

# Продолжение геометрии

## Штурмуем геометрический Олимп

- 1) Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с вершиной  $A$ , угол при которой равен  $36^\circ$ . В нем провели биссектрису  $BK$ . Докажите, что  $BK = BC$ .
- 2) Могут ли две биссектрисы в треугольнике быть перпендикулярны?
- 3) Как разрезать произвольный треугольник на три части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник?
- 4) Дан остроугольный треугольник  $ABC$ , в котором проведены высота  $CH$  и медиана  $BK$ . Известно, что  $BK = CH$  и  $\angle HCB = \angle CBK$ . Докажите, что  $\triangle ABC$  – равносторонний.
- 5) В произвольном треугольнике расположите медиану, биссектрису и высоту, проведенные из одной вершины, в правильном порядке и докажите, что по-другому не получится.
- 6) Посчитайте сумму углов в вершинах произвольной пятиугольной звезды.

## Миссия не выполнена. Повторить?



- 1) В треугольнике  $ABC$   $AB > BC > AC$ . Найдите величины всех трех его углов, если известно, что треугольник равнобедренный, а один из углов равен  $110^\circ$ .
- 2) Два равных тупых угла имеют общую сторону, а другие две стороны перпендикулярны. Найдите величину тупого угла.
- 3) На стороне  $AD$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $AED$ . Найдите величину угла  $BEA$ .
- 4) Какое должно быть соотношение сторон листа бумаги, чтобы, если сложить его пополам, это соотношение сохранилось?
- 5) Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AC$ . Точки  $D$  и  $E$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$ ,  $AD = CE$ .  $DC$  пересекает  $AE$  в точке  $O$ . Докажите, что треугольник  $AOC$  равнобедренный.
- 6) Квадрат  $8 \times 8$  поделен на четыре квадрата, два из которых покрашены в черный цвет, а два в белый (квадраты одного цвета не имеют общей стороны). Сколько «внутренних» квадратов имеют равное количество черных и белых клеток?
- 7) В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  все стороны равны. Большая диагональ, проведенная из вершины  $A$ , параллельна стороне  $BC$ , а  $\angle BAD = \angle CDA$ . Сравните периметры пятиугольников  $ABDEF$  и  $ACDEF$ .
- 8) Футбольный мяч представляет собой многогранник с 32 гранями, 20 из которых – белые правильные шестиугольники, а 12 – черные правильные пятиугольники. Сколько вершин у такого многогранника?

## Двойное ДЗ 2.1

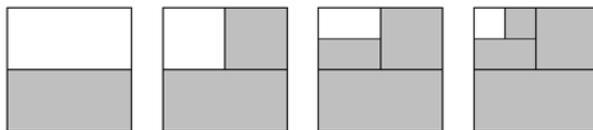
- 1) Точки  $M$  и  $N$  лежат на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ . Известно, что  $\angle ABM = \angle ACB$  и  $\angle CBN = \angle BAC$ . Докажите, что треугольник  $BMN$  равнобедренный.
- 2) Треугольник  $ABC$  равнобедренный ( $AB = BC$ ). Отрезок  $AM$  делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями  $AB$  и  $MC$ . Найдите угол  $B$ .
- 3) Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 4) В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BK$ . Известно, что  $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$ . Найдите  $\angle A - \angle C$ .
- 5) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на гипотенузе  $AB$  взяты точки  $K$  и  $M$ , причем  $AK = AC$  и  $BM = BC$ . Найдите угол  $MCK$ .
- 6) На плоскости отметили пять точек  $A, B, C, D, E$ , никакие три из которых не лежат на одной прямой. Их соединили отрезками:  $AC, CE, EB, BD, DA$ . В результате получилась пятиконечная звезда. Докажите, что  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$ .
- 7) В треугольнике  $ABC$   $\angle B = 20^\circ$ ,  $\angle C = 40^\circ$ . Биссектриса  $AD$  равна 2. Найдите разность длин сторон  $BC$  и  $AB$ .
- 8) Барон Мюнхгаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярдного стола, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, пришел через некоторую точку три

раза в трех различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могло ли это быть правдой? (Отражение шара от борта происходит по закону «угол падения равен углу отражения»).

