

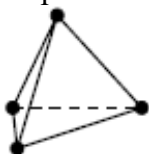
# Графы

## Знакомство. КР №1

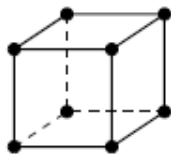
- 1) Между городами Таинственной страны есть следующие авиарейсы:  
А – К, М – Т, М – Я, А – Б, Я – Т, А – С, Б – С, М – Ш, Ш – Т, Я – Ф, Ф – Г, К – З  
(каждый рейс в обе стороны).  
А) Можно ли из А перелететь в Я?  
Б) Сколько в стране городов (включая М), в которые можно попасть из М не более чем с одной пересадкой?
- 2) В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит  
А) 4 дороги;  
Б) 3 дороги.  
Сколько всего дорог в государстве?
- 3) Существует ли 8-вершинный граф, степени вершин которого равны  
А) 8, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1;  
Б) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1;  
В) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1;  
Г) 7, 6, 4, 3, 4, 4, 1, 2?
- 4) В стране Цифра есть 9 городов с названиями: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только том случае, если двухзначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

## ДЗ №1

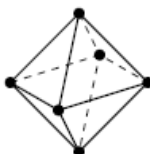
- 1) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 5 другими?
- 2) Частный бельгийский сыщик Эркюль Пуаро расследует убийство зубного врача. Он знает, что только 6 человек входили в кабинет в тот злосчастный вечер. Пуаро задает всем подозреваемым один и тот же вопрос: «С кем из остальных подозреваемых Вы говорили в вечер убийства?» На вопрос инспектора Джеппа, как продвигается дело, Пуаро заметил, что все подозреваемые разговаривали с разным количеством людей и именно поэтому кто-то из них врет. Почему он так решил?
- 3) Можно ли нарисовать замкнутую ломаную, имеющую 2015 вершин, которая пересекает каждое свое ребро ровно 7 раз?
- 4) Муравей Силантий решил проползти по всем ребрам тетраэдра, причем так, чтобы каждое ребро пройти ровно 1 раз. Удастся ли ему это? А если он проползет по остальным правильным многогранникам?



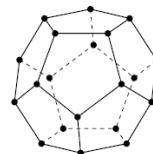
Тетраэдр



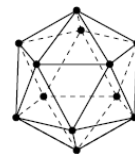
Гексаэдр, или Куб



Октаэдр

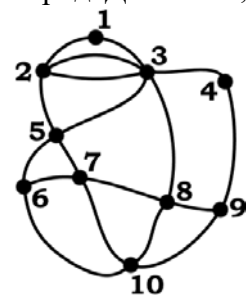


Додекаэдр



Икосаэдр

- 5) В стране 101 город, причем из каждого города ведет дорога хотя бы в 51 другой город. Докажите, что из столицы *ABC* можно добраться в центр отдаленной провинции *XYZ*.
- 6) В небольшой роще находится заяц. Выскочив из норы и бегая от дерева к дереву, он оставил следы и, наконец, спрятался под деревом. Опытный охотник определил, что между каждыми двумя деревьями заяц пробежал не более раза. Под каким деревом находится нора зайца, и где сейчас он спрятался?
- 7\*) В некотором городе есть метро, каждая ветка которого есть прямая. В месте пересечения любых двух станций есть станция пересадки. Некий турист приехал в этот город и хочет посетить все станции пересадки (причем для экономии времени каждую ровно один раз). Известно, что из любой станции можно доехать до любой, а также, что



на каждой линии есть четное число станций пересадок. Удастся ли туристу осуществить свою мечту?

### КР №2

- 5) В каждой строчке и каждом столбце доски  $8 \times 8$  стоит по две фишки. Докажите, что их можно раскрасить в два цвета так, чтобы в каждом столбце и в каждой строчке фишки были раскрашены в разные цвета.
- 6) На острове располагаются две страны  $A$  и  $B$ , в них суммарно 100 городов. Между каждыми двумя городами есть одна авиалиния. Рейсы в пределах одной страны называются внутренними, остальные – международными. При каком количестве городов в стране  $A$  международных рейсов на острове больше, чем внутренних?

### ДЗ №2

- 8) Можно ли нарисовать на плоскости 2015 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с 7 другими? Замечание: концы отрезков не являются точками пересечения.
- 9) Допустим, в графе  $2n$  нечетных вершин,  $n \in \mathbb{N}$ . Теперь мы знаем, что при  $n > 1$  одним росчерком его не нарисовать. А какое минимальное число раз придется оторвать ручку от бумаги?
- 10) Каждый из участников олимпиады решил различное число задач, и каждая из задач была решена различным числом участников. Докажите, что существует школьник, решивший ровно одну задачу.
- 11) В одном городе есть несколько (более одного) автобусных маршрутов. При этом:
  - А) на каждом маршруте ровно 3 остановки;
  - Б) с каждого маршрута на каждый можно пересесть, и при том только на одной остановке;
  - В) с каждой остановки на каждую можно проехать без пересадки, и при том только одним маршрутом.

Сколько автобусных маршрутов в этом городе?

- 12) Собрались однажды Удав, Мартышка, Попугай и Слононок и решили измерить длину Удава. Встали они друг за другом по одному. По секрету скажу, что Мартышка всегда лжет, Удав говорит правду, Попугай просто повторяет последний услышанный ответ (а если его спросить первым, ответит как попало), а Слононок дает честный ответ, но на предыдущий заданный ему вопрос (а на первый вопрос отвечает как попало). Проходил мимо них Ежик в тумане и решил выяснить, в каком порядке они стоят (разглядеть их он не смог – он ведь в тумане!). Спросив всех по очереди: «Ты Мартышка?», он понял лишь только, где находится Слононок. Спросив всех в том же порядке: «Ты Слононок?», у него получилось еще понять, где Мартышка, но полной ясности так и не наступило. И лишь после того как на вопрос «Ты Попугай?» первый ответил «Да», Ежу, наконец, стало ясно, в каком порядке стояли животные. Так в каком же?  
*Примечание:* «как попало» означает, что один из ответов «Да» или «Нет» выбирается произвольно.

### Графы везде и всюду. Или почти везде.

- 1) Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.
- 2) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими.
- 3) В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
- 4) Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист:
  - А) не с него начал и не на нем закончил;
  - Б) с него начал, но не на нем закончил;
  - В) с него начал и на нем закончил.
- 5) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см? Если нельзя, то какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы все же изготовить требуемый каркас?