Рейтинг 4 – Теория графов

Вводное ДЗ №1

1) Между городами Таинственной страны есть следующие авиарейсы:

А − К, М − Т, М − Я, А − Б, Я − Т, А − С, Б − С, М − Ш, Ш − Т, Я − Ф, Ф − Г, К − З

(каждый рейс в обе стороны).

   А) Можно ли из А перелететь в Я?

   Б) Сколько в стране городов (включая М), в которые можно попасть из М не более чем с одной пересадкой?

2) В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит

   А) 4 дороги; Б) 3 дороги.

   Сколько всего дорог в государстве?

3) Существует ли 8-вершинный граф, степени вершин которого равны

   А) $8, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1$;

   Б) $7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1$;

   В) $7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1$;

   Г) $7, 6, 4, 3, 4, 4, 1, 2$?

4) В стране Цифра есть 9 городов с названиями: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только том случае, если двухзначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

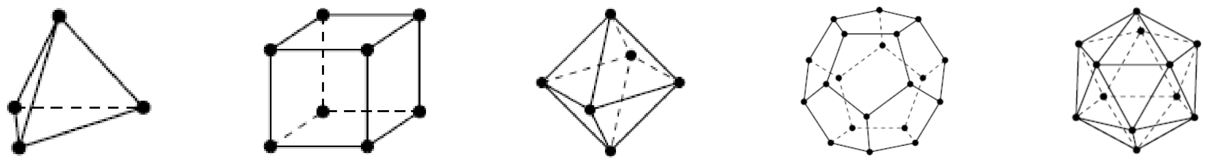
ДЗ №2

1) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 5 другими?

2) Частный бельгийский сыщик Эркюль Пуаро расследует убийство зубного врача. Он знает, что только 6 человек входили в кабинет в тот злосчастный вечер. Пуаро задает всем подозреваемым один и тот же вопрос: «С кем из остальных подозреваемых Вы говорили в вечер убийства?» На вопрос инспектора Джеппа, как продвигается дело, Пуаро заметил, что все подозреваемые разговаривали с разным количеством людей и именно поэтому кто-то из них врет. Почему он так решил?

3) Можно ли нарисовать замкнутую ломаную, имеющую 2015 вершин, которая пересекает каждое свое ребро ровно 7 раз?

4) Муравей Силантий решил проползти по всем ребрам тетраэдра, причем так, чтобы каждое ребро пройти ровно 1 раз. Удастся ли ему это? А если он проползет по остальным правильным многогранникам?



Тетраэдр Гексаэдр, или Куб Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр

5) В стране 101 город, причем из каждого города ведет дорога хотя бы в 51 другой город. Докажите, что из столицы ABC можно добраться в центр отдаленной провинции XYZ.

6) В небольшой роще находится заяц. Выскочив из норы и бегая от дерева к дереву, он оставил следы и, наконец, спрятался под деревом. Опытный охотник определил, что между каждыми двумя деревьями заяц пробегал не более раза. Под каким деревом находится нора зайца, и где сейчас он спрятался?

7*) В некотором городе есть метро, каждая ветка которого есть прямая. В месте пересечения любых двух станций есть станция пересадки. Некий турист приехал в этот город и хочет посетить все станции пересадки (причем для экономии времени каждую ровно один раз). Известно, что из любой станции можно доехать до любой, а также, что на каждой линии есть четное число станций пересадок. Удастся ли туристу осуществить свою мечту?

