаль, в курсе тригонометрии. Число примеров легко увеличивается.

В ходе дальнейших реформ образования учить в старших классах стали меньше — два года вместо трёх, часов стали отводить на математику все меньше и меньше и дошли даже до 7 ч в неделю, но дети – то толковее не стали. Снижать уровень образования не хотелось никак — уже были наработаны некие образцы. Такая ситуация порождала большое число содержательных методических задач.

Поскольку в дальнейшем я буду вести речь именно о методике преподавания математики (я бы предпочел говорить о дидактике математики или даже о педагогике математики), то сделаю некоторое отступление. Мне довелось слышать много скептических и даже пренебрежительных высказываний от своих коллег по поводу методики, педагогики и вообще какого-либо теоретизирования в деле преподавания. Любопытно то, что в основном эти высказывания шли от профессионалов - математиков, волею судеб ставших учителями. Их основная мысль состояла в следующем: «Я знаю предмет, у меня нормальные отношения с детьми, и я прекрасно живу безо всякой там педагогической науки». Довелось слышать и другое понимание методики, я бы назвал его утилитарным. Методика, как мне говорили, состоит в том, чтобы дать образцы решения задач, записи их решения, оформления письменных работ, чтобы составить план урока и т. д. Наконец, есть и такое мнение: преподавание вообще — это искусство. Посему важно не «что», не «как», а «кто». Отсюда следует, что нечего морочить себе голову так называемыми методическими рекомендация-ми. Даже если и согласиться с такой точкой зрения, то почему это искусство (я бы добавил — искусство ремесленника) не изучать и почему не подвести под это изучение научную базу — физиологию и психологию?

Мне не хочется никого переубеждать, спорить о том, является ли методика преподавания наукой или не является. Впрочем, мне ясны две вещи: 1. Коль скоро миллионы людей занимаются обучением тысячи лет, то в этой их деятельности немало общего и это общее может выделяться и изучаться. 2. Если такое изучение и называть наукой, то такая наука является скорее экспериментальной, нежели теоретической. Это значит, что некий прогресс в методике преподавания обеспечивается в первую очередь тем, что происходит в живом контакте с детьми, а уже потом чистыми размышлениями о возможности кого-то чему-то как-то научить. Методика – это экспериментальная дидактика или экспериментальная составляющая дидактики.

Мне всегда большое удовольствие доставляло решение таких задач образования, которые не могу назвать иначе, как методические задачи.

II.2. **СТЕРЕОМЕТРИЯ НА ВЕКТОРАХ**

Первой такой серьёзной задачей, которой мне пришлось заняться, было построение курса стереометрии для математических школ, такого курса, который соответствовал бы более высокому уровню строгости в доказательствах. Мне надоело выкручиваться, объясняя ученикам в начале курса, к примеру, что значит «вложить один двугранный угол в другой», почему прямая в пространстве является неопределяемым понятием и т. д. Простого выхода из положения я не видел. Преподавать геометрию в духе «Оснований геометрии» Д. Гильберта у меня не было никакого желания — это трудно, длинно и скучно. По счастью, в конце 70-х годов в нашей педагогической литературе появились упоминания о том, что возможно построение курса геометрии на основе системы аксиом, предложенных Г. Вейлем. (Удалось уточнить - впервые эту идею реализовал Д. Пеано.)

В основу такого изложения было положено *понятие вектора,* точнее — *векторного пространства.* К векторам я относился хорошо, так как преподавал тригонометрию по учебнику А. Берманта и Л. Люстерника. Сейчас эта идея — пройденный этап в нашей методике, достаточно назвать учебник по геометрии, написанный В. Болтянским. Но тогда в методической литературе, насколько я знал, не было ничего подобного, и пришлось «залезть» в математику. Точно помню, что первые более или менее развёрнутые сведения о таком построении геометрии я почерпнул из книги П. Рашевского. Разумеется, пока это было очень далеко от элементарного курса геометрии. Однако идея мне понравилась, и я решил попробовать. По сути дела мне была известна только аксиоматика возможного курса. Всё остальное: последовательность изучения, доказательства теорем, набор задач — надо было делать самому. Иногда я шёл на урок, придумав его содержание (теоремы и их доказательства) только накануне вечером. Разумеется, через несколько лет преподавания такого курса стереометрии, причём не только в математической школе, всё стало на свои места. В первый год я рассказывал таким образом только аффинную часть курса, метрическая часть оставалась традиционной, что привело к некоторому разнобою. И тем не менее мне дорог именно первый год такого преподавания. До сих пор помню свои волнения: а поймут ли дети? Смогут ли воспроизвести? Понравится ли им? Уже в конце 1969 года я докладывал коллегам на городском семинаре итоги такого преподавания.

Впоследствии я пробовал разные варианты векторного изложения стереометрии, выискивая наилучший. Я приведу здесь, очень конспективно, именно первый вариант, самый дорогой для меня.

Аксиоматика

Рассмотрим множество *U,* элементы которого назовем векторами. На множестве *U* , которое назовём векторным пространством, выполняются следующие аксиомы.

Аксиомы сложения векторов

Основная операция — сложение векторов. Для каждых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор, называемый их суммой. Обозначение: $\vec{a}+\vec{b}$. При этом:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

3. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{x}$, такой, что $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$.

Аксиомы умножения вектора на число

Основная операция — умножение вектора на число. Для каждого вектора $\vec{a}$ и для каждого числа λ существует единственный вектор, называемый произведением вектора $\vec{a}$ на число λ. Обозначение: $\lambda\vec{a}$. При этом:

4. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа λ.

5. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$ и любых чисел λ_1, λ_2.

6. $\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$ и любых чисел λ_1, λ_2.

7. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Аксиома размерности

8. В множестве *U* существуют три линейно независимых вектора, а всякие четыре вектора линейно зависимы. (Эти понятия объяснялись ученикам специально.)

Аксиомы соответствия

Рассмотрим множество, элементы которого назовем точками. Каждой упорядоченной паре точек (*A, B*) соответствует единственный вектор $\vec{a}$. Обозначение: $\vec{a} = \vec{AB}$. При этом:

9. Любой точке *A* и любому вектору $\vec{a}$ соответствует единственная точка *B*, такая, что $\vec{AB} = \vec{a}$.

10. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ для любых точек *A, B, C.*

Аксиомы скалярного умножения

Основная операция — скалярное умножение векторов. Для каждых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственное число, называемое скалярным произведением $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначение: $\vec{a} \bullet \vec{b}$. При этом:

11. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

12. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

13. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого числа λ.

14. $\vec{a} \bullet \vec{a} \geq 0$ для любого вектора $\vec{a}$.

$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ только при $\vec{a} = \vec{0}$ ($\vec{0}$ появляется из аксиом сложения).

Такой вариант аксиоматики более или менее стандартен для данного подхода. Замечу, что аксиомы скалярного умножения были введены американским математиком Дж. фон Нейманом.

Из этой аксиоматики можно получить довольно много. Из аксиом первых двух групп можно вывести разные векторные равенства типа $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\lambda\vec{a} - \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$ и т.д.

Тройку линейно независимых векторов назовем базисом *U.* Сразу можно доказать теорему: «Для любой пары линейно независимых векторов можно найти такой третий, который вместе с данными образует базис *U* . Любой вектор, отличный от нулевого, можно дополнить двумя векторами до базиса *U* ».

Далее рассмотрим два вида подмножеств *U,* которые мы назовём векторными подпространствами. Одномерное векторное подпространство — это множество всех векторов вида $\alpha\vec{a}$, где $\vec{a} \neq \vec{0}$ и α —любое число. Обозначение: V_a или просто *V*. Вектор $\vec{a}$ назовем направляющим вектором *V* или базисом *V*. Двумерное векторное подпространство — это множество всех векторов вида $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — линейно независимые векторы, α и β — любые числа. Обозначение: $W_{a,b}$ или просто *W*. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вместе назовем направляющими векторами *W* или базисом *W*.

Векторные подпространства — это множества векторов, поэтому отношение включения, равенство и пересечение подпространств трактуются как соответствующие понятия для множеств. Удобно также ввести нуль-мерное векторное подпространство, содержащее только $\vec{0}$. Основными для *векторных подпространств* являются такие **теоремы:**

1. Для того, чтобы векторное подпространство принадлежало другому векторному подпространству, необходимо и достаточно, чтобы его базис принадлежал второму подпространству.
2. Для равенства подпространств одинаковой размерности необходимо и достаточно, чтобы одно из них принадлежало другому.
3. Пересечение двух различных двумерных подпространств является одномерным подпространством.

Теперь всё готово для изучения взаимного расположения прямых и плоскостей. Замечу, что доказательства предыдущих утверждений ничего сложного не содержат, но вместе с тем никакой геометрии там нет — алгебраические выкладки и некоторые рассуждения.

Прямая и плоскость определяются по одинаковой схеме. Возьмём точку и отложим от неё все векторы одномерного подпространства. Множество концов всех этих векторов назовём прямой. Если исходная точка названа *O,* а подпространство обозначено через *V,* то обозначение соответствующей прямой таково: $O + V$. (Знак « + » имеет чисто формальное значение.) Точно так же определяется плоскость. Возьмём точку и отложим от неё все векторы двумерного подпространства. Множество концов всех этих векторов назовём плоскостью. Если исходная точка была *O,* а подпространство обозначено через *W,* то обозначение соответствующей плоскости: $O+W$.

V и *W* назовем направляющими подпространствами соответственно прямой и плоскости.

Затем доказывается, что прямая определяется любыми двумя своими точками, а плоскость определяется любыми тремя своими точками, не лежащими на одной прямой. Доказательства простые.

Теперь пора собирать «урожай» чисто геометрических фактов. Их доказательства после всего рассмотренного становятся совершенно тривиальными, и ученики быстро их находят. Сначала определяется параллельность в пространстве. Прямая (плоскость) называется параллельной другой прямой (плоскости), если направляющее подпространство первой содержится в направляющем подпространстве второй. (Проще было бы говорить о равенстве подпространств, но тогда для параллельности прямой и плоскости пришлось бы давать специальное определение.) Для пересекающихся прямых и плоскостей определения традиционные, хотя их можно было бы дать и векторными. Почему же традиционные? Я думаю, что причина в основном психологическая, всё равно «тянет» на традиционный курс геометрии и хочется побыстрее перекинуть мостик от линейной алгебры к привычной геометрии .

На этом пути я не сразу заметил необходимость доказательства того, что отрицание параллельности означает пересечение: для двух прямых на плоскости и двух плоскостей в пространстве. Само доказательство довольно интересно. Приведу его.

Пусть имеется прямая p_1 с начальной точкой *A* и направляющим подпространством V_1: $p_1=A + V_1$ и пусть точка A_1 лежит на прямой p_1 так что $\vec{AA_1}$ — базис V_1. Пусть есть ещё прямая p_2 с начальной точкой *B* и направляющим подпространством V_2: $p_2 = B+V_2$ и пусть точка B_1 лежит на прямой p_2, так что — $\vec{BB_1}$ базис V_2. Пусть также обе прямые p_1 и p_2 лежат в плоскости П с направляющим подпространством W.

Так как прямые p_1 и p_2 не являются параллельными, то $V_1 \neq V_2$ а потому векторы $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$ линейно независимы. Так как точки A, A_1, B, B_1 лежат в плоскости П, то векторы $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$ являются базисом *W,* и поэтому вектор $\vec{AB}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{AA_1}$ и $\vec{BB_1}$, т. е.

$$\vec{AB} = a\,\vec{AA_1} + \beta\,\vec{BB_1}\,. \qquad (1)$$

Для любой точки *K* имеем

$$\vec{AB} = \vec{AK} + \vec{KB}\,. \qquad (2)$$

Если мы хотим, чтобы точка *K* была общей для прямых p_1 и p_2, то необходимо выполнение следующих равенств:

$\vec{AK} = \lambda_1 \vec{AA_1}$, $\vec{BK} = \lambda_2 \vec{BB_1}$.Подставим эти выражения векторов $\vec{AK}$ и $\vec{BK}$ в равенство (2) и получим

$$\vec{AB} = \lambda_1 \vec{AA_1} - \lambda_2 \vec{BB_1}\ . \qquad (3)$$

Сравнивая два представления (1) и (3) вектора $\vec{AB}$ и учитывая единственность разложения вектора в данном базисе, имеем $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\beta$.

Докажем теперь, что полученные равенства коэффициентов являются и достаточными для существования общей точки у прямых p_1 и p_2. Возьмём точку *K,* такую, что $\vec{AK} = \alpha\,\vec{AA_1}$. Ясно, что $K \in p_1$. Рассмотрим вектор $\vec{BK}$. Имеем такие равенства:

$\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{AK} = -\vec{AB} + \vec{AK} = -a\,\vec{AA_1} - \beta\,\vec{BB_1} + a\,\vec{AA_1} = -\beta\,\vec{BB_1}$, откуда и следует, что $K \in p_2$.

Если бы у прямых p_1 и p_2 была ещё одна общая точка, то они бы совпали, что противоречит тому, что они не являются параллельными.

(При данных определениях совпадение прямых является частным случаем их параллельности).

В дальнейшем я научился «подавать» эту теорему совсем хорошо, так что и ученикам стало интересно.

Доказательства традиционных *геометрических утверждений* в этой технике просты. Вот один пример. Известно, что прямая, параллельная каждой из двух пересекающихся плоскостей, параллельна прямой их пересечения. Докажем это.

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой *p,* прямая *c* параллельна как α, так и β. Требуется доказать, что $c \parallel p$. Так как $c \parallel \alpha$, то $V_c \subset W_\alpha$ (V_c — направляющее подпространство прямой *c,* W_α — направляющее подпространство плоскости α). Аналогично $V_c \subset W_\beta$.Но тогда V_c принадлежит пересечению W_α и W_β, которое обозначим через *V.* Итак, $V_c \subset V$, а , значит, по теореме 2 для векторных подпространств $V_c = V$. Точно так же $V_p = V$. Поэтому $V_c = V_p$, откуда следует параллельность прямых *c* и *p.*

Векторные методы решения традиционных задач школьного курса привлекательны, обладают достаточной степенью общности, но обучить всех векторной технике решения задач — дело непростое — знаю по своему опыту.

Перейдем теперь к *метрической части курса стереометрии.* Из аксиом скалярного умножения вытекают его простейшие свойства, например, такие:

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$, $(\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b}) = (\alpha\beta)(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$.

Дальше вводится определение ортогональных векторов. Векторы называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Вектор называют ортогональным подпространству, если он ортогонален любому вектору этого подпространства. Ясно, что для ортогональности вектора подпространству достаточно, чтобы он был ортогонален базису этого подпространства.

Об ортогональных векторах и подпространствах без особого труда доказываются утверждения, которые позволят затем получить традиционные теоремы *о перпендикулярных прямых и плоскостях:*

1. В векторном пространстве *E* (так обозначаем векторное пространство *U,* в котором введено скалярное умножение) существует тройка ненулевых попарно ортогональных векторов (такую тройку назовем ортогональным базисом пространства).
2. Множество векторов, ортогональных одномерному подпространству, является двумерным подпространством.
3. Множество векторов, ортогональных двумерному подпространству, является одномерным подпространством.

