Текстовые задачи

Ваш подарок на Новый Год ☺

1) Сократите дроби:
   А) $\frac{2x-3x^2}{3x^2+7x-6}$; Б) $\frac{b^2-a^2}{a^2b+2b-ab^2-2a}$; В) $\frac{5^{n+1}-5^{n-1}}{2\cdot 5^n}$.
2) Докажите, что утверждение верно для любого натурального n:
   А) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n-1)}{2}$; Б) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
   В) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3) На плоскости отмечены точки A и B. Найдите геометрическое место точек M таких, что A, B и M образуют равнобедренный треугольник.
4) Дан прямоугольник $ABCD$, причем $AB=3BC$. На стороне CD отмечены точки E и F так, что $CE=EF=FD$. Докажите, что сумма углов $\angle ACD+\angle AED+\angle AFD$ равна 90°.
5) Сумма трех чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ также делится на 30.
6) Докажите, что $3^{3000}-1$ делится на 1001.
7) Постройте график функции:
   А) $|y|=y-|x|$; Б) $\frac{|y|}{y}=|x|$; В) $\frac{y}{|y|}=\frac{x}{|x|}$; Г) $y|y|=x|x|$;
   Д) $|y|=y+|x|$; Е) $y-|y|=x-|x|$; Ж) $y+|y|=x+|x|$.

«Закрытая» олимпиада АУ

1) Мальчик Саша нарисовал прямоугольник на клетчатом листе и внутри аккуратно вывел логотип ФТШ. Девочка Юля, увидев Сашин рисунок, для пущей красоты нарисовала вокруг прямоугольника рамку толщиной в одну клетку и с удивлением обнаружила, что общая площадь рисунка удвоилась. Какого размера был Сашин рисунок?
2) Решите в натуральных числах:
$$k+\cfrac{1}{l+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n}}}=\frac{20}{17}.$$
3) Докажите, что
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)\cdots\left(\frac{1}{fib(100)}+\frac{1}{fib(101)}\right)<1,$$
где $fib(n)$ означает n-ое число Фибоначчи.
4) Существует ли выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него такие, что $MA=AB$, $MB=BC$, $MC=CD$, $MD=DA$?
5) Четыре черненьких чумазеньких чертенка чертили черными чернилами чертеж четыре часа. Если бы первый чертенок чертил в 2 раза быстрее, а второй – вдвое медленнее, то им потребовалось бы столько же времени; если бы наоборот, первый чертил вдвое медленнее, а второй – вдвое быстрее, то они управились бы за 2 часа 40 минут. За какое время начертили бы чертеж три чертенка без помощи четвертого?
6) В одной далекой стране на острове расположено 1000 островов, в каждом из которых 99 жителей. Все жители этой страны – либо рыцари, либо лжецы. Однажды был проведен соцопрос, во время которого каждого жителя спросили: «Кого в вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?» После обработки результатов обнаружилось, что в каждой деревне было получено 66 ответов, что больше рыцарей, и 33, что больше лжецов. В скольких деревнях проживает больше рыцарей, если известно, что всего их на острове 54054?

~~Отличная~~ Классная работа!

1) Найти наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $14/25$ и $21/40$ получаются натуральные числа.
2) Пусть $A_a=[a; 2a-1]$, где a – любое вещественное число. При каких значениях параметра a множество $A_a\cap A_{2a-2}$ содержит число 6?
3) В треугольнике две медианы перпендикулярны и равны 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

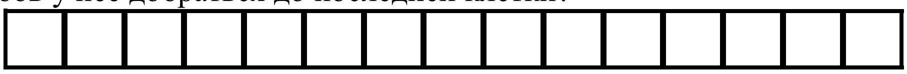
4) Каждый год папа Карло своему любимцу Буратино в честь его дня рождения выдает арифметические карманные деньги. Их сумма определяется по незыблемым законам и, считая в центах, равна произведению возраста самого Буратино и его славного попечителя папы Карло. В этом году Буратино получил 7,81 Лт. Какую сумму Буратино получил в прошлом году?

5) В Академическом университете каждый год проводится открытый футбольный турнир. В этом году Василий Павлович за победу давал 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение 0 очков. В прошлом году Василий Павлович присуждал за победу всего лишь 2 очка, ничья и поражение оценивались так же. Могло ли так случиться, что команда, занявшая в этом году первое место, при использовании в этом году прошлогодней системы подсчета очков, оказалась бы последней?