Двойное ДЗ

1) Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист:
   А) не с него начал и не нем закончил;
   Б) с него начал, но не на нем закончил;
   В) с него начал и на нем закончил.
2) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? Если нельзя, то какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?
3) На острове располагаются две страны A и B, в них суммарно 100 городов. Между каждыми двумя городами есть одна авиалиния. Рейсы в пределах одной страны называются внутренними, остальные – международными. При каком количестве городов в стране A международных рейсов на острове больше, чем внутренних?
4) Каждый из участников олимпиады решил различное число задач, и каждая из задач была решена различным числом участников. Докажите, что существует школьник, решивший ровно одну задачу.
5) Когда-то в Санкт-Петербурге было всего 12 станций метро, между которыми было построено 56 перегонов. Можно ли было добраться от одной станции до любой другой, не выходя на поверхность?
6) Можно ли разделить круг на 17 частей так, чтобы каждая граничила ровно с 3 другими?
7) В одном городе есть несколько (более одного) автобусных маршрутов. При этом:
   - на каждом маршруте ровно 3 остановки;
   - с каждого маршрута на каждый можно пересесть, и при том только на одной остановке;
   - с каждой остановки на каждую можно проехать без пересадки, и при том только одним маршрутом.

   Сколько автобусных маршрутов в этом городе?
8) Имеются две страны: *Обычная* и *Зазеркалье*. У каждого города в *Обычной* стране есть «двойник» в *Зазеркалье*, и наоборот. Однако если в *Обычной* стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в *Зазеркалье* эти города не соединены, а каждые два несоединенных в *Обычной* стране города обязательно соединены железной дорогой в *Зазеркалье*. В *Обычной* стране девочка Алиса не может проехать из города A в город B, сделав менее двух пересадок. Докажите, что Алиса в *Зазеркалье* сможет проехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

ДЗ №4

1) В шахматном турнире по круговой системе участвуют 7 школьников. Известно, что Ваня сыграл 6 партий, Толя – 5, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя – одну. С кем сыграл Леша?
2) Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
3) На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых. Точки пересечения прямых будем называть узлами, а отрезки прямых, соединяющие два соседних узла – звеньями.
   А) Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы в каждом узле сходилось не более трех звеньев?
   Б) Какое наибольшее число звеньев надо стереть, чтобы из любого узла можно было добраться до любого другого?
4) В MI6 работают n агентов – $001, 002, \ldots, 007, \ldots, n$. Первый агент следит за тем, кто следит за вторым, второй – за тем, кто следит за третьим, и т.д., n-й – за тем, кто следит за первым. Докажите, что n – нечетное число.

5*) Допустим, в графе $2n$ нечетных вершин, где $n \in \mathbb{N}$. Теперь мы знаем, что при $n > 1$ одним росчерком его не нарисовать. А какое минимальное число раз придется оторвать ручку от бумаги?
Примечание: страшная запись $n \in \mathbb{N}$ означает, что число n принадлежит ($\in$) множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.

ДЗ №5

1) В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
2) Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?
3) В дереве есть 10 вершин степени 3, 15 вершин степени 4, а все остальные вершины – висячие. Сколько их?
4) В лесе n вершин и k компонент связности. А сколько ребер?
5) По сторонам клеток шахматной доски выложены спички длиной в одну клетку каждая. Какое наименьшее количество спичек надо убрать, чтобы ладья могла пройти из любой клетки в любую другую?
6) Каждый из участников олимпиады решил различное число задач, и каждая из задач была решена различным числом участников. Докажите, что существует школьник, решивший ровно одну задачу.

Рейтинг 4, продолжение – А вы бы поступили в ФТШ еще раз?

Вступительная олимпиада ОДО в 8 класс, 2016 год

1) Найдите значение выражения:
$$(8 + 222 \cdot 444 \cdot 888 + 444 \cdot 888 \cdot 1776)/(2 \cdot 4 \cdot 8 + 444 \cdot 888 \cdot 1776 + 888 \cdot 1776 \cdot 3552).$$
2) Гоша покупал в магазине один килограмм сыра и хлеб. Он не заметил, что цена сыра указана за 100 граммов, и посчитал, что должен заплатить 84 рубля. Но на кассе с него взяли 471 рубль. Сколько стоит килограмм сыра и хлеб по отдельности?
3) В автобусе ехало меньше 100 человек, причем сидящих пассажиров было вдвое больше числа стоящих. На остановке 4% пассажиров вышло. Сколько пассажиров осталось в автобусе?
4) Сергей Юрьевич выписал на доске все 5-значные числа, из которых вычеркиванием одной цифры можно получить число 1111, а Евгений Николаевич – все числа для числа 1234. У кого из них получилось больше чисел?