Перейдём к определениям *перпендикулярности,*

Две прямые перпендикулярны, если их направляющие векторы ортогональны. Ясно, что это определение относится и к таким прямым, которые не пересекаются. Определения прямой, перпендикулярной плоскости, и перпендикулярных плоскостей я дал традиционные, т. е. невекторные, хотя можно было пойти и векторным путем.

Доказательства привычных теорем о перпендикулярности прямых и плоскостей и о связи перпендикулярности и параллельности становятся чрезвычайно простыми. С их идеологией учителя могли познакомиться, работая в старших классах по учебнику стереометрии под редакцией 3. Скопеца.

Вот примеры некоторых *доказательств,* которые, замечу, получали сами ученики. Любопытно, что в этих доказательствах можно совершенно не использовать рисунки.

1. Докажем, что прямая, перпендикулярная плоскости, её пересекает.

Выберем ортогональный базис плоскости. Вместе с направляющим вектором данной прямой два вектора этого базиса образуют ортогональный базис пространства. Предположим теперь, что прямая не пересекает плоскость, тогда она параллельна плоскости и по определению параллельности прямой и плоскости её направляющее подпространство принадлежит направляющему подпространству плоскости. Но тогда направляющий вектор прямой является линейной комбинацией векторов базиса плоскости, что противоречит их линейной независимости.

2. Докажем, что две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Из перпендикулярности прямой и плоскости следует, что направляющий вектор каждой из данных прямых ортогонален направляющему подпространству плоскости. Но тогда они лежат в одном одномерном векторном подпространстве. Значит, обе эти прямые имеют одно и то же направляющее подпространство, откуда следует их параллельность.

В векторном стиле можно провести доказательства почти всех теорем школьной геометрии — сейчас хорошо известно, как это делается. То же можно сказать и о решении задач метрической части курса.

II.3. ВЫХОД В ЧЕТЫРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Оказалось, что на векторной основе можно выстроить всю школьную стереометрию. А школьную планиметрию можно организовать так, чтобы она способствовала сознательному усвоению стереометрии, основанной на векторах. Идею в целом можно подкрепить изучением на факультативе, основ четырёхмерной геометрии. Известно, что в четырёхмерной геометрии уже невозможно опираться на наглядные представления — зато векторное построение такой геометрии отличается от трёхмерной геометрии только аксиомой размерности: вместо трёх линейно независимых векторов появляются четыре да ещё корректируются некоторые определения, в частности, появляется трёхмерная плоскость (гиперплоскость).

Приведу *программу* этого *факультатива.*

1. Задачи, приводящие к понятиям n - мерной геометрии.

Сюда можно отнести решение систем линейных уравнений, когда число неизвестных равно n, задачу линейного программирования в общем случае, определение числа натуральных решений неравенства $\sum_{i=1}^{n} x_i^{2} < k$, $k \in N$ и др.

2. Четырёхмерный куб.

Четырёхмерный куб — одна из простейших фигур четырёхмерной геометрии. К этому понятию можно прийти и до введения аксиоматики четырёхмерного пространства, обобщая наглядный или координатный подход трёхмерной геометрии. Полезно осуществить каждый из этих подходов и рассмотреть простейшие свойства четырёхмерного куба: количество его вершин, рёбер, граней и «сверхграней». Затем попытаться сделать рисунок такого куба, имея в виду его проекцию на обычную плоскость.

3. Аксиоматика четырёхмерного аффинного пространства.

К аксиоматике четырёхмерного векторного пространства добавлено множество точек и аксиомы соответствия.

4. Подпространства четырёхмерного векторного пространства.
5. Основные объекты четырёхмерной геометрии.
6. Параллельность.
7. Пересечение и скрещивание.

Новые объекты четырёхмерной геометрии: трёхмерное векторное подпространство и гиперплоскость — множество точек, полученное в результате откладывания от данной точки всех векторов трёхмерного векторного подпространства. Взаимное положение объектов четырёхмерной геометрии включает принципиально новый — в сравнении с трёхмерной геометрией — случай скрещивающихся прямой и плоскости. Все случаи расположения объектов иллюстрируются на четырёхмерном кубе.

8. Аксиоматика евклидова четырёхмерного пространства и основные метрические понятия четырёхмерной геометрии.

Метрика вводится списком аксиом скалярного умножения. Как обычно,

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}, \quad \left|AB\right| = \left|\vec{AB}\right|, \quad \cos\angle(\vec{a}\,\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}.$$

9. Расстояние в четырёхмерной геометрии.

Удобно ввести термин «линейное многообразие» (ЛМО) — общее название для прямой, плоскости и гиперплоскости. Ставится задача о нахождении расстояния от точки до ЛМО. Оказывается, что искомым расстоянием является длина перпендикуляра, опущенного из точки на ЛМО. Другая задача — найти расстояние между двумя ЛМО. Им является длина их общего перпендикуляра. Все выкладки имеют аналитический характер. Практически считаются расстояния в четырёхмерном кубе.

10. Угол между гиперплоскостями в четырёхмерной геометрии.

Угол между гиперплоскостями определяется как угол между нормальными векторами этих гиперплоскостей.

11. Симплекс.

Четырехмерный симплекс является обобщением понятия отрезка, треугольника, тетраэдра. Изучается устройство симплекса, в нём вычисляются расстояния и простейшие углы.

12. Многогранники.

К определению многогранника в четырёхмерной геометрии приходим таким путём: ломаная — это определённая последовательность отрезков, многоугольник — это определённая последовательность треугольников, трёхмерный многогранник — определённая последовательность тетраэдров. Тогда по аналогии - многогранник в четырёхмерной геометрии — определённая последовательность симплексов. Будем называть четырёхмерные многогранники сверхмногогранниками. Сверхпризму и сверхпирамиду можно, кроме того, определить конструктивно и доказать, что они являются сверхмногогранниками.

13. Выпуклые фигуры.

Даётся общее определение выпуклого множества. На выпуклость исследуются сверхмногогранники. Любопытно заметить, что традиционное определение выпуклости многоугольников на плоскости (при помощи опорных прямых) и многогранников в трёхмерном пространстве (при помощи опорных плоскостей) не обобщается потому, что при этом теряется наглядность.

14. Теорема Эйлера (для выпуклых сверхмногогранников).

Проверяется выполнение теоремы Эйлера для разных типов сверхмногогранников.

15. Линейное программирование.

Рассматривается геометрическая интерпретация задачи линейного программирования в четырёхмерном пространстве.

16. Правильные сверхмногогранники.

Доказывается, что в четырёхмерной геометрии существует только шесть видов правильных сверхмногогранников.

17. Сфера.

Рассматриваются различные случаи взаимного расположения четырёхмерной сферы и ЛМО.

18. Преобразования плоскости

Исходя из геометрического определения преобразования, выводятся аналитическая и матричная запись этих преобразований. Последняя будет особенно ценной, так как с её помощью будут определяться геометрические преобразования в четырёхмерной геометрии. Разнообразным матрицам размерности 2 х 2 ставятся в соответствие преобразования плоскости. Определяются действия с матрицами, выясняется геометрический смысл произведения матриц. Показывается, что модуль и знак определителя имеют геометрическое истолкование.

19. Преобразования трёхмерного пространства.

Даётся матричная запись геометрических преобразований.

20. Преобразования четырёхмерного пространства.

Определения даются в матричном виде. Преобразования классифицируются.

21. Неевклидова метрика на плоскости.

Если отказаться от положительной определённости скалярного произведения, то его выражение в координатной форме имеет совсем не тот вид, который изучается в привычном курсе планиметрии. Этот вид определяется таблицей умножения базисных векторов плоскости $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, В зависимости от вида этой таблицы находятся и длина вектора, и угол между векторами.

22. Полуевклидова метрика на плоскости.

Выводятся некоторые теоремы такой геометрии и рассматривается её связь с принципом относительности Галилея.

23. Псевдоевклидова геометрия на плоскости.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$. Определим скалярное произведение векторов по формуле

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1x_2 - y_1y_2.$$

Выводятся некоторые теоремы этой геометрии.

24. Геометрия Минковского.

И полуевклидова, и псевдоевклидова геометрия были рассмотрены как геометрии двумерных пространств. Геометрия Минковского — это геометрия четырёхмерного пространства, в котором скалярное произведение векторов

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 + y_4\vec{e}_4$ определяется по формуле

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$$

Рассматриваются некоторые факты этой геометрии.

25. Теория относительности и четырёхмерная геометрия.

Устанавливается связь пространства событий специальной теории относительности и геометрии Минковского. Изучаются преобразования Лоренца и их следствия.

26. «Существует ли четырёхмерная геометрия?»

Заключительная беседа о свойствах реального пространства, затрагивающая космологические теории и философское осмысление этих теорий.

А вот примерный набор задач *о четырёхмерном кубе* — сверхкубе. Такого же типа задачи могут решаться и для других сверхмногогранников.

1. Что представляет собой сечение сверхкуба гиперплоскостью

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$?

2. Чему равна длина диагонали сверхкуба, ребро которого равно 1?
3. Объясните, почему равенство $x_1= x_2 = x_3 = x_4$ задает диагональ сверхкуба. Есть ли такие диагонали у сверхкуба, которые перпендикулярны данной диагонали? Сколько таких диагоналей? Выберите любые две из них и вычислите угол между ними.
4. Вычислите угол между диагональю сверхкуба и его: а) ребром; б) гранью; в) гипергранью.
5. Вычислите угол между диагональю сверхкуба и гиперплоскостью, проходящей через концы четырёх его рёбер, имеющих с этой диагональю одну и ту же общую вершину сверхкуба.
6. Вычислите расстояние между гранью сверхкуба с единичным ребром и его диагональю, не пересекающей эту грань.
7. Какая получится фигура, если сверхкуб пересечь гиперплоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной его диагонали?
8. Как выглядит развёртка сверхкуба?

Очень ярко можно было на материале факультатива показать те обобщения, аналогии и различия, которые возникают при переходе от трёх измерений к четырём.

Факультатив был интересен ученикам, сложность материала преодолима, несомненно его влияние на развитие.

11.4. О РОЛИ ВЕКТОРОВ В ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Преподавание школьной геометрии на векторной основе — задача методическая. Мне удалось проверить в реальном преподавании несколько вариантов её решения. Побочным результатом работы над этой задачей явилось то, что стала понятнее роль векторов и в геометрии, и вообще в математике. Я бы условно выразил эту роль так: векторы позволяют геометрию превратить в алгебру, а алгебру — в геометрию. Кроме того, векторы позволяют «сжать» информацию, сделать её наглядной и тем самым способствуют поиску доказательств, что очень важно для обучения решению задач.

Рассмотрим примеры.

1. Докажем, что средние линии любого четырёхугольника, пересекаясь, делятся пополам. (Тем самым они являются диагоналями параллелограмма с вершинами в серединах сторон данного четырёхугольника.)

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (необязательно плоский), точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA.

Задачу эту будем решать в так называемой радиус-векторной технике, когда все векторы откладываются от одной фиксированной точки, называемой полюсом. Полюс обозначим O. Так как все векторы начинаются в точке O, то для сокращения записи в обозначении вектора эту начальную точку можно опустить и записывать, скажем, вектор $\vec{OA}$ только по конечной точке — $\vec{A}$.Более того, опять же для сокращения записи, но, помня, что речь идёт о векторах, можно даже убрать и стрелку сверху — теперь вместо вектора $\vec{A}$ запишем просто букву A, Для произвольного вектора $\vec{AB}$ запись будет такая:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{B} - \vec{A} = B - A.$$

Эта запись короче и приближает нас к обычным алгебраическим записям, только вместо маленьких букв - большие.

Перейдём к решению задачи. Так как точка K является серединой отрезка AB, то при любом выборе полюса O имеем

$\vec{OK} = 0{,}5\ (\vec{OA} + \vec{OB})$ или, короче, $K = 0{,}5\ (A+B)$.

Аналогично

$L = 0{,}5\ (B+C)$, $M = 0{,}5\ (C+D)$, $N = 0{,}5\ (D +A)$. Пусть точка X— середина отрезка KM. Тогда

$X= 0{,}5\ (K+M)= 0{,}5\ (\ 0{,}5(A+B) +\ 0{,}5\ (C+D)) =\ 0{,}25\ (A + B + C+D)$.

Пусть точка Y— середина отрезка LN. Тогда

$Y= 0{,}5\ (L+N)= 0{,}5\ (\ 0{,}5(B+C) +\ 0{,}5\ (D+A)) =\ 0{,}25\ (A + B + C+D)$.

Видим, что точки X и Y совпадают.

2. Построим треугольник по серединам трёх его сторон.

Обычное решение задачи несложно. Пусть K, L, M— середины сторон искомого треугольника ABC (рис. 2). Дальше используем свойства средней линии треугольника. Проводим отрезок KL и параллельно ему через точку M проводим прямую. Точно так же проводим отрезки KM и LM и параллельно им через точки L и K соответственно проводим прямые, параллельные этим отрезкам. Полученные три прямые, попарно пересекаясь, дают три точки пересечения, которые и являются вершинами искомого треугольника.

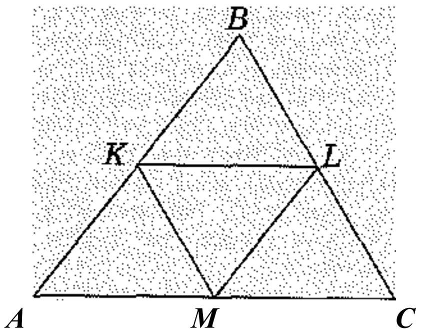

Рис. 2

Если попытаться обобщить эту задачу на четыре, пять и более точек, а затем выйти из плоскости и решать пространственную задачу, то видно, что средняя линия треугольника уже не при чём и надо искать более общий способ. Такой способ можно получить с помощью векторов.

Тот факт, что точка K является серединой отрезка AB, запишем в виде $K = 0{,}5\,(A+B)$. Записав аналогичные равенства для точек L и M, получаем систему трёх линейных уравнений, но не относительно чисел, как в алгебре, а относительно точек;

$K = 0{,}5\,(A+B)$, $L = 0{,}5\,(B + C)$, $M = 0{,}5\,(A+C)$.

В этой системе известны K, L, M, а неизвестны A, B, C. Решим эту систему. Имеем

$A + B = 2K$, $B + C = 2L$, $A + C = 2M$.

Сложив первые два уравнения и вычтя третье, получим $B = K+L - M$. Действуя аналогично, получим $A=K+M - L$, $C= L + M - K$. Тем самым мы «нашли» неизвестные ранее точки. Но как их построить? Очень просто. Вспомним, что за этими точками стоят радиус-векторы, выберем полюс — где угодно! — и построим точку B, исходя из равенства

$$\vec{OB} = \vec{OK} + \vec{OL} - \vec{OM},$$

произведя сложение и вычитание векторов. Так же построим A и C, разумеется, не меняя уже выбранного полюса O.