6) Докажите, что значение выражения
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2017}\right)$$
меньше $1/1000$.

7) Можно ли сделать больше, чем 10, сумму дробей $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$?

8) Ладья-бадья стоит в начале полоски и за один ход ходит вправо на любое количество клеток. Сколько способов у нее добраться до последней клетки?



9) В 5 мешках находятся монеты, при этом в одном мешке фальшивые, весящие 9 грамм, а в четырех остальных настоящие, весящие 10 грамм. За одно взвешивание на весах со стрелкой определите, в каком из мешков фальшивые монеты.

10) Решите систему уравнений: $\begin{cases}\frac{x^2+1}{2}=y\\ \frac{y^2+1}{2}=z.\\ \frac{z^2+1}{2}=x\end{cases}$

11) Числитель и знаменатель дроби – положительные числа. Числитель увеличили на 1, знаменатель на 2. Увеличилась или уменьшилась дробь при этом?

Комбинаторные воспоминания…

Красота тесно связана с симметрией…*(Г. Вейль)*
… но мы займемся комбинаторикой! *(А. Ю. Наумов)*

1) Сколько всего можно составить четырехзначных чисел, начинающихся с цифры 3 и состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, в записи которых все цифры, кроме цифры 3, встречаются по одному разу, а цифра 3 – не более двух раз?

2) Сколько различных чисел можно составить, переставляя цифры числа 121232?

3) Сколько встречается трехзначных чисел, в записи которых цифры 2, 3 и 4 встречаются по одному разу?

4) Сколько встречается различных четных чисел, в записи которых цифры 3, 4, 5 и 6 используются по одному разу?

5) В автомашине 6 мест. Сколькими способами шесть человек могут сесть в эту машину, если занять место водителя могут только двое из них?

6) В парке 10 различных аттракционов. Сколько существует способов выбрать 4 различных аттракциона?

7) У мамы 3 яблока и 4 груши. В течение недели она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами она может это сделать?

8) У Тани есть 3 разноцветные ручки, 6 разноцветных фломастеров и 4 разноцветных карандаша. Сколькими способами можно составить набор из одной ручки, одного фломастера и одного карандаша?

9) Сколько существует вариантов раскраски всех клеток доски 1×9 в белый и черный цвета, если в каждом варианте должно быть в точности 8 клеток одного цвета? (Если один вариант раскраски доски с первой по девятую клетку совпадает с другим вариантом раскраски с девятой по первую клетку, то такие варианты считать различными.)

10) Сколько различных последовательностей из четырех фигур можно создать, имея достаточное количество одинаковых кругов, квадратов и трапеций?
11) Позывные радиостанции должны начинаться с буквы R. Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв (из 10 возможных), причем эти буквы могут повторяться?
12) Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W. Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из четырех букв (из 10 возможных), которые не повторяются?
13) Имеется 3 разноцветных мяча, 5 разноцветных кубиков и 4 разноцветные скакалки. Сколькими способами можно составить набор из двух мячей, двух кубиков и двух скакалок?
14) Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из четырех символов, если номер состоит из одной буквы латинского алфавита (всего 26), после которой идут три цифры, отличные от нуля?
15) Сколькими способами можно рассадить 12 рыцарей за круглым столом? (Два способа считать одинаковыми, если один из другого получается поворотом стола.)
16) На детской карусели есть 10 одинаковых посадочных мест, расположенных по кругу. Покататься на карусели пришли 9 детей. Сколькими способами их может рассадить контролер? Два способа считать одинаковыми, если один получается из другого поворотом карусели.
17) У людоеда в подвале 10 пленников. Сколькими способами он может выбрать трех из них соответственно себе на завтрак, обед и ужин?
18) В классе 25 учеников. Найдите количество способов выбрать из них 2 – х дежурных.
19) Имеется 6 различных книг, 5 различных журналов и 4 различных блокнота. Сколькими способами можно получить набор из трех книг, одного журнала и двух блокнотов?
20) В шкафу лежат вперемешку разные носки – 3 серых и 4 синих. Сколькими способами можно достать 2 разноцветных носка?
21) Для участия в фотовыставке было отобрано 32 фотографии. На стендах можно разместить только 30 фотографий. Сколько существует различных вариантов размещения 30 фотографий на стендах?
22) Сколькими способами можно выбрать 3 пирожных из 17 различных?
23) После уроков 6 школьников собрались играть в футбол. Сколькими способами они могут разделиться на две равные по числу игроков команды?
24) В каждый угол прямоугольного потолка комнаты нужно повесить по шарику. Сколькими способами это можно сделать, если имеется 8 разноцветных шариков?
25) В одну коробку помещается 5 мячей, а в другую – 3. Сколькими способами можно разложить в эти коробки 8 из 9 различных мячей?
26) На кодовом замке 8 кнопок с цифрами от 0 до 7. Сколькими способами можно составить шифр из четырех цифр, если все они различны?
27) На полке стоят 27 CD-дисков и 15 DVD-дисков, причем 9 CD-дисков с музыкой, а остальные – с офисными программами. Сколькими способами можно выбрать 2 CD-диска с музыкой, 1 с офисными программами и 1 DVD-диск, если все диски различны?