Вступительная олимпиада ОДО в 8 класс, 2013 год

1) Лилипуты и минипуты живут на земле, имеющей форму прямоугольника, и вечно враждуют из-за своих границ. Как проложить границу внутри прямоугольника так, чтобы она делила прямоугольник на 2 равных (во избежание войны!) семиугольника?
2) В ΔABC проведены биссектрисы AP и CN, которые пересекаются в точке H. Найдите $\angle AHC$, если $\angle ABC = 80°$ и $\angle BAC = 30°$.
3) Какая цифра в ряду чисел 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ... 2013 стоит на 2013-ом месте?
4) У Пети есть числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Он сделал с ними следующие действия: а) выбрал четыре числа; б) прибавил к каждому выбранному числу по 1; в) перемножил полученные результаты; г) отнял единицу от полученного произведения; д) поделил результат на 16 и получил в итоге натуральное число. Какие числа мог получить Петя, если он не допускал арифметических ошибок?
5) Известно, что $(a - b + 2013), (b - c + 2013), (c - a + 2013) -$ три последовательных целых числа. Найдите эти числа.
6) Одна тетрадь, 3 блокнота и 2 ручки стоят 98 рублей, а три тетради и блокнот – на 36 рублей дешевле 5 ручек. Сколько стоит каждый из предметов, если тетрадь стоит четное число рублей? (Каждый из предметов стоит целое число рублей.)

Вступительная олимпиада ОДО в какой-то класс, 2018 год

1) Два парома отходят от противоположных берегов реки и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?
2) Нарисуйте 8 точек и соедините их отрезками так, чтобы отрезки не пересекались, и каждая точка принадлежала ровно четырем отрезкам.

3) Дан четырехугольник $ABCD$. На стороне BC выбрана точка E так, что треугольники ABE и ECD – равнобедренные с основаниями AE и ED соответственно, а угол AED – прямой. BF – биссектриса угла ABC – пересекает AD в точке F. Докажите, что FC – биссектриса угла BCD.

4) В комнате 12 человек. Некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные всегда лгут. «Здесь нет ни одного честного человека», – сказал первый. «Здесь не более одного честного человека», – сказал второй. Третий сказал, что честных – не более двух, четвертый – что не более трех и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных в этой комнате не более одиннадцати. Сколько честных людей в этой комнате на самом деле?

5) 4 коровы черной масти и 3 коровы рыжей масти за 5 дней дали такое же количество молока, что и 3 коровы черной масти и 5 коров рыжей масти за 4 дня. Какая корова дает в день молока больше – черная или рыжая?

Рейтинг 4, окончание

Каниикулы!

1) На острове $2/3$ всех мужчин женаты и $3/5$ всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

2) Найдите наименьшее натуральное n такое, что все 73 дроби
$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \dots, \frac{91}{n+93}$$
были несократимы.

3) Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

4) Найдите количество прямоугольников, составленных из клеток шахматной доски, которые содержат поле c4. (Одна клетка – это тоже прямоугольник.)

5) В международном лагере четное количество участников (большее двух). Каждый владеет определенным набором языков. Известно, что любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Докажите, что участников можно разбить на пары, в каждой из которых найдется общий язык.

6) Решите судоку на рисунке справа. Правила этой японской головоломки очень просты: вам нужно расставить в пустые клетки цифры 1, 2, ..., 9 так, что в каждых строке, столбце и квадрате 3×3 все 9 цифр были различными.

8		2	9					7
	6	1				9		4
			2					
4					6	7		
	5		7		4		9	
		6	1					8
					3			
5		7				3	4	
3					9	8		5

7) У Синдбада в кошельке 11 внешне одинаковых динаров, среди которых, возможно, один фальшивый, отличающийся от настоящего по весу, но неизвестно в какую сторону. Как ему расплатиться с торговцем восемью настоящими динарами, если торговец разрешил два раза воспользоваться его чашечными весами, но без гирь?