Возможны варианты решения. Так, полюс можно взять в одной из данных точек, например в точке K, тогда для построения точки B имеем равенство $\vec{KB} = \vec{KL} - \vec{KM}$.

Кроме того, построив точку B, мы можем далее строить точки A и С без всяких векторов: проведём отрезок BK и продолжим его до точки A на такую же длину и т. д.

Как всегда в задачах на построение, встаёт вопрос о единственности искомого треугольника — в самом деле, точку O можно выбирать произвольно; откуда же следует, что треугольник будет получаться один и тот же? Дело в том, что при любом выборе полюса радиус-вектор середины отрезка AB есть «среднее арифметическое» радиус-векторов, идущих в его концы, а значит, все уравнения системы, которую мы решали, не зависят от выбора полюса. Но тогда от выбора точки O на плоскости не зависят и решения этой системы.

Теперь можно перейти к обобщению этой задачи, причем обобщать будем не сразу на n середин сторон многоугольника из-за того, что при чётных значениях n результат будет не такой, как при нечётных значениях n. Проще получить результат при нечётных значениях n. Итак, имеем задачу: построить пятиугольник, зная середины его сторон. Искомый пятиугольник обозначим $X_1X_2X_3X_4X_5$, и пусть A_1 — известная середина стороны X_1X_2, A_2 — середина стороны X_2X_3,

A_3 — середина X_3X_4, A_4 — середина X_4X_5, A_5 — середина X_5X_1. По аналогии с предыдущей задачей составляем такую систему:

$X_1+X_2 = 2A_1$, $X_2+X_3 = 2A_2$, $X_3+X_4 = 2A_3$, $X_4+X_5 = 2A_4$, $X_5+X_1 = 2A_5$.

Решаем её относительно неизвестных точек X_1, X_2, X_3, X_4, X_5.

Для этого от первого уравнения можно отнять второе, затем прибавить третье, потом отнять четвёртое и, наконец, прибавить пятое. После сокращения на 2 получим равенство

$$X_1 = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5.$$

Выбрав полюс и произведя все указанные действия с векторами, построим точку X_1. Остальное не представляет труда. И точно так же решается задача для любого многоугольника с нечётным числом сторон. При этом исходные точки не обязаны лежать в одной плоскости. Безразличие к размерности — одна из особенностей векторного метода решения задач.

Пусть теперь число неизвестных вершин чётно. Возьмем самый простой случай, когда их всего две. Задача выглядит так: построить отрезок, зная положение его середины. Ясно, что задача имеет сколько угодно решений.

Пусть теперь даны четыре точки — середины сторон некоторого четырёхугольника $X_1X_2X_3X_4$, Причём A_1 — середина X_1X_2, A_2 — середина X_2X_3, A_3 — середина X_3X_4, A_4 — середина X_4X_1. Действуя как раньше, приходим к такой системе:

$X_1+X_2 = 2A_1$, $X_2+X_3 = 2A_2$, $X_3+X_4 = 2A_3$, $X_4+X_5 = 2A_4$.

Решаем эту систему прежним способом: от первого уравнения отнимаем второе, затем прибавляем третье и отнимаем четвёртое — приходим к равенству $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = 0$, которое является необходимым условием разрешимости этой системы. Иначе говоря, если $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \neq 0$, то решений нет. Придадим этому условию разрешимости геометрическое истолкование. Вернёмся к векторной записи равенства $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = 0$, Получим

$\vec{OA_1} - \vec{OA_2} + \vec{OA_3} - \vec{OA_4} = \vec{0}$. Или $\vec{OA_1} - \vec{OA_2} = \vec{OA_4} - \vec{OA_3}$, откуда $\vec{A_2A_1} = \vec{A_3A_4}$. Иначе говоря, точки A_1, A_2, A_3, A_4 являются вершинами параллелограмма (может быть, и вырожденного). Если это не так, то задача не имеет решения. А что будет, если это верно?

Обратное утверждение хорошо известно: середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Покажем в соответствии с этим, что, имея параллелограмм, мы можем получить сколько угодно четырёхугольников, для которых вершины данного параллелограмма являются серединами их сторон. Итак, пусть $\vec{A_2A_1} = \vec{A_3A_4}$. Возьмём любую точку X (рис. 3) проведём отрезок XA_1 и продолжим его на равную длину до точки Y; проведём отрезок YA_2 и продолжим его на равную длину до точки Z; проведём отрезок ZA_3 и продолжим его на равную длину до точки C. Теперь докажем, что точка A_4 является серединой отрезка CX, показав их совпадение. Из равенства $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = 0$ имеем $A_4 = A_1 - A_2 + A_3$. С другой стороны, $C+X = (2A_3 - Z) + (2A_1 - Y) = 2A_3 + 2A_1 - (Y+Z) = 2A_1 + 2A_3 - 2A_2$, откуда $0{,}5\,(C+X) = A_1 + A_3 - A_2$. Итак, $A_4 = 0{,}5\,(C+X)$. Так как точку X мы выбирали любую, то искомых четырёхугольников действительно сколько угодно.

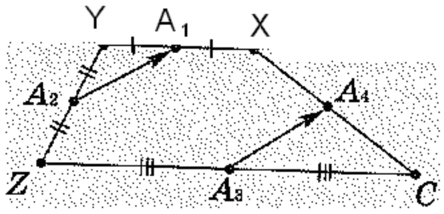

Рис. 3

Замечу, что к данному результату, точнее, к отсутствию единственного решения в случае четырёхугольника, можно придти, подсчитывая определитель составленной системы. Он равен нулю.

И опять следует отметить, что задача допускает и пространственное толкование, при котором исходные точки A_1, A_2, A_3, A_4 не обязательно лежат в одной плоскости.

К аналогичному результату мы приходим при других чётных значениях числа сторон многоугольника.

Тут же интересно решить такую задачу: по скольким серединам своих рёбер однозначно восстанавливается тетраэдр?

Теперь возможны два дальнейших обобщения. Первое обобщение идет по числу данных точек и приводит к понятию центроида системы точек. Назовем центроидом системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такую точку T, для которой верно равенство

$$\vec{OT} = \frac{1}{n}\left(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots \vec{OA_n}\right).$$

Несложно доказать, что положение центроида не зависит от выбора точки O. Проведём это доказательство в упрощённом варианте — для двух данных точек, но методом, который не зависит от их числа. (Для двух точек этот результат моментально следует из свойств диагоналей параллелограмма, но такое доказательство не обобщается по числу точек.)

Итак, даны две точки A и B. Пусть точка T_1, такова, что при некотором полюсе O_1 выполняется равенство $\vec{O_1T_1} = \frac{1}{2}(\vec{O_1A} + \vec{O_1B})$

Пусть точка T_2 такова, что при некотором полюсе O_2 выполняется равенство $\vec{O_2T_2} = \frac{1}{2}(\vec{O_2A} + \vec{O_2B})$.

Для доказательства совпадения точек T_1 и T_2 достаточно доказать, что $\vec{O_1T_1} = \vec{O_1T_2}$.

Имеем $\vec{O_1T_2} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2T_2} = \vec{O_1O_2} + \frac{1}{2}(\vec{O_2A} + \vec{O_2B}) =$

$$= \vec{O_1O_2} + \frac{1}{2}(\vec{O_1A} - \vec{O_1O_2} + \vec{O_1B} - \vec{O_1O_2}) = \frac{1}{2}(\vec{O_1A} + \vec{O_1B}) = \frac{1}{2}\cdot 2\vec{O_1T_1} = \vec{O_1T_1}.$$

Другое обобщение возможно на коэффициенты при векторах $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ при заданных точках A и B. В самом деле, равенство $\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ можно записать в таком виде: $\vec{OK} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$.

Выбрав коэффициентами при векторах $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ произвольные числа, например 2 и 3, -5 и 10, $\frac{1}{3}$ и $\frac{4}{5}$|, можно непосредственным построением убедиться, что положение точки K меняется в зависимости от выбора точки O в качестве полюса. Например, вектор $\vec{OK} = 2\vec{OA} + 3\vec{OB}$ будет давать разные положения точки K в зависимости от положения точки O. Но так будет не всегда. Оказывается, если в равенстве $\vec{OK} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$ положить $\alpha + \beta = 1$, то положение точки K уже не зависит от выбора точки O (такое выражение для $\vec{OK}$ называется нормированной линейной комбинацией векторов $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$, но можно сказать, что точка K является нормированной линейной комбинацией точек A и B — для упрощения речи и записи).

Докажем это. Пусть даны точки A и B. Пусть точка X_1 такова, что $\vec{OX_1} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$, $\alpha + \beta = 1$.

. Пусть точка X_2 такова, что $\vec{OX_2} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$, $\alpha + \beta = 1$. Мы хотим доказать совпадение точек X_2 и X_1. Для этого рассмотрим вектор $\vec{O_1X_2}$. Имеем $\vec{O_1X_2} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2X_2} = \vec{O_1O_2} + \alpha\vec{O_2A} + \beta\vec{O_2B} = \vec{O_1O_2} + \alpha(\vec{O_1A} - \vec{O_1O_2}) + \beta(\vec{O_1B} - \vec{O_1O_2}) =$

$= \vec{O_1O_2} - (\alpha+\beta)\ \vec{O_1O_2} + \alpha\ \vec{O_1A} + \beta\vec{O_1B} = \alpha\ \vec{O_1A} + \beta\vec{O_1B}$.

Отсюда и следует совпадение точек X_1 и X_2.

Возможно и дальнейшее обобщение. Пусть $A_1, A_2, ..., A$n — данные точки, α_1 , α_2, ..., α_n — некоторые (положительные) числа, сумма которых равна 1. Тогда рассмотрение нормированной линейной комбинации точек $A_1, A_2, ..., A$n

$\alpha_1\vec{OA_1} + \alpha_2\vec{OA_2} + \ldots + \alpha_n\vec{OA_n}$ приводит к понятию центра масс системы «материальных точек»: A_1 с массой α_1, A_2 с массой α_2 и т. д.

Это понятие можно обобщать и дальше, разрабатывая эффектную «геометрию масс», но вернёмся к двум точкам. Почему именно нормированная линейная комбинация двух точек дает независимость от выбора полюса? Какой в этом геометрический смысл? Ответ прост. Оказывается, все точки K, заданные нормированной линейной комбинацией $\vec{OK} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$, $\alpha + \beta = 1$, заполняют прямую AB. При этом если $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, то точки K заполняют отрезок AB. Докажем это.

Пусть A и B — данные точки, $\vec{OK} = \alpha\ \vec{OA} + \beta\vec{OB}$, $\alpha + \beta = 1$. Тогда

$\vec{OK} = \alpha\ \vec{OA} + (1-\alpha)\ \vec{OB} = \alpha\ \vec{OA} + \vec{OB} - \alpha\ \vec{OB} = \alpha\ \vec{OA} - \alpha\ \vec{OB} + \vec{OB} = .\alpha\,(\vec{OA} - \vec{OB}) + \vec{OB} = \alpha\ \vec{BA} + \vec{OB}$.

Значит, $\vec{OK} - \vec{OB} = \alpha\vec{BA}$, откуда следует, что $\vec{BK} = \alpha\vec{BA}$, где α — любое число. Но это и означает, что точки K заполняют прямую AB. При дополнительном предположении о неотрицательности чисел α и β видим, что $0 \leq \alpha \leq 1$, откуда следует, что в этом случае точки K заполняют отрезок AB.

Аналогичные толкования существуют и для трёх точек. Именно: нормированная линейная комбинация трёх точек, не лежащих на одной прямой,— это плоскость, заданная этими точками, а при условии неотрицательности коэффициентов этой комбинации — треугольник с вершинами в данных точках.

С использованием этих фактов можно получить большое число содержательных геометрических результатов, и, что особенно стоит подчеркнуть, выкладки будут чисто вычислительными.

3. Докажем, что центроид вершин треугольника лежит на каждой его медиане.

Пусть дан треугольник ABC, точка T—центроид его вершин, т. е. $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$. Докажем, что точка T лежит, например, на медиане BB_1(рис. 4). Имеем $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$, а так как точка B_1 — центроид точек A и C, то $B_1 = \frac{1}{2}(A+C)$, откуда $A + C = 2B_1$. Тогда $T = \frac{1}{3}(B+2B_1)$. Так как $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, то T лежит на прямой BB_1. Более того, раз коэффициенты нормированной линейной комбинации оказались положительными, то T лежит на самой медиане BB_1. И наконец, сразу можно получить, что T делит отрезок BB_1 в отношении 2:1, считая от вершины B. Для этого достаточно выбрать полюс в точке B (его же можно брать где угодно!). Тогда $\vec{BT} = \frac{1}{3}\vec{BB} + \frac{2}{3}\vec{BB_1}$ т. е. $\vec{BT} = \frac{2}{3}\vec{BB_1}$, откуда $BT = \frac{2}{3}BB_1$.

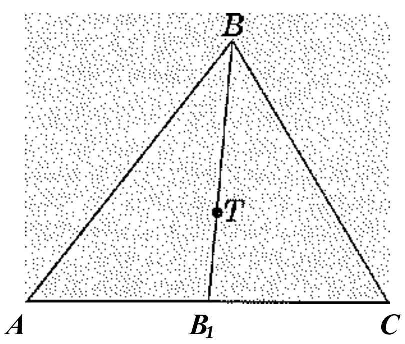

Рис. 4

Этим же способом решается аналогичная задача в пространстве: центроид вершин тетраэдра лежит на каждом отрезке, соединяющем вершину с центроидом противоположной грани, и делит этот отрезок в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра.

Докажем это. Пусть дан тетраэдр $ABCD$, точка T—центроид его вершин, т. е. $T = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$. Докажем, что точка T лежит на отрезке DD_1, где точка D_1 — центроид вершин грани ABC (рис. 5).

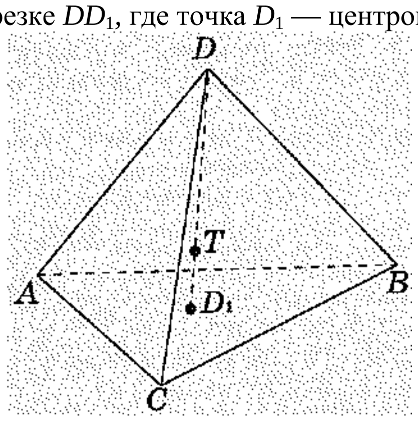

Рис. 5

Имеем $T = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$, а так как точка D_1 — центроид точек A, B, C, то $D_1 = \frac{1}{3}(A+B+C)$, откуда получаем, что

$A+B+C = 3D_1$. Но тогда $T = \frac{1}{4}(D + 3D_1) = \frac{1}{4}D + \frac{3}{4}D_1$.

Из этого результата получаем, что все четыре таких отрезка пересекаются в одной точке.

Действуя совершенно аналогично, можно получить, что в той же точке пересекаются три отрезка, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра. Последний результат, впрочем, можно усмотреть из примера 1, разобранного в начале этого пункта, так как рассмотренная нами четырёхзвенная ломаная не обязана быть плоской, в частности, она может быть образована четырьмя рёбрами тетраэдра.

