МножесДва

1) В одной группе ЦОДа все любят бегать, прыгать и плавать. 60% детей любят бегать, 60% детей любят прыгать, 40% детей любят плавать. Какой процент учеников любят все три занятия?

2) По данным опроса, проведённого в 9Б классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Андрею с Егором не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 9Б, если известно, что их больше 20, но меньше 30?

3) Первую или вторую контрольные работы по математике успешно написали 33 студента, первую или третью – 31 студент, вторую или третью – 32 студента. Не менее двух контрольных работ выполнили 20 студентов. Сколько студентов успешно решили только одну контрольную работу?

4) В каждой комнате особняка стояли букеты цветов. Всего было 30 букетов роз, 20 – гвоздик и 10 – хризантем, причём в каждой комнате стоял хотя бы один букет. Известно, что ровно в двух комнатах стояли одновременно хризантемы и гвоздики; ровно в трёх комнатах – хризантемы и розы; и ровно в четырёх комнатах – и гвоздики, и розы. Могло ли в особняке быть 55 комнат?

5) Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ и $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

6) Саша зачеркнул на 25-й странице учебника все слова, в которых нет буквы «А», потом он зачеркнул все слова, в которых нет буквы «Б», а потом он нашёл все слова, где есть и буква «О», и буква «А», и тоже зачеркнул их. Костя на той же странице своего учебника зачеркнул слова, где нет «Б», но есть «А» или «О» (возможно, обе сразу), и после этого он зачеркнул все слова, где нет ни буквы «А», ни буквы «О». Могло ли у Саши остаться не зачёркнутыми больше слов, чем у Кости?

7) В олимпиаде по математике для абитуриентов приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек. По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека. Сколько человек решили задачи по геометрии и тригонометрии, но **не** решили задачу по алгебре?

8) Каких подмножеств больше у 100-элементного множества: мощности 57 или мощности 43?

9) Многие математики не признают и категорически отказываются использовать операцию вычитания множеств, так как её можно выразить через объединение, пересечение и дополнение. Как?

10*) Докажите (геометрически) равномощность
 А) отрезка длины a отрезку длины b;
 Б) интервала длины a (отрезка без концов) прямой l.

11) Докажите, что множество, содержащее все бесконечные последовательности из нулей и единиц (обозначим его $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$) несчетно.

12) Счётно ли:
 А) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
 Б) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

13) В тридевятом царстве любое множество подданных образует тайное общество. Однажды каждый подданный донёс ровно на одно тайное общество. Докажите, что есть «супертайное» общество – такое, на которое никто не донёс.

Примечание: *возможно, население государства бесконечно!*

14) Обозначим P_A множество всех подмножеств множества A.
 А) Найдите $|P_A|$, если $|A| = n$.
 Б) Докажите, что $|P_{\mathbb{N}}| > |\mathbb{N}|$.

15*) У Деда Мороза есть конфеты, пронумерованные натуральными числами. В 23:00 Дед Мороз положил под ёлку конфеты с номерами от 1 до 10. В 23:30 он положил конфеты от 11 до 30 и забрал конфету 1. В 23:45 положил конфеты от 31 до 70 и забрал конфету 2, и так далее (каждое очередное действие вдвое ближе к полуночи, кладётся вдвое больше конфет, забирается одна). Сколько конфет будет под ёлкой в полночь?