Чётность

17 октября 2019

Я делаю из мухи слона, но муха должна быть настоящей.
Фазиль Искандер

1) Представьте каждое из чисел 1101 и -1101 в виде

А) $2n+1$; Б) $2n-1$; В) $2n+333$.

2) Произведение любых двух нечётных чисел нечётно, а сумма любых двух чётных чисел – чётна. Докажите это.

3) Докажите, что если сумма двух целых чисел нечётна, то произведение этих чисел чётно.

4) Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могли ли получить число

$$110\,618\,110\,145\,210\,181\,543?$$

5) Тридцать лет тому назад в ходу были купюры достоинством $1, 3, 5, 10$ и 25 рублей. Докажите, что если 25 рублей разменяли десятью такими купюрами, то хотя бы одна из этих десяти купюр – десятка.

6) ТА пишет на доску одно целое число, а ПД – другое. Если произведение чётно, то победителем объявляют ТА, если нечётно, то ПД. Может ли кто-то из них играть так, чтобы непременно выиграть?

7) По кругу зацеплены 9 шестеренок: первая со второй, вторая с третьей, и т.д. Могут ли они одновременно вращаться?

8) На рисунке прямая пересекает все стороны шестиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны 11-угольника, не проходя ни через одну его вершину?

9) 100 фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить фишки в обратном порядке?

10) В роте 100 человек. Каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через некоторое время каждый единожды подежурил с каждым?

11) Николай с сыном и Пётр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр – втрое больше, чем его сын. Всего поймали 25 рыб. Сколько поймал Николай?

12) В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки " $+$ " и " $-$ " так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

13) Можно ли стереть одно из данных 1992 или 1993 целых чисел так, чтобы сумма оставшихся чисел была четна?

14) Можно ли натуральные числа $1, 2, \ldots, 21$ разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел этой группы?

15) Даны шесть чисел: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Разрешено к любым двум числам прибавить по единице. Можно ли сделать все числа равными?

16) На 99 карточках пишут числа $1, 2, \ldots, 99$, перемешивают их, раскладывают чистыми сторонами вверх и снова пишут числа $1, 2, \ldots, 99$. Для каждой карточки складывают два ее числа и 99 полученных сумм перемножают. Докажите, что результат четен.

17) На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

18) На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Запрещено возвращать короля на поле, где он только что был. Выигрывает тот игрок, кто поставит короля на поле, где король когда-то уже побывал. Кто из игроков может обеспечить себе победу при любой игре противника?