Математическая регата – 2008
Туры 3 и 4

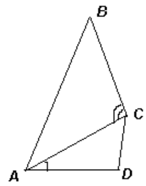
3.1. Несколько учеников отвечали на уроке, и каждый получил не ниже тройки. Аня получила отметку, которая на 10 меньше, чем сумма отметок остальных; Боря получил отметку, которая на 8 меньше, чем сумма отметок остальных; Вера – отметку, которая на 6 меньше, чем сумма отметок остальных. Сколько человек отвечало на уроке и какие отметки они получили?

3.2. В остроугольном треугольнике ABC: $\angle A = 30°$; BB_1 и CC_1 – высоты; B_2 и C_2 – середины сторон AC и AB соответственно. Под каким углом пресекаются прямые B_1C_2 и C_1B_2?

3.3. В школе прошел шахматный турнир, в котором участвовало 20 шахматистов (каждый сыграл с каждым один раз). После подведения итогов оказалось, что Толя с 9,5 очками занял 19-е место, ни с кем его не разделив. Единоличным же победителем оказался Витя. Определите, сколько очков набрал каждый участник. (В шахматах за победу присуждается одно очко, за поражение – 0 очков, за ничью – пол-очка.)

4.1. Сравните: $400^5 - 399^2(400^3 + 2\times400^2 + 3\times400 + 4)$ и 2000.

4.2. В четырехугольнике $ABCD$: $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$ (см. рис.). Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.



4.3. Коля выписал все трехзначные числа, в записи которых нет нулей. Для каждого такого числа Вася записал сумму двух его цифр: наименьшей и наибольшей. Найдите сумму цифр, записанных Васей.

Домашка–скромняшка ☺

1) a, b – различные двузначные числа, последние цифры которых совпадают. Известно, что неполное частное от деления a на 9 равно остатку от деления b на 9, а неполное частное от деления b на 9 равно остатку от деления a на 9. Найдите все такие пары.

2) Некоторые из клеток квадрата 5×5 окрашены в красный цвет, а остальные – в синий. Докажите, что можно найти 4 клетки, окрашенные одним цветом, которые находятся на пересечении двух строк и двух столбцов.

3) Докажите, что если сумма двух натуральных чисел делится на 770, то их произведение не делится на 770.

4) На плоскости даны 1982 точки и окружность радиуса 1. Докажите, что на этой окружности существует точка, сумма расстояний от которой до данных 1982 точек больше, чем 1982.

5) Кузнечик совершает прыжок длины 1, поворачивает на $90°$, совершает прыжок длины 2, поворачивает на $90°$, совершает прыжок длины 3, и т.д. Может ли он после 1982 прыжков оказаться в исходной точке?

6) На танцевальном вечере в школе ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, но каждая девочка танцевала по крайней мере с одним мальчиком. Докажите, что найдутся две такие пары M_1, D_1 и M_2, D_2, что мальчик M_1 танцевал с девочкой D_1 и M_2 – с D_2, но M_1 не танцевал с D_2, а M_2 не танцевал с D_1.

Классный текст

1) Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» Вожак стаи отвечает ему: «Нет, нас не сто гусей! Вот, если бы нас было столько, сколько есть, да еще столько, да еще полстолька, де еще четверть столька, да ты, гусь, с нами, вот тогда нас было бы сто гусей, а так...» Сколько же гусей было в стае?