Приведу теперь пример тому, как геометрия масс позволяет дать элегантное, чуть ли не «из воздуха» решение геометрических задач.

Пусть в треугольнике ABC точка A_1 делит сторону BC в отношении 1:2 (считая от C) и точка C_1 делит сторону BA в отношении 1:2 (считая от точки B). В каком отношении делятся отрезки AA_1 и CC_1 точкой пересечения?

«Загрузим» точку B массой 1. Будем считать точку A_1 центром масс точек B и C, а точку C_1, центром масс точек B и A. По правилу рычага центр масс двух точек находится на отрезке, соединяющем эти точки, причем произведения масс этих точек на расстояния от них до центра масс равны. Находим массы точек C и A: масса точки C равна 2, а масса точки A равна $\frac{1}{2}$. При такой «загрузке» масса точки A_1 равна 3, а масса точки C_1, равна $\frac{3}{2}$.

Так как центр масс треугольника лежит на пересечении отрезков AA_1 и CC_1, то он делит каждый из них (опять же по правилу рычага) в отношении, обратном отношению расстояний от него до концов этих отрезков. Отсюда получаем, что $AT{:}TA_1 = 3 : \frac{1}{2}$, т. е. 6:1, а $CT{:}TC_1 = \frac{3}{2} : 2$, т. е. 3:4.

Интереснее выглядят другие отношения: $AT : AA_1 = 6{:}7$, а $CT : CC_1 = 3{:}7$. Теперь если провести отрезок BB_1, где точка B_1 лежит на стороне AC и делит её в отношении 1:2, считая от точки A, то несложно найти, в каком отношении делится каждый из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 точками двух других — 3:3:1. После этого моментально решается известная задача о нахождении площади треугольника с вершинами в соответствующих точках деления: какую часть составляет площадь получившегося внутри треугольника от площади исходного треугольника, если исходный треугольник равносторонний?

В таком же духе, используя массы, доказывается, например, теорема Чевы и другие теоремы, имеющие аффинный характер. При этом задачи, связанные с серединой отрезков, решаются чуть ли не устно. При дальнейшем обобщении можно перейти к отрицательным и даже комплексным массам, понимая их достаточно условно. А затем заняться и барицентрическими координатами. Разумеется, «точки с массами» могут быть расположены как на плоскости, так и в пространстве, а задачи становятся и метрическими.

Я привёл лишь незначительную часть примеров, которыми можно было бы подтвердить идею «алгебраизации» геометрии с помощью векторов, пока ничего не сказав хотя бы о том, что можно сделать с помощью скалярного умножения. Но и на этих примерах видно, как несложная алгебра позволяет решать совсем непростые геометрические задачи, как легко эти методы выдерживают обобщения, в частности обобщение по размерности. Наиболее естественен в школе переход от планиметрических задач к стереометрическим. Но можно даже в рамках урочных занятий «приоткрыть форточку» в пространства больших размерностей. Один из самых простых примеров — обобщение нормированной линейной комбинации точек с неотрицательными коэффициентами. Это отрезок, когда исходных точек две; треугольник, когда их три и они не лежат на одной прямой; тетраэдр, когда их четыре и они не лежат в одной плоскости. А что будет, если есть пять точек, которые — о ужас!—не лежат в одном трёхмерном пространстве? Так может быть перекинут «мостик» между текущим учебным материалом и факультативом по четырёхмерной геометрии, о котором я уже говорил.

Теперь я попытаюсь говорить про обратное тому, что было разобрано на последних страницах,— как векторы позволяют *«геометризоватъ» алгебру».* Сделаю это опять же на простейших примерах.

4. Особенно мне понравилось доказательство неравенства о средних, в котором, используются свойства центроида. Для удобства я приведу доказательство для трёх различных положительных чисел — в общем случае оно совершенно аналогично. Итак, докажем, что $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \le \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ при условии, что $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$. Для этого на графике любой логарифмической функции с основанием, большим единицы, например десять, возьмем три точки: $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ и $A_3(x_3, y_3)$. Центроид T этих трёх точек имеет радиус-вектор $\vec{T} = \frac{1}{3}(\vec{A_1} + \vec{A_2} + \vec{A_3})$, а потому $x_T = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_T = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$. Логарифмическая функция с основанием, большим 1, выпукла вверх, и по свойству выпуклой вверх функции её график лежит над любой его хордой, в частности над хордами A_1A_2 и A_2A_3. Центроид же T лежит в треугольнике $A_1A_2A_3$, а потому ниже сторон A_1A_2 и A_2A_3 (рис. 6). Но отсюда следует, что центроид T лежит ниже, чем точка графика с той же самой, что у T, абсциссой. И тогда получаем, что ордината центроида y_T меньше, чем ордината этой точки графика, т. е. мы пришли к неравенству $y_T < \lg x_T$, следовательно

$\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3) < \lg \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$.Дальнейшее просто:

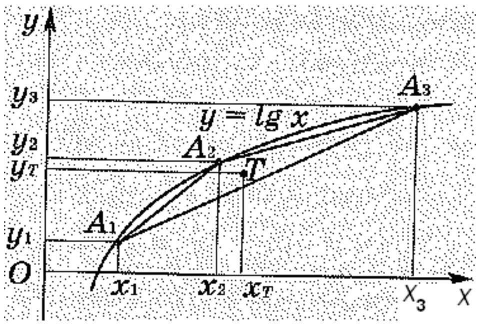

Рис. 6

$$\frac{1}{3}(\lg x_1+\lg x_2+\lg x_3) < \lg \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\lg (x_1 x_2 x_3) < \lg \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1x_2x_3} \le \frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

Теперь самая пора перейти к скалярному умножению векторов — оно тоже может хорошо поработать в деле «геометризации». Как это происходит?

Известно, что модуль вектора $\vec{a}\,(x, y)$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$, Но это равенство можно читать в обратном порядке:, $\sqrt{x^2+y^2} = |\vec{a}|$, откуда следует, что всякое выражение вида $\sqrt{x^2+y^2}$ имеет ясный геометрический смысл; если говорить о векторах — это модуль некоторого вектора. Аналогичное соображение: скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ вычисляется по формуле $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$. Прочитав это равенство справа налево, получим $= x_1x_2 + y_1y_2 = \vec{a}\cdot\vec{b}$. Отсюда ясно, что всякое выражение вида $x_1x_2 + y_1y_2$ можно считать скалярным произведением векторов (x_1,y_1) и (x_2,y_2).

Эти соотношения переносятся и в трёхмерное пространство. Именно, модуль вектора $\vec{a}\,(x, y, z)$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **; если** $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Приведем **примеры.**

5. Докажем неравенство

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

Для доказательства рассмотрим векторы $\vec{x} = (a, b)$ и $\vec{y} = (c, d)$. Тогда $\sqrt{a^2+b^2} = |\vec{x}|$, $\sqrt{c^2+d^2} = |\vec{y}|$,

$\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = |\vec{x}+\vec{y}|$.

Данное неравенство свелось к векторному: $|\vec{x}| + |\vec{y}| \ge |\vec{x}+\vec{y}|$, которое хорошо известно. Кроме того, сразу ясно, когда достигается знак равенства: при сонаправленности векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Неравенство обобщается, причем доказательство остаётся тем же.

6. Докажем, что $a^2 + b^2 \ge 0{,}5$, если $a + b = 1$.

И здесь можно распознать скалярное произведение. В самом деле, $a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1$. Поэтому мы можем ввести векторы $\vec{x} = (a, b)$ и $\vec{y} = (1, 1)$. Далее, $\vec{x}\cdot\vec{y} = a + b = 1$, $|\vec{y}| = \sqrt{2}$, $|\vec{x}| = \sqrt{a^2+b^2}$ и по неравенству $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

Имеем $1 = a + b = a\cdot 1 + b\cdot 1 \le \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}$, откуда $a^2 + b^2 \ge 0{,}5$.

7. Пусть $x + y + z = 1$. В каких границах находится сумма $xy + yz + zx$?

Рассмотрим три вектора: $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (y, z, x)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Теперь видим:

$xy + yz + zx = \vec{a}\cdot\vec{b}$, $x + y + z = x\cdot 1 + y\cdot 1 + z\cdot 1$.

Далее только цепочки преобразований.

$1 = x + y + z = x\cdot 1 + y\cdot 1 + z\cdot 1 = \vec{a}\,\vec{c} \le |\vec{a}|\,|\vec{c}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le 1/\sqrt{3}$.

$xy + yz + zx = \vec{a}\,\vec{b} \le |\vec{a}|\,|\vec{b}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le (1/\sqrt{3})\cdot(1/\sqrt{3}) = 1/3$.

8. Встречается симпатичная и немного странная система

$\lceil\ x + y + z = 3,$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Странность её в том, что уравнений два, а неизвестных – три. Обычно системы, в которых неизвестных больше, чем уравнений, имеют бесконечное множество решений.

Симпатичность системы – в её симметричности. Симметричность системы обычно приводит к симметричности ответа. Симметричность ответа наводит на мысль, что в решении все неизвестные равны. Если три равных числа дают (как в первом уравнении) в сумме 3, то каждое из них равно 1. И решение получается единственным.

Налицо явное противоречие – с одной стороны решений должно бы быть бесконечное множество, с другой – решение получается единственное, причём мы его нашли.

Есть много способов разобраться с этой системой. Приведу векторную её интерпретацию (одну из возможных). Сумма квадратов трёх чисел наводит на мысль о длине трёхмерного вектора с координатами x, y, z. Сумма первых степеней превращается в скалярное произведение добавлением единицы как сомножителем к каждой координате вектора.

Введем такие обозначения: $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (x, y, z)$. При этом $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Первое уравнение данной системы запишем в виде $x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 3$ и тогда $\vec{a}\vec{b} = 3$.

Второе уравнение запишем в виде $(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{3})^2 = 9$.

Его можно переписать иначе: $(|\vec{a}||\vec{b}|)^2 = 9$. Из последнего равенства получаем, что $|\vec{a}||\vec{b}| = 3$.

Из равенств $\vec{a}\vec{b} = 3$ и $|\vec{a}||\vec{b}| = 3$ получаем: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$.

Отсюда следует сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

А так как все координаты вектора $\vec{a}$ равны, то равны все координаты и вектора $\vec{b}$:
$x = y = z$. Отсюда следует, что каждая координата этого вектора равна 1 – это мы и предвидели.

Такое эффектное решение получилось потому, что в правой части уравнений системы стоит одно и то же число.

Возможны и более замысловатые решения. Приведу такие.

Имеем: $(x-1, y-1, z-1) = \vec{b} - \vec{a}$ и вектор $(x+1, y+1, z+1) = \vec{b} + \vec{a}$.

Решение 2. Первое уравнение данной системы можно записать в виде $x\cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 3$, откуда получаем равенство $\vec{b} \cdot \vec{a} = 3$.

Из второго .уравнения получаем равенство $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{3} = 3$, которое запишем так: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 3$. Но тогда

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Последнее возможно только при сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. А так как все координаты вектора $\vec{a}$ равны, то равны и все координаты вектора $\vec{b}$. Иначе говоря, мы получили, что с необходимостью $x=y=z$. Отсюда следует, что $x=y=z=1$.

Решение 3. Уравнение $x+y+z = 3$ можно переписать в таком виде: $(x-1) + (y-1) + (z-1) = 0$, а затем и в таком:

$(x-1) \cdot 1+(y-1) \cdot 1+ (z-1)\cdot 1= 0$. Иначе говоря, скалярное произведение векторов $\vec{b} - \vec{a}$ и $\vec{a}$ равно нулю. Вектор $\vec{a}$ нулевым не является, поэтому нулевым может быть только вектор $\vec{b} - \vec{a}$. Из этого получаем, что $x= y= z = 1$. Но тогда задача решена, а потому далее будем двигаться, уже зная, что вектор $\vec{b} - \vec{a}$ ненулевой.

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ можно переписать в таком виде: $(x^2-1) + (y^2-1) + (z^2-1) = 0$, а затем и в таком:

$(x-1)(x+1)+(y-1)(y+1)+(z-1)(z+1) = 0$. Последнее означает, что скалярное произведение векторов $\vec{b} - \vec{a}$ и $\vec{b} + \vec{a}$ равно нулю. Из векторов $\vec{b} + \vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{a}$ нулевым может быть только вектор $\vec{b} + \vec{a}$ (то, что вектор $\vec{b} - \vec{a}$ не является нулевым, мы уже учли). Но тогда $x = y = z = -1$ что противоречит условию. Значит, вектор $\vec{b} + \vec{a}$ ненулевой. Из того, что вектор $\vec{b} - \vec{a}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b} + \vec{a}$, следует, что он ортогонален любой их линейной комбинации, в частности вектору $\vec{b} - \vec{a}$. Но тогда получаем, что вектор $\vec{b} - \vec{a}$ ортогонален самому себе, что возможно только в том случае, когда этот вектор нулевой. Противоречие. Итак, вектор $\vec{b} - \vec{a}$ является нулевым, откуда $\vec{b} = \vec{a}$ и $x= y = z = 1$.

Решение 4. Вычтем из второго уравнения системы первое. Получим уравнение $x^2- x+y^2- y + z^2- z = 0$, которое можно переписать в виде $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1)=0$. Это равенство равносильно такому: $\vec{b}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$. С другой стороны, уже было получено, что $\vec{a}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$. Оба равенства возможны только при коллинеарности векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$, а , значит, и вектора $\vec{b} - \vec{a}$. Коллинеарность этих трёх векторов приводит к равенству вектора $\vec{b} - \vec{a}$ нулевому вектору. Но тогда $x = y = z= 1$.

Возможен и слегка геометризованный вариант последнего решения. Пусть векторы $\vec{b}$, $\vec{a}$ не коллинеарны. Тогда вместе с вектором $\vec{b} - \vec{a}$ они составляют треугольник. Из равенств $\vec{b}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$ и $\vec{a}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$ делаем вывод о том, что' в этом треугольнике два прямых угла. Полученное противоречие приводит к коллинеарности векторов $\vec{b}$, $\vec{a}$. Концовка, как в решении 1.

Неравенства, относящиеся к скалярному произведению, позволяют решать задачи на поиски экстремума.
9.Чему равно наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$?

Запишем выражение $\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ как $1\cdot\sqrt{x} + 1\cdot\sqrt{1-x}$. Узнаём скалярное произведение векторов $\vec{a} = (1, 1)$ и $\vec{b} = (\sqrt{x}, \sqrt{1-x}$. Длина вектора $\vec{a}$ равна $\sqrt{2}$, длина вектора $\vec{b}$ равна 1. Используем неравенство $\vec{a}\,\vec{b} \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ для скалярного произведения и получаем:
$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1\cdot\sqrt{x} + 1\cdot\sqrt{1-x} \le \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$. Равенство достигается, когда векторы (1, 1) и ($\sqrt{x}, \sqrt{1-x}$) сонаправлены. Это происходит, если
($\sqrt{x}$, $\sqrt{1-x}$) = k (1, 1) = (k, k), $k > 0$. Отсюда получаем равенство
$\sqrt{x} = \sqrt{1-x}$, что происходит при $x = 0{,}5$, а это значение находится в области определения исходной функции.