- 9) Дан квадрат  $ABCD$ . На стороне  $AD$  внутрь квадрата построен равносторонний треугольник  $ADE$ . Диагональ  $AC$  пересекает сторону  $ED$  этого треугольника в точке  $F$ . Докажите, что  $CE = CF$ .
- 10) Внутри квадрата отмечены 22 точки. Некоторые из них соединены с вершинами квадрата и между собой так, что квадрат разбился на треугольники. При этом все отмеченные точки оказались вершинами этих треугольников. Найти число треугольников.

### Миссия выполнена. Продолжить?

- 1) Найдите углы четырехугольника, если три из них равны между собой, а четвертый меньше их на  $40^\circ$ .
- 2) Квадрат со стороной 1 м закрашивают по частям так, как показано на рисунке справа. Чему будет равна закрашенная площадь после 100-го шага?



- 3) В остроугольном треугольнике  $ABC$ :  $AD \perp BC$ ,  $CF \perp AB$ ,  $AD$  пересекает  $CF$  в точке  $M$ . Докажите, что  $\angle ABM = \angle MCA$ .
- 4) На рисунке слева прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Найдите угол  $X$ .
- 5) Точки  $C$ ,  $E$  и  $D$  делят отрезок  $AB$  в отношениях  $1 : 2$ ,  $1 : 3$  и  $1 : 4$  соответственно. В каком отношении точка  $E$  делит отрезок  $CD$ ?

- 6) В квадрате  $ABCD$  на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно отложены точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  так, что  $AK = BL = CM = DN$ . Чем является получившийся четырехугольник  $KLMN$ ?
- 7) Как разрезать квадрат со стороной 4 см на прямоугольники с суммой периметров 25 см?

### Двойное ДЗ 2.2

**Теорема** (свойство средней линии треугольника): *средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*

- 1) В треугольнике провели три средние линии.
  - А) Докажите, что они разбивают его на четыре равных треугольника.
  - Б) Найдите периметр каждого из них, если периметр исходного треугольника равен 28.
- 2) Длины двух сторон треугольника равны  $a$  и  $b$ . Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр полученного четырехугольника.
- 3) Средняя линия, параллельная стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , равна половине стороны  $AB$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равнобедренный.
- 4) Точки  $M$  и  $N$  расположены соответственно на сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , причем  $BM = 3AM$  и  $CN = 3AN$ .
  - А) Докажите, что  $MN \parallel BC$ .
  - Б) Найдите  $MN$ , если  $BC = 12$ .
- 5) Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
- 6) Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны. Докажите, что его диагонали перпендикулярны.
- 7) Докажите, что средняя линия трапеции (то есть отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон) параллельна ее основаниям и равна их полусумме.
- 8) Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности ее оснований.

### Игра по станциям

#### 1) Грибная

Свежие грибы на 99% состоят из воды. Было собрано 10 кг грибов, потом грибы усохли, и в результате доля воды в них стала равна 98%. Сколько весят грибы теперь?

#### 2) Сказочная

На лесной поляне встретились трое: эльф, хоббит и гоблин. Эльфы всегда говорят правду, гоблины всегда лгут, а хоббит не может ни солгать, ни сказать правду два раза подряд. На поляне произошел следующий разговор:

Первый(остальным): Вы оба – не эльфы. А я – эльф.

Второй(остальным): Я не эльф. (Первому) И ты тоже.

Третий(остальным): Все что вы тут наговорили – вранье. Только я – эльф.

Кто есть кто?

### 3) Спортивная

Три бегуна стартовали по круговой дорожке одновременно с одного места и в одном направлении. Первый впервые обогнал второго через 10 минут, а второй впервые обогнал третьего через 15 минут. Через сколько минут после старта первый впервые обогнал третьего?

### 4) Круглая

Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 100 так, чтобы сумма любых трех последовательных делилась на 3?

### 5) Квадратная

В клетках квадрата  $3 \times 3$  расставлены числа так, что в любой строчке и столбце сумма равна 6, а в любом квадрате  $2 \times 2$  – 9. Какие числа стоят в квадрате?

### 6) Красочная

Все точки прямой покрашены в два цвета: белый и голубой. Докажите, что на ней обязательно найдутся три точки одного цвета, одна из которых лежит точно посередине между двумя другими.