2) В забеге от Воробьевых гор до Красной площади приняли участие три спортсмена. Сначала стартовал Гриша, затем – Саша, и последней – Лена. После финиша выяснилось, что во время забега Гриша обгонял других 10 раз, Лена – 6 раз, Саша – 4 раза, причем все трое ни разу не оказывались в одной точке одновременно. В каком порядке финишировали спортсмены, если известно, что они пришли к финишу в разное время?

3) На вопрос о возрасте его детей математик ответил: «У нас с женой трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребенок – 70 годам, а сейчас суммарный возраст детей – 14 лет.» Сколько лет каждому ребенку, если известно, что у всех членов семьи дни рождения в один и тот же день?

4) На столе белой стороной кверху лежали 100 карточек, у каждой из которых одна сторона белая, а другая черная. Костя перевернул 50 карточек, затем Таня перевернула 60 карточек, а после этого Оля – 70 карточек. В результате все 100 карточек оказались лежащими черной стороной вверх. Сколько карточек было перевернуто трижды?

5) В формулу линейной функции $y = kx + b$ вместо букв k и b впишите числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось 10 функций, графики которых проходят через одну и ту же точку.

6) Ваня пошел с папой в тир. Уговор был такой: Ване даются 10 патронов, и за каждое попадание в цель он получает еще три патрона. Ваня сделал 14 выстрелов и ровно в половине из них он попал в цель. Сколько патронов осталось у Вани?

7) Передние покрышки автомобиля «Антилопа Гну» выходят из строя через 25000 км, а задние – через 15000 км. Когда Остап Бендер должен поменять их местами, чтобы машина прошла максимальное расстояние? Чему равно это расстояние?

8) Одуванчик утром распускается, два дня цветет желтым, на третий день утром становится белым, а к вечеру облетает. Вчера днем на поляне было 20 желтых и 14 белых одуванчиков, а сегодня 15 желтых и 11 белых.

   А) Сколько желтых одуванчиков было на поляне позавчера?

   Б) Сколько белых одуванчиков будет на поляне завтра?

9) Дед Мороз раздал детям 47 шоколадок так, что каждая девочка получила на одну шоколадку больше, чем каждый мальчик. Затем дед Мороз раздал тем же детям 74 мармеладки так, что каждый мальчик получил на одну мармеладку больше, чем каждая девочка. Сколько всего было детей?

10) Когда в Братске полдень – в Гусеве 6 часов утра, а в Комсомольске-на-Амуре 14 часов. А когда в Златоусте полдень – в Елизово 18 часов, а в Гусеве 9 часов утра. Который час в Комсомольске-на-Амуре, когда в Елизово полдень?

11) Три пирата нашли клад, состоящий из 240 золотых слитков общей стоимостью 360 долларов. Стоимость каждого слитка известна и выражается целым числом долларов. Может ли оказаться так, что добычу нельзя разделить между пиратами поровну, не переплавляя слитки?

12) Банк «Империал» при снятии денег со счета берет комиссию, состоящую из двух частей: фиксированной оплаты за проведение операции и еще оплаты, пропорциональной снятой сумме. Например, при снятии со счета 5000 рублей вкладчик заплатит 110 рублей, а при снятии 11000 рублей заплатит 230 рублей. Какую комиссию заплатит вкладчик, если он захочет снять со счета 8000 рублей?

13) В турнире каждый шахматист половину всех очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько всего человек принимало участие в турнире?

14) По двум телевизионным каналам одновременно начали показывать один и тот же фильм. На первом канале фильм разбили на части по 20 минут каждая и вставили между ними двухминутные рекламные паузы. А на втором канале фильм разбили на части по 10 минут каждая и вставили между ними минутные рекламные паузы. На каком канале фильм закончится раньше?

15) Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но все же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

Текстовое ДЗ по текстовым задачам

1) Всадник скачет по прямой дороге в постоянном направлении с постоянной скоростью. В 10.00 он был в 20 км от моста, в 11.00 – в 6 км от моста, в 11.30 – в 19 км от моста. Какова его скорость?

2) Отцу и двум его сыновьям вместе 48 лет. Через 5 лет возраст отца будет в два раза больше суммы возрастов его сыновей, а Коле будет столько лет, сколько Юре сейчас. Сколько лет отцу, Коле и Юре?