10. Найти границы для суммы косинусов трёх углов треугольника.
Иначе говоря, оценить сумму cos A+cos B + cos C в остроугольном треугольнике ABC.
Для решения этой задачи будет использоваться неотрицательность скалярного квадрата вектора.

Выберем на прямых a, b, c , проходящих через стороны данного треугольника, единичные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ так, что углы между ними тупые и рассмотрим скалярный квадрат вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Так как
$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \ge 0$, то после возведения в квадрат этой суммы, использования свойств скалярного умножения и единичности этих векторов получим
$\cos(\pi - A) + \cos(\pi - B) + \cos(\pi - C) \ge -1{,}5$.
Отсюда: $\cos A + \cos B + \cos C \le 1{,}5$.

Когда же достигается равенство? Тогда, когда $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0$, откуда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, затем находим $\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b}$). Возводим в квадрат обе части полученного равенства и видим:
$\cos(\pi - B) = -0{,}5$.
Поэтому $\pi - B = 2\pi/3$, но тогда $B = \pi/3$. Такие же значения получатся
(по аналогии) для углов A и C. Значит, данный треугольник – равносторонний. Итак, из всех треугольников, сумма косинусов его углов равна 1,5 только в равностороннем треугольнике.

11. Найдем наибольшее значение выражения 5sin$x$-12cos$x$.

Пусть $\vec{a} = (5,-12)$, $\vec{b} = (\sin x, \cos x)$. Тогда данное выражение является скалярным произведением векторов a и $\vec{b}$. Используя неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ и то, что $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 1$, получаем искомое наибольшее значение выражения равное 13. Достигается оно при условии равенства: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, а оно имеет место в случае сонаправленности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. когда имеет место пропорция (sin$x$) /5 = (cos$x$)/13 . Отсюда $5\cos x + 12\sin x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}x = -\frac{5}{12}$ и, значит,

$$x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{5}{12}\right) + k\pi,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Аналогично можно найти и наименьшее значение данного выражения.

Вообще, выражение $a\cos x + b\sin x$ есть не что иное, как скалярное произведение векторов $\vec{p} = (a, b)$ и $\vec{q} = (\cos x, \sin x)$, и в общем случае заключается в границы $-\sqrt{a^2+b^2} \le |a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$.

Замечу, что в обобщённом виде неравенство $\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ приводит к неравенству Коши:
$(a_1b_1+\ldots+a_{n1}b_n)^2 \le (a_1+\ldots+a_n)^2\,(b_1+\ldots:+bn)^2$.

Равенство достигается в случае пропорциональности: $b_i = \lambda a_i$.
12. Решим уравнение
$a\cos x + b\sin x = 0$ ($a \ne 0$, $b \ne 0$).

Пусть $\vec{p} = (a, b)$ и $\vec{q} = (\cos x, \sin x)$. Тогда $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$, т. е. векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ортогональны. Условие ортогональности двух этих векторов можно записать в виде $k_1k_2 = -1$, где $\kappa_1 = b/a$, $\kappa_2 = \mathrm{tg}\,x$. Значит, $(b/a)\,\mathrm{tg}x = -1$, откуда
$\mathrm{tg}x = -(a/b)$. Тем самым проясняется геометрическая природа задачи: мы находим угол x, который образует с осью абсцисс вектор

$\vec{q}$ единичной длины, ортогональный данному вектору $\vec{p}$.

10. Уравнение

$$a\cos x + b\sin x = c \ (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0) \qquad (1)$$

обычно решают так. Выражение $\sqrt{a^2+b^2}$ выносят за скобки в левой части равенства, тогда имеем

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) = c.$$

После этого замечают, что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$

В такой ситуации одну из этих дробей можно считать косинусом (синусом) некоторого угла φ, а другую — синусом (косинусом) того же угла φ. Тогда мы приходим к равенству

$\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, откуда $\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, после чего решение очевидно.

Эта идея решения, однако, с трудом (психологически) воспринимается учениками: откуда стало известно про выражение $\sqrt{a^2+b^2}$ и почему его надо выносить за скобки? До этого додуматься непросто. Во всяком случае мне долго не удавалось добиться этого от учеников. Сначала я пробовал подход чисто геометрический, приведу только один из них.

Рассмотрим такую ситуацию. Пусть есть прямая *p* и прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB*. Для удобства расположим его с одной стороны от прямой *p*, а вершину *C* на самой прямой *p* (рис. 7).

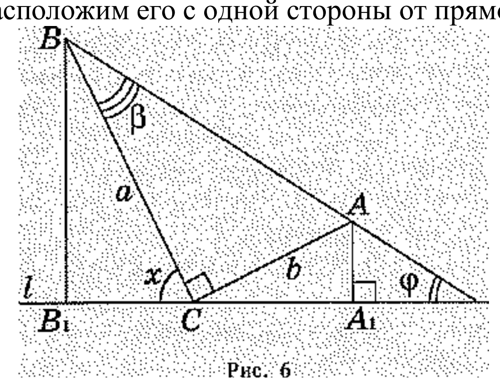

Рис. 7

Нам надо найти угол, который составляет с прямой *p* катет *BC*.

Спроектируем *AB* на *p*, и пусть A_1B_1 — проекция *AB*. Тогда, с одной стороны, $A_1B_1 = AB\cos\varphi$, где $\varphi = \angle AB, A_1B_1$.

А с другой стороны, $A_1B_1 = A_1C + CB_1 = b\cos(90° - x) + a\cos x = a\cos x + b\sin x$.

Поэтому $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi$. Значит, решая уравнение вида $a\cos x + b\sin x = c$, мы вместо левой части можем из приведённых геометрических соображений можем придти к более простому уравнению $\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi = c$, откуда найдем $\cos\varphi$, далее сам угол φ. А угол *x* найдем из равенства $x = \beta + \varphi$, где $\beta = \angle ABC$.

Но окончательно всё встало на своё место после работы с векторами.

Уравнение $a\cos x + b\sin x = c$ запишем при тех же обозначениях, что и в примере 5, в виде уравнения $\vec{p}\cdot\vec{q} = c$, которое можно переписать так: $|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cos\angle(\vec{p},\vec{q}) = c$. Но $|\vec{q}| = 1$. Поэтому

$$\cos\angle(\vec{p},\vec{q}) = c / |\vec{p}| = c / \sqrt{a^2+b^2}.$$

Отсюда мы находим угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Для ориентированных углов между векторами $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ верно равенство

$\angle(\vec{p},\vec{q}) + \angle(\vec{q},\vec{r}) = \angle(\vec{p},\vec{r})$ У нас оно выглядит так: $\angle(\vec{p},\vec{q}) + \angle(\vec{q},\vec{i}) = \angle(\vec{p},\vec{i})$

($\vec{i}$ - единичный вектор оси абсцисс); $\angle(\vec{q},\vec{i})$ и есть искомый угол *x*, $\angle(\vec{p},\vec{q})$ мы нашли, а

$\angle(\vec{p},\vec{i})$ — угол между известным вектором $\vec{p}$ и осью абсцисс. Отсюда находим неизвестный угол *x*.

И здесь становится ясно, из каких геометрических соображений появляется это уравнение: ищется угол, который образует с осью абсцисс вектор единичной длины, образующий с данным вектором фиксированный угол.

Для решения задачи, т. е. для нахождения значения угла *x*, вместо вектора $\vec{p} = (a, b)$ возьмём для упрощения вектор $\vec{p_1}$, сонаправленный с $\vec{p}$, но единичной длины. При этом все углы, и данные, и неизвестные, не изменяются. Но тогда в уравнении (2) слева будет уже скалярное произведение векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{q}$, равное cos □($\vec{p}_1, \vec{q}$), а справа — известное число. В принципе задача решена. Для её решения только и понадобилось, что заменить вектор $\vec{p}$ на вектор $\vec{p}_1$. *А* как это делается? Ясно как: для всякого ненулевого вектора $\vec{p}$ вектор $\frac{1}{|\vec{p}|}\vec{p}$ имеет единичную длину. В нашем случае $\vec{p}$ = (*a, b*). Значит,

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{|\vec{p}|}\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(a, b) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

При таком понимании задача легко подаётся. Сначала можно предложить решить уравнение, где участвуют два единичных вектора, например $\sqrt{\frac{1}{3}}\cos x + \sqrt{\frac{2}{3}}\sin x = 1$. А затем решать задачу и в общем виде.

Замечу, что, не имея такой ясной интерпретации исходного уравнения, поневоле начинают искать обходные решения, например, используя формулы двойного угла для синуса и косинуса.

11. Векторы помогают разбираться и с более трудными уравнениями.

Вот пример. Рассмотрим уравнение вида

$a\cos x + b\cos(x + \varphi) = c$ или $a\cos x + b\cos(x + \varphi) + c\cos(x + 2\varphi) = d$.

(аналогичные уравнения для синуса). Для простоты возьмём уравнение первого вида с единичными коэффициентами и $\varphi = 0{,}25\pi$.

$\cos x + \cos(x + 0{,}25\pi) = 1$. Нарисуем в системе координат с началом *O* и осями *p* и *q* векторы единичной длины $\vec{OA}$ и $\vec{AB}$ так, что вектор $\vec{OA}$ составляет с осью *p* угол *x*, а вектор $\vec{AB}$ составляет с вектором $\vec{OA}$ угол $0{,}25\pi$ (рис. 8). (Рисунок нарочито упрощён.)

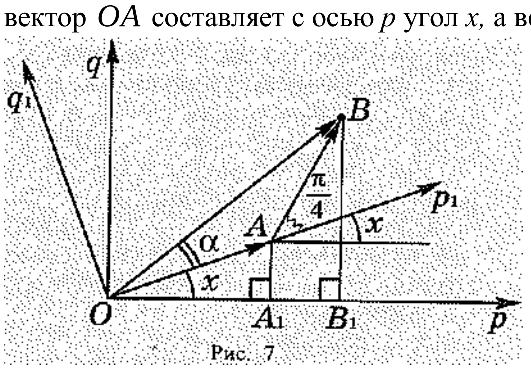

Рис.8

Точки A_1 и B_1 на этом рисунке — проекции точек *A* и *B* на ось *p*. Тогда $OA_1 = \cos x$, $A_1B_1 = \cos(x + 0{,}25\pi)$.

С другой стороны, OB_1 - проекция вектора $\vec{OB}$ на ось *p*, поэтому $OB_1 = |\vec{OB}|\cos(x+\alpha)$, где α — угол между векторами $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$. Длину $\vec{OB}$ найдём, повернув систему координат на угол *x* так, что ось *p* пойдет вдоль вектора $\vec{OA}$.

В этой новой системе координат Op_1q_1 длина вектора $\vec{OB}$ вычисляется по формуле длины вектора через его проекции:

$$|\vec{OB}| = \sqrt{1+(\cos 0{,}25\pi)^2+(\sin 0{,}25\pi)^2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Имеем $OB_1 = |\vec{OB}|\cos(x+\alpha) \Leftrightarrow OA_1 + A_1B_1 = OB\cos(x+\alpha) \Leftrightarrow \cos x + \cos(x+\alpha) = \sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(x+\alpha)$. Тогда исходное уравнение заменяем на такое: $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos(x+\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos(x+\alpha) = 1/\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Отсюда находим $x + \alpha$. Угол α можно выразить с помощью тангенса, ибо $\operatorname{tg}\alpha = (\sin 0{,}25\pi)/(1 + \cos 0{,}25\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Зная $x + \alpha$ и α, находим *x*.

Аналогично решается уравнение и более общего вида.

В период моего увлечения векторами я старался «выкопать» их где только возможно. Вот ещё пример использования скалярного произведения.

13 Ясно, выражение $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ является скалярным произведением векторов

$\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ и $\vec{b} = (\cos\beta, \sin\beta)$. С другой стороны, в силу того, что $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$,

скалярное произведение можно понимать как «длинный косинус», т. е. косинус, только умноженный на какие-то длины. Причём, если эти длины равны 1, то в таком случае это«чистый косинус». Но у нас векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как раз имеют единичную длину. Итак, выражение $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ есть косинус. Встаёт вопрос: косинус чего? Дальше следует доказательство известной формулы для косинуса разности двух углов.

14. И даже в исследовании уравнения $ax + b = 0$ «спрятано» скалярное произведение. Запишем его в виде $a\cdot x + b\cdot 1 = 0$, после чего ясно, что нас интересует такое значение *x*, которое обеспечивает ортогональность векторов (*a, b)* и (*x*, 1). Дальнейшее очевидно.

И что забавно. Эта ситуация обобщается на уравнение $Pn\ (\ x\ ) = 0$, в котором один вектор задаётся коэффициентами многочлена степени n , а другой вектор задаётся последовательными степенями неизвестного x – и всё это происходит в (n + 1) – мерном пространстве.

16. Решим, используя векторы, систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пусть мы имеем систему вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

Для перехода к векторному истолкованию вспомним, что всякий вектор на координатной плоскости может быть записан в виде упорядоченной пары чисел и, наоборот, всякую упорядоченную пару чисел можно понимать как такой вектор на плоскости, координатами которого являются эти числа. Теперь обозначим $(a_1, a_2) = \vec{a}$, $(b_1, b_2) = \vec{b}$, $(c_1, c_2) = \vec{c}$.

Используя умножение вектора на число в координатном виде, можно систему (1) переписать в таком векторном виде:

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}. \qquad (2)$$

Вопрос о существовании и числе решений системы (1) сведётся теперь к равносильному вопросу о нахождении чисел x и y, удовлетворяющих равенству (2). Ответ на последний вопрос хорошо известен. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются коллинеарными, то всякий вектор $\vec{c}$ плоскости можно разложить по этим векторам, причем единственным образом. Тем самым числа x и y находятся однозначно. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными, то ответ на вопрос зависит от вектора $\vec{c}$. Если вектор $\vec{c}$ не коллинеарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то ясно, что решения нет, ибо линейная комбинация коллинеарных векторов даёт вектор, коллинеарный каждому из них. Если же вектор $\vec{c}$ коллинеарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то искомых чисел x и y сколько угодно. Для того чтобы убедиться в последнем, достаточно взять, к примеру, такой случай: $\vec{b} = 2\vec{a}$ и $\vec{c} = 3\vec{a}$. Тогда мы приходим к равенству $x(\vec{a}) + y\ (2\vec{a}) = 3\vec{a}$, откуда $x + 2y = 3$. Понятно, что такое уравнение имеет сколько угодно решений. Аналогично можно разобраться и в общем случае, хотя, вообще говоря, ответ ясен из наглядных соображений.