### 7) Опять грибная

25 детей пошли в лес и каждый из них нашел либо 5, либо 7 грибов. Когда их сложили в общую корзину и пересчитали, в ней оказалось ровно 111 грибов. Докажите, что при подсчете произошла ошибка.

### 8) Неточно квадратная

Докажите, что число  $abcabc$  никогда не является точным квадратом.

### 9) Винни-Пуховая

Винни-Пух, Пятачок, кролик и ослик Иа-Иа пошли гулять к Шести Соснам, растущим вдоль прямой дорожки (в порядке возрастания номеров). Винни-Пух нашел, что от первой сосны до четвертой расстояние такое же, как от третьей до шестой. Кролик сказал, что третья сосна в три раза дальше от первой, чем вторая. Пятачок заметил, что от пятой сосны до четвертой вдвое дальше, чем до шестой. А Иа-Иа заявил, что расстояние от первой сосны до второй больше, чем расстояние от пятой до шестой, на половину длины его хвоста. Докажите, что кто-то из них ошибся.

### 10) Деревенская

На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова – либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: «Кого в вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?». Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос ровно 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и ровно 33 – что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше?

## МайБой

- 1) Раньше у школы проходили два автобусных маршрута. Автобусы маршрута №1 ходили каждые 10 минут, а маршрута №2 – каждые 15 минут. Теперь здесь проходит только маршрут №3, но общее количество автобусов за день такое же, как и раньше. Интервалы между рейсами весь день одинаковые. Чему они равны?
- 2) Клетки квадрата  $6 \times 6$  раскрасили в 9 цветов. Каждым цветом окрашены 4 клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям квадрата. Могут ли периметры всех этих прямоугольников быть различными?
- 3) Теперь в квадрате  $6 \times 6$  стерли все клетки выше главной диагонали, а в каждую клетку оставшейся «лесенки» записывают 1 или 0 так, что если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять 1. Сколькими способами это можно сделать? Пример расстановки показан на рисунке.
- 4) На сторонах  $AD$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $Q$  и  $P$  соответственно так, что  $\angle ABQ = 15^\circ$ ,  $\angle PQD = 30^\circ$ . Найдите  $\angle QBP$ .
- 5) У троих братьев – Антона, Бори и Васи – дни рождения совпадают. Оказалось, что, когда Антону исполнилось  $N$  лет, сумма возрастов его братьев делилась на  $N$  без остатка. Наблюдательный

1					
1	1				
1	1	1			
1	1	1	1		
1	1	1	0	0	
1	1	1	0	0	0

Боря заметил, что то же самое произойдет и когда ему исполнится  $N$  лет. Докажите, что так же будет и когда Васе исполнится  $N$  лет.

- б) Существуют ли таких три положительных различных числа, что первое равняется среднему арифметическому двух других, второе – сумме двух других, а третье – произведению двух других?

## Логическая игра «Пентагон»

### Пример: продукт питания

- 1) Название – анаграмма женского имени.
- 2) Бывает не только черная и красная.
- 3) Объединяет грибы, кабачки и рыбу.
- 4) Ее мечут.
- 5) Из нее выводятся головастики.

*Ответ: икра*

### I. Предмет

- 1) В 2000 году один австралиец его запатентовал.
- 2) Оно используются в аттракционах, связанных со зрением.
- 3) Иногда оно бывают у кресел.
- 4) Оно является основой водяных, но не ветряных мельниц.
- 5) У велосипеда их бывает 2, 3, изредка 4 штуки.

*Ответ: Колесо*

### II. Наука

- 1) Она зародилась в Древнем Египте около 2000 лет до нашей эры, то есть 4000 лет назад.
- 2) Это слово греческого происхождения, означает «землемерие».
- 3) В III веке до н.э. древнегреческий ученый Евклид написал книгу под названием «Начало», где подытожил накопленные к тому времени знания по этой области.
- 4) В замечательной книге «Диалектика природы» Ф. Энгельс определил ее как науку о пространственных формах окружающего нас реального мира, то есть как часть математики, изучающую свойства пространства.
- 5) Школьная математика делится на алгебру и нее.

*Ответ: Геометрия*

### III. Компьютерная программа

- 1) Автор и разработчик этой программы живет в России.
- 2) В нашей стране названием этой программы до сих пор в быту принято называть некий компьютер.
- 3) С этой программой связана одна из сцен в недавно вышедшем фильме «Пиксели».
- 4) На самом деле это игра, в которой заполненный экран является проигрышем.
- 5) В этой программе активно используются фигуры тетрамино, то есть фигурки из 4 клеточек.