3) Каждое из трех последовательных целых чисел уменьшили на 1. Их произведение после этого уменьшилось вдвое. Каким могло быть меньшее из этих трех чисел?

4) Дана дробь $1/999$. Требуется уменьшить ее знаменатель и увеличить числитель на одно и то же число M так, чтобы получившаяся дробь равнялась $2/3$. Найдите M.

5) Три команды участвовали в математической регате. Перед игрой игрок Иванов перешел из первой команды во вторую, игрок Петров – из второй команды в третью, а игрок Сидоров – из третьей команды в первую. После этого средний возраст первой команды увеличился на неделю, второй – увеличился на две недели, а третьей – уменьшился на 4 недели. Известно, что в первой и второй командах по 12 игроков. Сколько игроков в третьей команде?

Текстовые зОДОчи

1) Однажды Петя спускался вниз по движущемуся эскалатору, и оказалось, что на спуск он потратил 1 минуту. В другой раз Петя, увеличив собственную скорость в два раза, спустился за 45 секунд. За какое время Петя спустился в третий раз, стоя на том же эскалаторе неподвижно?

2) 5 человек сдавали экзамены в ФТШ по физике и математике. Все они набрали разное число баллов по физике и разное число баллов по математике (за каждый экзамен можно было получить целое число баллов от 0 до 10). К изумлению приемной комиссии, оказалось, что первое место по сумме баллов за два экзамена занял школьник, занявший третьи места по каждому из экзаменов. Могло ли такое быть?

3) На доске написано пятизначное число. За ход разрешается подсчитать сумму цифр данного числа, взять у этой суммы последнюю цифру и заменить любую из цифр данного пятизначного числа на эту цифру. Можно ли за несколько ходов из числа 13579 получить число 23456?

4) Для учебного заведения собирались купить руководства по алгебре (стоимостью 1 рубль 25 копеек) и по геометрии (стоимостью 1 рубль 15 копеек) на равные суммы денег. Поскольку собирались медленно, руководство по алгебре успело подорожать на рубль. На сколько подорожало руководство по геометрии, если теперь на прежнюю сумму денег удастся купить вдвое меньше учебников каждого вида?

5) Петров и Васечкин за один день могут либо напилить пять поленниц дров, либо наколоть восемь таких поленниц. Какое наибольшее (целое) количество поленниц они могут напилить, чтоб успеть их наколоть в тот же день?

6) Гена и Чебурашка несут по сумке с апельсинами. У Гены 10 апельсинов, а у Чебурашки в пять раз больше. Чебурашка устал, и Гена, переложив некоторое количество апельсинов себе, сделал сумку Чебурашки всего в 4 раза тяжелее своей. Сколько он переложил апельсинов?

7) В первый день пароход прошел 24 км против течения и 24 км по течению за 5 ч, а на следующий день 20 км против течения и 12 км по течению за 3,5 ч. Найдите собственную скорость парохода и скорость течения.

8) Вася, упражняясь в устном счете, написал на доске несколько различных натуральных чисел и поделил (в уме) их сумму на их произведение. После этого он стер самое маленькое число и поделил (опять в уме) сумму оставшихся чисел на их произведение. Второй результат оказался втрое больше первого. Какое число стер Вася?

9) На доске написано двузначное число. Леша сложил цифры этого числа и получил число, записанное одинаковыми цифрами. Костя сложил квадраты цифр исходного числа и получил число всего на 10 меньше исходного. Что это число написано на доске?

10) Король хочет построить 6 крепостей и соединить каждые две из них дорогой. Начертите такую схему расположения крепостей и дорог, чтобы на ней было только 3 перекрестка и на каждом перекрестке пересекались ровно две дороги.

11) Даны 100 неотрицательных чисел. Произведение любых 30 из них меньше 1. Докажите, что произведение всех чисел меньше 1.

12) Путешественник прибыл на остров, на котором живут рыцари и лжецы. Каждый лжец, если задать ему вопрос «Сколько …?», называет число на 2 больше или на 2 меньше, чем правильный ответ, а каждый рыцарь отвечает верно. Путешественник встретил двух жителей острова и спросил у каждого, сколько лжецов и рыцарей проживает на острове. Первый ответил: «Если не считать меня, то 2016 лжецов и 2017 рыцарей», а второй: «Если не считать меня, то 2015 лжецов и 2014 рыцарей». Сколько лжецов на острове?