Коллинеарность векторов (а также её отсутствие) легко переводится на привычные алгебраические соотношения. Именно: коллинеарность векторов равносильна пропорциональности соответствующих координат этих векторов (с оговоркой относительно нулей). Поэтому если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, то $b_1 = \lambda\, a_1$, $b_2 = \lambda\, a_2$ или, с большей общностью, определитель системы (1) равен нулю. Если при этом вектор $\vec{c}$ коллинеарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, точно так же равны нулю и два других определителя системы: при x и при y. Таким образом, получается известное условие существования бесконечного множества решений у такой системы — равенство нулю всех трёх определителей.

Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются коллинеарными, то нет и пропорциональности их соответствующих координат, а потому определитель системы отличен от нуля.

Любопытно, что векторным путём можно не только провести исследование системы (1), как мы только что сделали, но и решить эту систему. Для этого понадобится и скалярное умножение. Пусть вектор $\vec{a}^{\perp}$ получен из вектора $\vec{a}$ поворотом на 90° вокруг начала координат и пусть вектор $\vec{b}^{\perp}$ получен из вектора $\vec{b}$ таким же поворотом. Легко проверить, используя координатную запись для скалярного произведения и условие перпендикулярности векторов, что вектор $\vec{a}^{\perp}$ имеет координаты $(-a_2, a_1)$, а вектор $\vec{b}^{\perp}$ имеет координаты $\vec{b}\ (-b_2, b_1)$. Теперь обе части равенства (2) умножим на вектор $\vec{a}^{\perp}$ и получим $(x\vec{a} + y\vec{b}\ )\ \vec{a}^{\perp} = \vec{c} \cdot \vec{a}^{\perp}$. Из свойств скалярного умножения и ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}^{\perp}$ приходим к равенству $y\ (\vec{b}\ \vec{a}^{\perp}) = \vec{c} \cdot \vec{a}^{\perp}$. Отсюда при условии, что $(\vec{b}\ \vec{a}^{\perp}) \neq 0$, имеем $y = (\vec{c}\ \vec{a}^{\perp})/(\vec{b}\ \vec{a}^{\perp})$, Аналогично действуя и умножив обе части равенства (2) на вектор $\vec{b}^{\perp}$, придём (при условии, что $(\vec{a}\ \vec{b}^{\perp}) \neq 0$ к равенству $x = (\vec{c}\ \vec{b}^{\perp})/(\vec{a}\ \vec{b}^{\perp})$,

Чтобы перейти от этих решений в векторном виде к привычным формулам, достаточно каждый из векторов в этих равенствах записать в координатах, после чего применить формулу для скалярного произведения. Условие $\vec{b}\ \vec{a}^{\perp} \neq 0$ и аналогичное условие $\vec{a}\ \vec{b}^{\perp} \neq 0$, как легко видеть, равносильно отсутствию коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (Если, скажем, $\vec{a} \perp \vec{b}^{\perp}$, то вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$.)

Векторный метод применяется в системах такого типа с большим числом неизвестных. Разговор об этом с учениками опять же приводит к разговору о пространстве с числом измерений, большим трёх.

Некоторые алгебраические равенства порождают аналогичные векторные, которые затем переводятся в содержательные геометрические утверждения. Я приведу в основном хорошо известные утверждения алгебры и геометрии, тем самым будут ярче показаны свойства скалярного умножения.

Вот тому примеры, в основном, иллюстративные.

1. Из алгебры известно: $a\,(\,b + c\,) = ab + ac$. Переходим к векторам

(свойство (2)): $\vec{a}\,(\,\vec{b} + \vec{c}\,) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$.

Из этого равенства можно получить теорему о трёх перпендикулярах.

Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции этой наклонной на данную плоскость.

2. Из алгебры известно: $a\,(\,b - c\,) = ab - ac$. Переходим к векторам:

$\vec{a}\,(\,\vec{b} - \vec{c}\,) = \vec{a}\,\vec{b} - \vec{a}\,\vec{c}$.

Из этого равенства выводим перпендикулярность бокового ребра правильной треугольной пирамиды и противоположного ему ребра основания.

3. Из алгебры известно: $(\,a + b\,)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Переходим к векторам: $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\,\vec{a}\,\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $\vec{a}\,\vec{b} = 0$ и получаем

$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2}$, то есть теорему Пифагора.

4. Из алгебры известно: $(\,a - b\,)^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab$.

Переходим к векторам: $(\,\vec{a}-\vec{b}\,)^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\,\vec{a}\,\vec{b}$.Отсюда

$2\,\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - (\,\vec{a}-\vec{b}\,)^2$, $2ab\cos\varphi = a^2 + b^2 - c^2$, $\cos\varphi = (\,a^2 + b^2 - c^2) / 2ab$.

Получаем теорему косинуса.

5. Из алгебры известно: $(a + b)(\,a - b\,) = a^2 - b^2$.

Переходим к векторам: $(\,\vec{a}+\vec{b}\,)\,(\,\vec{a}-\vec{b}\,) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2}$.

Векторам $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ соответствуют диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\,.\,\vec{b}$. Если $a = b$ (параллелограмм есть ромб) , то скалярные квадраты векторов $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ равны. Тогда $(\,\vec{a}+\vec{b}\,)\,(\,\vec{a}-\vec{b}\,) = 0$. Последнее означает, что вектора $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, а тем самым и диагонали ромба перпендикулярны. Верно и обратное.

Значит, перпендикулярность диагоналей параллелограмма равносильна тому, что этот параллелограмм является ромбом.

6.Из алгебры известно: $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4} = ab$.

Переходим к векторам: $\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2}{4} = \vec{a}\,\vec{b}$.

Отсюда получаем, что равенство нулю скалярного произведения $\vec{a}\,\vec{b}$ равносильно равенству скалярных квадратов: $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2$.

Из этого следует: равенство диагоналей параллелограмма,

построенного на векторах $\vec{a}\,.\,\vec{b}$, что равносильно тому, что этот параллелограмм является прямоугольником.

7. Из алгебры известно: $\dfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2} = \dfrac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2}$.

Переходим к векторам: $\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})^2-\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}}{2} = \dfrac{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}-(\vec{a}-\vec{b})^2}{2}$.

Из этого выходит, что $(\vec{a}+\vec{b})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 = 2(\vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2})$.

За этим равенством стоит теорема о сумме квадратов диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$.

8. Из алгебры известно: $(a + b + c)^2 =$
$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$. Перейдём к векторам:
$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{b} + \vec{c})^2 + (\vec{c} + \vec{a})^2 - (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2)$.

За этим равенством стоит такое утверждение:
квадрат диагонали параллелепипеда равен разности между суммой квадратов диагоналей трёх его граней с общей вершиной и суммой квадратов его рёбер с общей вершиной.

9. Из алгебры известно: $a(b - c) + c(a - b) + b(c - a) = 0$.
Перейдём к векторам. Получим равенство
$\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) = 0$.

И если в этом равенстве два каких – либо слагаемых равны нулю, то и третье слагаемое тоже равно нулю. Отсюда мы получаем теорему о том, что высоты треугольника лежат на перпендикулярных прямых, имеющих общую точку.

Следующие три утверждения относятся к тетраэдру. Рассматривается тетраэдр *ABCD*. На каждом ребре этого тетраэдра зададим вектор. Сделаем это так: на ребре *BA* зададим вектор $\vec{BA}$. Затем выберем мысленно некоторую точку *O* и введём вектора с началом в этой точке и концом в вершине тетраэдра. Появятся векторы $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$. Разности этих векторов дадут нам векторы, идущие по рёбрам тетраэдра: $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$. Выражение в правой части равенства преобразуем так: вместо $\vec{OA} - \vec{OB}$ пишем $\vec{A} - \vec{B}$ (убрали начальную букву, она в дальнейших выкладках участия не принимает). Заменим теперь большие буквы на малые: вместо $\vec{A} - \vec{B}$ пишем $\vec{a} - \vec{b}$. Наконец, перейдём от векторов к латыни, убрав стрелочки, получим:вместо $\vec{a} - \vec{b}$ пишем $a - b$. Все эти манипуляции работают и в обратном направлении и в итоге вместо $a - b$ напишем $\vec{BA}$.

Введённые обозначения помогут быстрее разобраться с последующими задачами про тетраэдр.

10. Из алгебры известно :
$(a - b)^2 + (c - d)^2 = (a - c)^2 - (b - d)^2$ тогда и только тогда, когда
$(a - d)(b - c) = 0$.

От выражения $(a - b)^2$ переходим к $\vec{BA}^2 = AB^2$.

Проделав такой переход с каждым квадратом , мы приходим к утверждению: в тетраэдре *ABCD* равенство $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ равносильно перпендикулярности рёбер *AD* и *BC*. Словами это можно выразить так: равенство сумм квадратов двух пар противоположных рёбер тетраэдра равносильно перпендикулярности третьей пары рёбер.

Так как в доказательстве никак не использовалась трёхмерность расположения данных точек, то это утверждение верно и в том случае, когда исходные четыре точки являются вершинами четырёхугольника. Именно: равенство сумм квадратов двух пар противоположных сторон четырёхугольника равносильно перпендикулярности его диагоналей.

11. Утверждение 10 можно обобщить и придти к формуле для вычисления угла между прямыми пространства, находящимися в любом взаимном положении.

Из алгебры известно :
$(a - b)^2 + (c - d)^2 - (c - a)^2 - (d - c)^2 = 2(a - d)(c - b)$.

Преобразуя с помощью векторов это равенство, мы приходим к такому утверждению: в тетраэдре *ABCD* выполняется

равенство $AB^2 + CD^2 - AC^2 - BD^2 = 2\,\vec{DA} \cdot \vec{BC}$,
откуда имеем $AB^2 + CD^2 - AC^2 - BD^2 = 2\,DA \cdot BC \cos\varphi$, где φ – угол между прямыми *AD* и *BC*. Так как угол между прямыми не больше прямого, то косинус должен быть неотрицательным, потому в левой части равенства надлежит поставить модуль. Окончательно имеем:
$\cos\varphi = |AB^2 + CD^2 - AC^2 - BD^2| / 2\,AD \cdot BC$.

Так как в доказательстве никак не использовалась трёхмерность расположения данных точек, то это утверждение верно и в том случае, когда исходные четыре точки являются вершинами четырёхугольника.

12. Из алгебры известно :
$(a + b - c - d)^2 = (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 - (a - b)^2 - (c - d)^2$.

Преобразуя с помощью векторов это равенство, получаем :
$4\,MN^2 = AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2$, где точка *N* - середина ребра *CD*, а точка *M* - середина ребра *AB* (

формула Эйлера).

Словами это можно выразить так: квадрат средней линии тетраэдра равен алгебраической сумме квадратов всех его рёбер, причём со знаком минус берутся только те рёбра, между которыми проведена эта средняя линия.

Для доказательства выразим вектор $\vec{NM}$. Вот как это получается. $\vec{NM} = \vec{M} - \vec{N} = 0{,}5\,(\vec{A}+\vec{B}) - 0{,}5\,(\vec{C}+\vec{D}) =$
$0{,}5\,(\vec{A} - \vec{C} + \vec{B} - \vec{D}) = 0{,}5\,(\vec{CA}+\vec{DB})$.

Далее – только алгебра.

Так как в доказательстве никак не использовалась трёхмерность расположения данных точек, то это утверждение верно и в том случае, когда исходные четыре точки являются вершинами четырёхугольника.

Напоследок, пара примеров тому, как скалярное умножение даёт альтернативу традиционным доказательствам геометрических утверждений.

1. Скалярное умножение иногда привлекают для доказательства теоремы косинуса. Но его можно использовать и при доказательстве теоремы синусов.

Пусть вектор $\vec{c}$ длиной 1 равен сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, длины которых обозначим соответственно a и b. Нарисуем треугольник ABC, в котором $\vec{BA} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $\angle ABC=\beta$ $\angle CAB=\alpha$ (рис. 9). (На рисунке $\beta < 90°$, но доказательство проходит и тогда, когда $\beta > 90°$.)

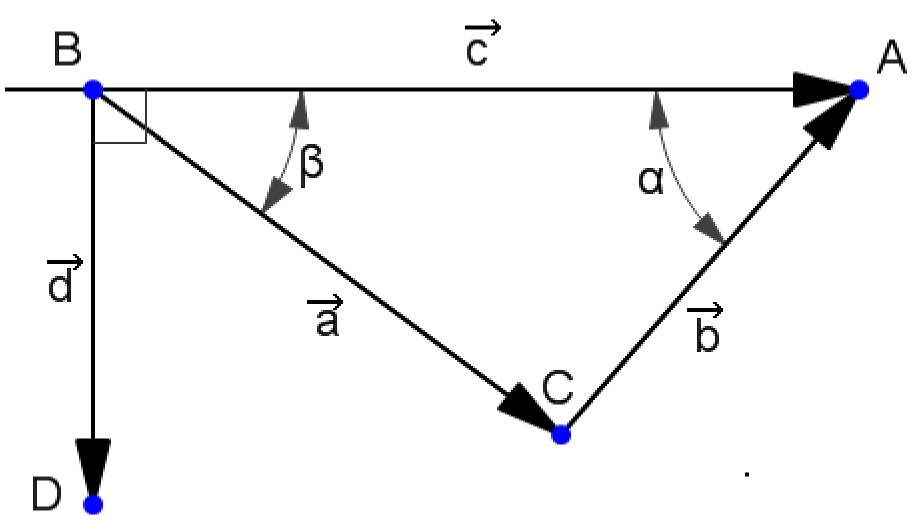

Рис. 9

Вектор $\vec{BD} = \vec{d}$ на этом рисунке таков, что его модуль равен 1, сам он ортогонален вектору $\vec{c}$. Теперь имеем цепочку равенств
$0 = \vec{c}\,\vec{d} = (\vec{a}+\vec{b})\,\vec{d} = \vec{a}\,\vec{d}+\vec{b}\,\vec{d} = a \cdot 1 \cdot \cos(90° - \beta) + b \cdot 1 \cdot \cos(90^o + \alpha) = a \sin\beta - b \sin\alpha \Leftrightarrow a \sin\beta = b \sin\alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a / b = \sin\alpha / \sin\beta$.

Ещё один малоизвестный способ получить теорему синусов, но уже без ссылки на рисунок, такой. В треугольнике со сторонами a,b,c введём соответственно векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ так, что $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Умножим обе части равенства на вектор $\vec{b} - \vec{c}$. Тогда $\vec{a}\,(\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c})\,(\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow$
$\vec{a}\,\vec{b} - \vec{a}\,\vec{c} = b^2 - c^2 \Rightarrow ab \cos C - ac \cos B = b^2 - c^2 \Rightarrow$
$a\,(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2 \Rightarrow$ (т.к. известно равенство $a = b\cos C + c\cos B$)

$(b \cos C + c \cos B)(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2 \Rightarrow$
$b^2\cos^2 C - c^2\cos^2 B = b^2 - c^2 \Rightarrow b^2 - b^2\cos^2 C = c^2 - c^2\cos^2 B \Rightarrow$
$\Rightarrow b^2(1 - \cos^2 C) = c^2(1 - \cos^2 B) \Rightarrow b^2 \sin^2 C = c^2 \sin^2 B$
$\Rightarrow b \sin C = c \sin B \Rightarrow \quad b / c = \sin B / \sin C.$

В этом решении явно видно достоинство векторного метода. Векторные доказательства позволяют избежать перебора различных случаев, о чём уже сказано – это раз. И они не требуют рисунка как подпорки к доказательству – это два.