*Ответ: Тетрис*

### IV. Мера длины

- 1) Это английская, а также старинная русская мера длины.
- 2) На голландском языке это слово обозначает «большой палец».
- 3) В настоящее время в них выражается размер различных компьютерных деталей, узлов и принадлежностей.
- 4) Длина этой меры равна 2,5 см.
- 5) Для этой героини Г. Х. Андерсена цветок был местом постоянной прописки.

*Ответ: Дюйм*

### V. Человек

- 1) Великий ученый Древнего мира родился в Сиракузах, греческой колонии на острове Сицилия.
- 2) Ему приписывают гордую фразу: «Дай мне, где стоять, и я сдвину Землю».
- 3) Он является изобретателем водоподъемного механизма, который явился прообразом корабельных, а также воздушных винтов.
- 4) Ему принадлежит формула для определения площади треугольника через три его стороны (неправильно именуемая формулой Герона).
- 5) Мы восклицаем: «Эврика!» – выражая, как и он, восторг по поводу своей удачи.

*Ответ: Архимед*

## **VI. Число**

- 1) Именно столько вечеров подряд Оле Лукойя посещал мальчика Яльмара в сказке Г. Х. Андерсена.
- 2) Данное число содержится в названии ресторана, расположенного в Останкинской телебашне. («Седьмое небо»).
- 3) Этим числом должен был бы называться один из дней недели, но не называется.
- 4) Это однозначное простое число.
- 5) Именно столько дней в неделе.

*Ответ: Число 7*

## **VII. Изобретение**

- 1) Это прибор для измерения, имеющийся в каждом доме.
- 2) Этот прибор незаменим в медицине.
- 3) Внутри этого прибора расположен спирт или один из металлов. Эти вещества расширяются или сжимаются и тогда показания этого прибора увеличиваются или уменьшаются.
- 4) Единица того, что измеряет этот прибор, неодинакова во всем мире. Большинство приборов рассчитано на измерение от точки замерзания воды до точки ее кипения. В США это измеряется по другой шкале.
- 5) Эмигрант, живший в США 7 лет, наконец, смог выбраться в отпуск в Россию, на свою родину. Его друзья, тоже эмигранты из России, попросили привезти его некий приборчик, так как никак не могли привыкнуть к показаниям его американского собрата. «Там же Фаренгейты!» – восклицали они.

*Ответ: термометр*

## **VIII. Литературный персонаж**

- 1) Он имел основательные практические знания английских законов, глубокие знания в области химии, уголовной хроники.
- 2) В честь этого литературного персонажа создавались журналы и даже целые организации назывались его именем.
- 3) Этот персонаж прекрасно играл на скрипке, был отличным боксером, а его автор играл на валторне.
- 4) Улица, на которой он жил, называлась Бейкер-Стрит.
- 5) Профессор Мориарти был его самым коварным и опасным противником.

*Ответ: Шерлок Холмс*

## **IX. Фигура**

- 1) Эту простейшую геометрическую фигуру математики называют двумерным «симплексом». (Симплекса по-латыни означает «простейший».)
- 2) В силу своей простоты он явился основой многих измерений. Землемеры при вычислениях площадей, земельных участков, астрономы при нахождении расстояний до планет и звезд используют свойства этой фигуры.
- 3) Изучением свойств этой фигуры активно занимались в Древнем Египте, при строении пирамид, которые служили гробницами для фараонов.
- 4) Пифагор доказал теорему о соотношении длин сторон частного случая этой фигуры.
- 5) Он бывает прямоугольный, равнобедренный, равносторонний.

*Ответ: Треугольник*

## **X. Сюрприз**

- 1) Это всемирно известное здание, о котором доподлинно почти ничего не известно.
- 2) Это здание известно не из-за одномерной или трехмерной характеристик, а из-за двумерной.
- 3) Это здание является штаб-квартирой министерства обороны одного из крупнейших государств мира.
- 4) Название этого здания переводится как «пятиугольник».
- 5) У игры, в которую мы сейчас играем, точно такое же название.

*Ответ: Пентагон*