2. Признак правильного треугольника.

Если в треугольнике точка пересечения медиан совпадает с точкой пересечения высот, то этот треугольник равносторонний.

Малоизвестное доказательство (без рисунка!) таково.

Пусть в треугольнике ABC точка O является точкой пересечения его медиан и высот. Обозначим $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$.

Так как точка O является центром масс вершин треугольника, то $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Так как в точке O пересекаются высоты, то $\vec{OC} \cdot \vec{BA} = 0$, то есть $\vec{c}\,(\vec{a} - \vec{b}) = 0$, откуда имеем $\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}$. Аналогично, $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}\,\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{c}$. Далее имеем: $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,\vec{c} = \vec{0} \cdot \vec{c} = 0$, откуда $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{c} = -c^2$ и далее $\vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c} = -c^2$. Но $\vec{a}\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}$ и $\vec{b}\,\vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}$. Значит, $2\vec{a}\,\vec{b} = -c^2$. Аналогично, $2\vec{b}\,\vec{c} = -a^2$, $2\vec{a}\,\vec{c} = -b^2$. Так как в левых частях этих равенств стоят равные выражения, то равны выражения и в правых частях. Но тогда $a = b = c$, что и требовалось.

Достоинства использования векторов очевидны:

1) проведение доказательств геометрических утверждений оказывается возможным без использования рисунка;
2) появляется возможность обойтись в доказательствах геометрических утверждений без перебора различных частных случаев, обусловленных неоднозначностью рисунка;
(про эти два достоинства я упоминал).
3) к решению задач подключается алгебраическая техника;
4) к решению задач подключается метод координат;
5) есть возможность использовать разнообразные подходы для уяснения теоретических вопросов и в решении задач;
6) безразличие к размерности и связанная с этим возможность обобщений;
7) способствуют более полному пониманию математики как единой науки.

Эти достоинства проявляют себя, в частности, при использовании скалярного умножения – я надеюсь, что это было видно.

11.5 ВЕКТОРЫ И ТОНКИЕ ВОПРОСЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

До сих пор я приводил примеры того, как векторы помогают в решении задач или для иллюстрации теории. С их помощью можно понять и некоторые факты теории.

Речь поведу сначала об ориентации на плоскости. Фразы типа «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки» замечательны своей наглядностью. Однако им недостаёт формального толкования. Дело не в том, что мы без этого формализма не можем обойтись, а просто надо знать, в чём он состоит в данном случае, что именно мы обходим, используя наглядность, взятую от часов. Аналогичная ситуация хорошо известна в преподавании. Когда мы не фиксируем внимание школьников на факте пересечения диагоналей параллелограмма, то знаем, что этот факт доказан в курсе оснований геометрии. В конце концов даже равенство 2 · 2 = 4 где-то доказано (я видел где — в курсе анализа Э. Ландау).

На прямой вводится понятие, аналогичное понятию ориентации плоскости,— это понятие направления. На прямой можно задать два направления — одно соответствует возрастанию координаты, а другое — ее убыванию. То, которое соответствует возрастанию координаты, называют положительным направлением, а то, которое соответствует её убыванию, отрицательным. В этом описании направления на прямой всё наглядно.

Как для формализации этих понятий могут помочь векторы? Можно сделать так. Выберем на прямой две любые точки A и B и рассмотрим вектор $\vec{AB}$. По отношению к вектору $\vec{AB}$ любой вектор $\vec{CD}$ (отличный от нулевого) , где точки C и D лежат на этой же прямой, можно записать в виде $\vec{CD} = \lambda\vec{AB}$. При этом $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$. В первом случае ($\lambda > 0$) говорим, что $\vec{CD}$ направлен одинаково с $\vec{AB}$ или что у них одно направление, а во втором случае ($\lambda < 0$) говорим, что $\vec{CD}$ направлен противоположно $\vec{AB}$, что у них противоположные направления. При таком понимании фраза «на прямой существуют два направления» означает приведённую выше расшифровку. Можно, конечно, определить и сам термин «направление на прямой» как некий класс эквивалентности, но без этого легко обойтись.

Аналогично можно дать формальное толкование ориентации на плоскости. Выберем на плоскости два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, назовем их базисом плоскости. Возьмём теперь любую пару неколлинеарных векторов этой плоскости $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Выразим каждый из них как линейную комбинацию векторов базиса:

$\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, $\vec{d} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$. Рассмотрим определитель $\Delta = x_1y_2 - x_2y_1$. Возможны всего два случая: $\Delta > 0$ или $\Delta < 0$

($\Delta \neq 0$, так как векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ линейно независимы).

В первом случае ($\Delta > 0$) будем говорить, что упорядоченная пара векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ ориентирована так же, как базис. Во втором случае ($\Delta < 0$) будем говорить, что упорядоченная пара векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ ориентирована противоположно базису. В первом случае можно говорить об их одинаковой ориентации, во втором — о противоположной. Как мы эти ориентации назовём и обозначим, уже неважно, а часовая стрелка задаёт очень наглядный образ двух возможных ориентаций. Можно, конечно, дать определение тому, что такое «ориентация плоскости» как класс эквивалентности, но в этом уже нет нужды.

Поясним этот общий разговор на примере. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные векторы, отложенные от начала координат в положительные стороны осей. Й пусть $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = -\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 10).

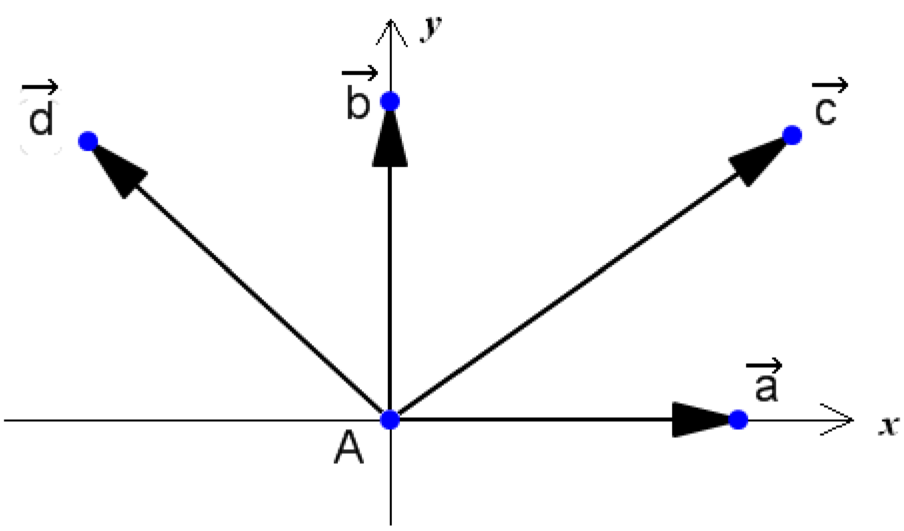

Рис. 10

Тогда $\Delta = 2 > 0$, т. е. согласно нашему описанию упорядоченная пара векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ ориентирована одинаково с базисом $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что видно с помощью часовой стрелки. Пусть теперь мы рассматриваем те же векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$, но в другом порядке, поставив $\vec{d}$ на первое место, а $\vec{c}$ на второе. Тогда $\Delta = -2 < 0$, и, согласно нашему описанию, упорядоченная пара векторов $\vec{d}$ и $\vec{c}$ ориентирована противоположно базису $\vec{a}$ и $\vec{b}$, что опять же показывает часовая стрелка.

Разговор на эту тему чрезвычайно поучителен, так как показывает возможность формализации наглядно очевидного, что типично для математической науки в целом. Вместе с тем от этого разговора остаётся некое чувство неудовлетворённости: вроде бы всё правильно, но при чём тут определители? Откуда они появились? Объяснение таково. Если исходные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные, то модуль этого определителя, как известно, равен площади параллелограмма, «натянутого» на векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тогда сам определитель Δ — это площадь S такого параллелограмма, взятая со знаком. С другой стороны, та же площадь вычисляется по формуле $S = cd \sin \angle(\vec{c}, \vec{d})$ и знак площади находится в соответствии со знаком синуса угла между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$. А знак синуса в силу его нечётности соответствует знаку угла между векторами в традиционном наглядном его толковании. Поэтому и получается полное соответствие: положительный определитель — положительный угол между векторами, вращение против часовой стрелки, отрицательный определитель — отрицательный угол между векторами, вращение по часовой стрелке. Тут же уместно заметить, почему $\Delta \neq 0$ — в противном случае площадь параллелограмма обратилась бы в нуль, т. е. исчез бы сам параллелограмм, что невозможно в силу неколлинеарности векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Итак, понятия « направление на прямой» и «ориентация на плоскости» могут быть точно сформулированы с помощью векторов. При этом можно обойтись без определений этих понятий, удовлетворившись приведённой выше их расшифровкой. Такой подход к математическому понятию, по-моему, вполне допустим. Кроме того, это может облегчить учительскую (и ученическую) жизнь. Приведу пример. Попытка дать определение тому, что такое f, в записи $y= f(x)$, т. е. дать определение понятию функции, завела школьное преподавание в этом вопросе чуть ли не в теорию бинарных отношений. Вместо всей этой премудрости вполне достаточно дать расшифровку терминологии и обозначения примерно так: если каждому элементу одного множества соответствует один элемент другого множества, то говорят, что на первом множестве задана функция. Термин «функция» при таком подходе не определяется, а кодирует некую ситуацию, которая по необходимости может быть однозначно расшифрована. (Вспомним притчу об апельсинах: бинарные отношения для определения функции — это уже третий апельсин!) Замечу, что ещё практичнее сформулировать понятие функции в терминах величин, что и делалось в уже забытых учебниках.

От векторов, как я старался показать, много пользы. Неожиданным для меня оказалось, что куда более абстрактное понятие векторного пространства может прояснить картину в отдельных разделах математики. Определение векторного пространства уже было дано выше применительно к геометрии, но на самом деле это несущественно, ибо под векторами в этом определении понимаются абстрактные объекты, свойства которых заданы аксиоматикой. Несложно убедиться в том, что векторами в этом смысле являются многочлены степени не выше, чем некоторое $n \in \mathrm{N}$, непрерывные функции, заданные на одном и том же промежутке, комплексные числа, сдвиги (параллельные переносы) плоскости или пространства при введении операции сложения сдвигов и умножения сдвига на число. Получается, что важнейшие объекты школьного курса математики являются всего лишь частными случаями векторного пространства. Такова сила обобщений в математике. Уяснив себе это, я наконец-то до конца понял одно рассуждение, которое не понимал ещё со школьных лет. Речь идет о теореме Безу.

Теорема Безу гласит: «Остаток от деления многочлена $p(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен $p(a)$». Для доказательства записывается схема деления многочлена $p(x)$ на $(x-a)$ с остатком: $p(x) = (x-a)q(x) + r$. В этом равенстве далее полагают $x=a$, и получают, что $p(a) = (a - a)\, q(a) + r$, откуда и следует $r = p(a)$. И я не мог понять, почему мы делим на нуль — это раз и почему из этого ещё что-то получается — это два. Прозрение пришло лет через 15! На множестве многочленов деление с остатком определено, и притом единственным образом, когда делитель отличен от нуля. Но это нуль на множестве многочленов, а не на множестве чисел, нуль — многочлен, а не число «нуль», нуль из векторного пространства многочленов, а не из множества вещественных чисел. В моём же ученическом сознании эти два разных нуля «слиплись», отсюда и непонимание. Такое же «слипание» возможно при толковании записи $f(x) = 0$. Что здесь стоит справа? Число «нуль»? Функция, тождественно равная нулю? Обычно всё ясно из контекста, но иногда требуется повышенная точность рассуждений. Впрочем, не всё так просто. Нуль на множестве комплексных чисел и вещественный нуль — это нули из разных множеств, однако есть соглашение, по которому они отождествляются. В основе такого соглашения лежит изоморфизм множеств: $\boldsymbol{R}$ и комплексных чисел с нулевой мнимой частью — и практическая необходимость,

И ещё о той геометризации, которую позволяют осуществить векторы. Очень ярким примером является векторное пространство непрерывных функций. Хотя этот пример далёк от программного школьного курса, мне удавалось рассказать о нём в виде небольшой лекции, и я помню круглые от удивления глаза учеников при этом. Сам пример достаточно прост. Множество непрерывных функций на одном и том же замкнутом промежутке удовлетворяет аксиомам векторного пространства, значит, каждая из таких непрерывных функций — это вектор. Но если мы имеем дело с векторами, то введём с помощью скалярного умножения модуль вектора и угол между векторами. Оказывается, для двух непрерывных функций f и g, заданных на промежутке $[a, b]$, число, определяемое как $\int_a^b f(x)g(x)dx$, можно назвать их скалярным произведением, ибо при таком определении выполняются все основные свойства скалярного умножения, которые входят в список аксиом евклидова пространства. Но тогда, естественно, «модуль»функции f равен $\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$. После этого можно считать «расстояния между функциями» и «углы между функциями» по формулам, известным для векторов. Более того, такой разговор можно продолжить, введя понятие ортогональной системы функций на данном промежутке. Именно: система функций $\varphi_n(x)$ на промежутке $[a, b]$ называется ортогональной, если $\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_l(x)dx = 0$ при $k \neq l$. Раскладывая произвольную функцию, заданную на этом промежутке, по ортогональной системе функций (как геометрический вектор в ортогональном базисе), выходим на разговор о ряде Фурье и его применениях.

Со временем я стал относиться к векторам с большим почтением и начал подумывать о том, что всю математику можно рассказывать в школе как некоторую теорию векторов. Эта идея послужила начальной для решения следующей методической задачи, которую мне пришлось решать, но об этом чуть позже. А сейчас я хочу остановиться на той ситуации, которая образовалась в элементарной математике с векторами. Это случилось тогда, когда в учебнике геометрии, написанном в соответствии с программой, принятой в 1968 году, вектор был определён как параллельный перенос плоскости. С определением вектора всегда были какие-то сложности. Обычно вектор определялся как направленный отрезок.

О трудностях, которые возникают при определении вектора как направленного отрезка, прекрасно сказано в книге В. Болтянский и И. Яглом, а затем А. Александров (Математика в шкоде.— 1984.— № 5). Но что такое направленный отрезок? Отрезок, у которого указаны начало и конец. Тут я задавал ученикам вопрос: «Является ли направленный отрезок отрезком?»

— Да,— говорили одни,— это следует из определения.

— Нет,— говорили другие,— это не отрезок, так как у отрезка два конца, а не один.

Разбирая эти споры, пришлось объяснять, что верна вторая точка зрения хотя бы ещё и потому, что определения равенства у отрезка и направленного отрезка различные. Что же касается первой точки зрения, которая носит явно лингвистический характер, то я говорил, что хотя прилагательное, стоящее перед существительным, обычно уточняет его, но в языке бывают исключения, и в этом случае тоже, например, морская капуста вовсе не капуста. В физике, где векторы всегда играли важную роль, шли чаще всего от понятия векторной величины как такой величины, которая характеризуется не только числом, но и направлением,— при этом обычно оказывались забытыми в определении способ сложения векторов и оговорка про нулевой вектор. И совершенно удручающе выглядела картина, когда на уроке математики дети выслушивали одно определение вектора, а на уроке физики — другое. Что они при этом понимали?

Определение вектора как параллельного переноса устранило некоторые математические несуразности, возникшие при рассмотрении вектора как направленного отрезка. Но при этом отрыв от физики только усугубился, да и в преподавании возникли некоторые трудности. Главная из них в том, что определение вектора как переноса сложно использовать практически, при решении задач. В задачах школьного курса почти всегда вектор выступает в качестве направленного отрезка. Это наглядно, доступно, Чего ещё можно пожелать математическому понятию? Далее, к моменту введения вектора сдвиги уже изучались; тогда почему их нужно переименовывать? Сторонники такого определения сами прекрасно знают, что сдвиги удовлетворяют аксиомам векторного пространства, а потому имеют право называться векторами, точнее было бы сказать, что сдвиги являются векторами. Но этого никак не объяснить детям, и недоумение с определением вектора повисает в воздухе. Наконец, на практике встречаются решения задач, использующие поворот вектора. Если вектор — это сдвиг, то что такое поворот вектора? Поворот сдвига?

Такая сумятица с определением вектора привела к ситуациям анекдотическим, которым я был свидетелем. Определение вектора из школьного учебника зачитывалось академиком – физиком на сессии Верховного Совета СССР. На защите диссертации по методике преподавания математики соискатель, представивший диссертацию о векторах, отказался ответить на вопрос «Что вы называете вектором?».

Как преодолеть возникающие трудности — дело методистов, быть может, и поступиться логической безупречностью при начальном введении понятия, если только это не приводит к прямым ошибкам. Рассогласование теории и практики — тяжелый грех обучения. Один из возможных вариантов согласования приведён в учебниках геометрии, написанных А.Александровым с коллегами

Несколько слов о повороте вектора. Есть непростая и содержательная задача, которая очень красиво решается с помощью поворота вектора: «Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нуль-вектору». Если число вершин чётно, то задача решается моментально, ибо на каждый такой вектор есть ему противоположный. Но если число вершин нечётно, то ответ вовсе не является очевидным. Тем красивее выглядит решение, в котором нет никакой «тупой» работы. Итак, повернём вокруг центра данного многоугольника каждый из данных векторов на угол $2\pi / n$, где n —число сторон данного многоугольника. Что при этом произойдёт с суммарным вектором? Он не изменится, ибо векторы-слагаемые останутся теми же. Но в результате такого поворота не изменяется только нуль-вектор. Значит, суммарный вектор — нулевой, что и требовалось установить.

Точно так же можно решить задачу о сумме векторов, идущих из центра правильного тетраэдра в его вершины, только поворот будет уже в пространстве и вокруг оси, проходящей через один из данных векторов.

Что такое поворот вектора, когда вектор — направленный отрезок, понятно: надо повернуть начало и конец вектора; конкретно: был вектор $\vec{AB}$, точка A при повороте перешла в точку A_1, точка B при том же повороте перешла в точку B_1, тогда вектор $\vec{AB}$ перешёл в вектор $\vec{A_1B_1}$ Ситуация существенно упрощается, если начало вектора находится в центре поворота, как и было в нашей задаче.

Но как понимать поворот вектора, когда вектор — это сдвиг?

Вопрос сводится вот к чему. Пусть образом направленного отрезка $\vec{AB}$ является направленный отрезок $\vec{A_1B_1}$. Возьмём теперь направленный отрезок $\vec{CD}$, равный $\vec{AB}$, Пусть образом $\vec{CD}$ является направленный отрезок $\vec{C_1D_1}$. Будут ли при этом равны направленные отрезки $\vec{A_1B_1}$ и $\vec{C_1D_1}$. Равенство их длин очевидно; но как быть с их направлениями? Оказывается, их направления тоже совпадают.

В самом деле, рассмотрим движение f плоскости, которое точку A_1 перевело в точку B_1 (рис. 11). Видно, что его можно рассматривать как композицию трёх движений: поворота вокруг точки O на угол (- φ)— он переводит точку A_1 в точку A, сдвига, задаваемого направленным отрезком $\vec{AB}$, — он переводит точку A в точку B и поворота вокруг точки O на угол φ — он переводит точку B в точку B_1.

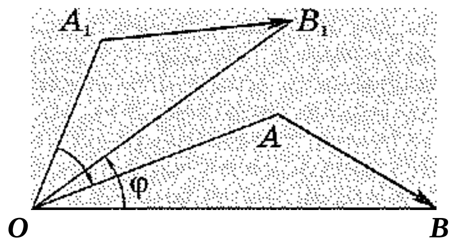

Рис. 11

В общем виде это движение f такое: $O^{\varphi} \circ \vec{a} \circ O^{-\varphi}$ (O^{φ} и $O^{-\varphi}$ — соответствующие повороты с центром O),

И тут встаёт вопрос: а каким именно движением является движение f ? Ответ на этот вопрос неочевидный: движение f является сдвигом. Я приведу доказательство, основанное на свойствах движений на плоскости. Сдвиг $\vec{a}$ можно разложить на композицию двух осевых симметрии с осями p_1 и p_2, которые параллельны: $\vec{a} = p_2 \circ p_1$. Поворот O^{φ} можно разложить на композицию двух осевых симметрии с пересекающимися осями, причём одну из этих осей можно выбрать произвольно, поэтому запишем его такой композицией: $O^{\varphi} = p_3 \circ p_1$. Тогда $O^{-\varphi} = p_1 \circ p_3$. Теперь, используя свойства осевых симметрии, проделаем такие преобразования выражения для f:

$O^{\varphi} \circ \vec{a} \circ O^{-\varphi} = (p_3 \circ p_1) \circ (p_2 \circ p_1) \circ (p_1 \circ p_3) = p_3 \circ p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_1 \circ p_3 = p_3 \circ p_1 \circ p_2 \circ E_1 \circ p_3 = (p_3 \circ p_1) \circ (p_2 \circ p_3) = O^{\varphi} \circ O_1^{-\varphi}$

(композиция $p_2 \circ p_3$ есть поворот $O_1^{-\varphi}$) . Сумма углов поворотов равна 0. В таких случаях композиция поворотов есть сдвиг. При этом видно, что в общем случае полученный сдвиг отличен от исходного. Любопытно, что получаемый в результате сдвиг, т. е. вектор, не зависит от выбора центра поворота (доказательство я опускаю).

Итак, f — это сдвиг. А сдвиг сохраняет направление. Поэтому $\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

Когда я всё это понял, то перестал заикаться, произнося слова «повернём вектор». Более того, мне даже понравилась эта операция, с помощью поворота вектора можно решить целый ряд непростых задач. Особенно интересен поворот вектора на $\pi/2$. Мы уже видели, как он может быть использован при исследовании линейных систем с двумя переменными. Но есть и другие возможности, связанные с тем, что эта операция обладает свойством линейности: $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$. $f(\kappa \vec{a}) = \kappa f(\vec{a})$.

О свойствах поворота вектора и его применениях хорошо сказано П. Моденовым и 3. Скопецом .

Обозначим теперь вектор (1,0) через $\vec{i}$, а вектор (0, 1) как $\vec{j}$. Вектор, полученный поворотом вектора $\vec{i}$ на угол α, обозначим как $\vec{i}^{\,\alpha}$. Этот вектор можно разложить в ортонормированном базисе ($\vec{i}$, $\vec{j}$): $\vec{i}^{\,\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$. По определению можно положить, что x в этом разложении есть cos α, y - sin α. Из этих соображений можно вывести всю тригонометрию.

А если добавить кинематические соображения, то получается ещё один «сильный» метод решения задач. Вот пример решения известной геометрической задачи с помощью кинематики (она имеет и другое векторное решение, не использующее кинематики):

На двух сторонах треугольника вне его построены два равнобедренных прямоугольных треугольника так, что стороны данного треугольника являются их гипотенузами. Доказать, что отрезок, соединяющий вершины прямых углов построенных треугольников, виден из середины третьей стороны данного треугольника под прямым углом.

Решение. Пусть дан треугольник ABC и стороны AC и BC являются гипотенузами построенных прямоугольных равнобедренных треугольников. Пусть N—вершина прямого угла в построенном треугольнике ACN, а M — вершина прямого угла в построенном треугольнике BCM (рис. 12).

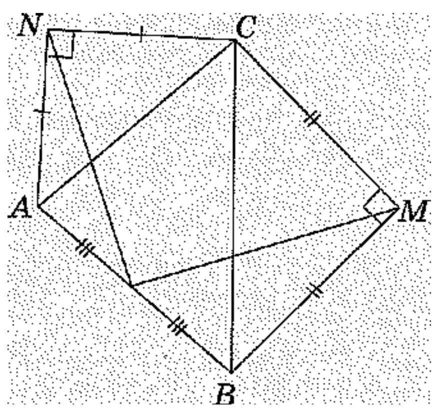

Рис. 12

Заметим, что $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{AC}^{45^0}$ и $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{BC}^{-45^0}$.

Эти записи означают, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ повёрнуты на соответствующее число градусов по и против часовой стрелки.) Тогда скорости этих векторов связаны (при любом выборе полюса) аналогичными равенствами: $\vec{V}_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{V}_C^{\,45^0}$, $\vec{V}_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{V}_C^{\,-45^0}$

Из равенства (2) имеем $\vec{V}_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_M^{\,-45^0}$. Подставим полученное значение для $\vec{V}_C$ в равенство (1), получим $\vec{V}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\vec{V}_M^{\,45^0})^{45^0} = \vec{V}_M^{\,90^0}$. Тогда (интегрируя последнее векторное равенство) имеем $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{\,90^0} + \vec{r}_0$, где $\vec{r}_0$ — постоянный вектор.

Для нахождения $\vec{r}_0$ возьмём такое положение точки *C,* при котором она является вершиной прямого угла прямоугольного равнобедренного треугольника *ABC.*

В этом случае $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{\,90^0}$. Отсюда получаем, что $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Но тогда при любом выборе полюса, в частности, в середине отрезка *AB,* имеем равенство $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{\,90^0}$, из чего и следует доказываемое утверждение.

Из кинематических соображений можно доказать даже теорему Пифагора — кажется, так она ещё не доказывалась. Вот это доказательство.

Пусть точка *C* — вершина прямого угла треугольника *ABC.* Обозначим $\vec{AC}$ как $\vec{b}$, $\vec{BC}$ как $\vec{a}$. Начнём вращать прямые *BC* и *AC с* постоянной угловой скоростью ω вокруг вершин *B* и *A* соответственно против часовой стрелки. При этом они будут оставаться перпендикулярными. Пусть $\vec{v}$ — скорость точки *C* при таком движении. Разложим вектор $\vec{v}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. При этом будем считать, что вектор $\vec{v}_1$, сонаправлен с вектором $\vec{a}$, а вектор $\vec{v}_2$ противонаправлен с вектором $\vec{b}$. (Это предположение не является принципиальным.) Точка *C* находится на вращающемся луче *AC* и на вращающемся луче *BC.* Если рассмотреть положение точки *C* на луче *AC,* то $v_1 = \omega b$, кроме того, $v_2 = - b'$. (Эти соотношения следуют из кинематики вращающейся точки.) Аналогично, рассматривая теперь точку *C* на луче *BC,* имеем $v_2 = \omega a$, кроме того, $v_1 = a'$. Выразим из полученных равенств a' и b':

$$a' = v_1 = \omega b\ ,\ b' = -\ v_2 = -\ \omega a.$$

Умножив первое уравнение на *a,* а второе на *b*, получим $aa' + bb' = 0$. Заметив, что полученное в левой части выражение есть не что иное, как $(\frac{a^2+b^2}{2})'$, приходим к равенству $a^2 + b^2 = \kappa$. Для определения константы κ положим угол между векторами $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$ равным 0°. Тогда $a = 0$, $b = c$, т.е. $\kappa = c^2$. Отсюда и получаем, что $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство, разумеется, затейливое, но здесь важнее сам факт нетрадиционного получения теоремы Пифагора. Добавлю, что ключевое равенство $aa' + bb' = 0$ можно получить и в другом варианте аналогичного по духу доказательства, рассмотрев движение отрезка фиксированной длины, такое, что его концы находятся на двух взаимно перпендикулярных прямых.

Такое использование векторной техники известно и в теории, когда производная трактуется как скорость. Исходя из свойств вращательного движения моментально получаются свойства тригонометрических функций, включая формулы для их дифференцирования.

Мы видим очередной раз, что «механика есть рай математических наук», как говорил Леонардо да Винчи. Приведённые выше два решения дал именно преподаватель механики Б. Сотниченко после того, как я обратил его внимание на возможность использования кинематики для решения задач из элементарной геометрии.

Используя эту технику можно получить и новые результаты в традиционной элементарной геометрии. Так, удалось получить новые свойства прямой Симсона и формулы Эйлера (для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей) не только для треугольника, но и для других многоугольников, одновременно вписанных и описанных - их иногда называют многоугольниками Понселе. (Квант, N5, 2002; Квант, N1, 2005).

Обозначив через δ отношение расстояния между центрами к радиусу описанной окружности и через ρ - отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности, получаем такие формулы:

для треугольника - $\rho = 0{,}5\,(1-\delta^2)$ (первоначально полученная формула Эйлера);

для четырёхугольника - $\frac{\rho^2}{(1-\delta)^2} + \frac{\rho^2}{(1+\delta)^2} = 1$ (известная формула, правда, в другом виде);

для пятиугольника - $\rho\sqrt{\frac{1+\delta-\rho}{2}} + \frac{1+\delta}{1-\delta}(1-\delta+\rho)\sqrt{\frac{1-\delta-\rho}{2}} = \rho$; для шестиугольника - $\sqrt{1-\frac{\rho^2}{(1-\delta)^2}} + \sqrt{1-\frac{\rho^2}{(1+\delta)^2}} = 1$.

Попутно получаются такие неочевидные результаты (при фиксированных вписанной и описанной окружности):

1. для любого многоугольника Понселе остаётся постоянной векторная сумма радиус-векторов, проведённых из центра вписанной окружности в точки касания этой окружности и многоугольника.
2. для любого такого треугольника не меняется сумма косинусов его углов: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \rho + 1$ (результат известен).
3. для любого четырёхугольника Понселе не меняется произведение синусов его углов: $\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,\sin\varepsilon = (\frac{1-\delta^2}{1+\delta^2})^2$.

Эту методику естественно обогатить моделированием кинематических процессов на компьютере (программа Geometer`s Sketchpad) . При изучении поведения прямой Симсона, удалось увидеть нечто неожиданное - эта прямая может выходить за пределы исходной окружности (Квант, N1, 2005).