

ММИ и другие аббревиатуры

Метод Математической Индукции

- Докажите, что утверждение верно для любого натурального n :
 - $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
 - $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;
 - $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
 - $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$;
 - $3^{2n+2} - 8n - 9 \div 64$.
- Найдите сумму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!$ для любого натурального n .
- Докажите, что при четном n число $\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$ целое.

Классная работа по ММИ и МТФ

- Докажите, что утверждение верно для любого натурального n :
 - $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
 - $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} \div 17$;
- Докажите, что $2^{70} + 3^{70} \div 13$.
- Найдите остаток от деления:
 - $39^{50!}$ на 2251;
 - 19^{39^4} на 191.

А ты понял ММИ и МТФ?

- Докажите для любого натурального n :
 - $3^n > 2^n + n$;
 - $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$;
 - $5^n - 3^n + 2n \div 4$.
- Найдите сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n - 1)$.
- Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.

А ММИ и МТФ тебя поняли? ☺

- Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?
- Пусть n – натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо $n^8 + 1$, либо $n^8 - 1$ делится на 17.
- Сумма трех чисел a, b и c делится на 30. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5$ также делится на 30.
- Докажите, что $3^{3000} - 1$ делится на 1001.
- Докажите, что $5^n + 28n - 1$ делится на 16 для любого натурального n .

Малое ДЗ Ферма

- Докажите, что $16^{2n+1} + (2n + 1)^{16} \div 17$, если $2n + 1$ на 17 не делится.
- Пусть p – простое число, отличное от 3. Докажите, что число $\underbrace{111 \dots 111}_{p \text{ единиц}}$ не делится на p .
- Пусть $p > 2$ – простое число. Докажите, что $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$.

Теорема Вильсона:

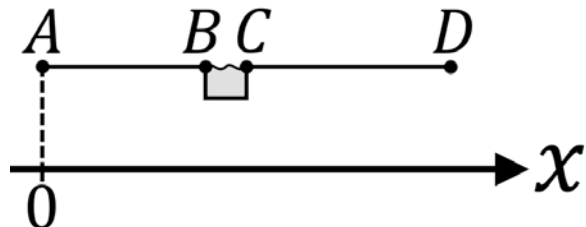
- Докажите, что для простых p верно утверждение $(p - 1)! \equiv p - 1 \pmod{p}$.

ФУНКЦИИ

А какова ваша функция?

Текстовые задачи из вступительных в ФТШ по физике

- 1) Трасса для троеборья AD длиной 54 км состоит из велосипедной трассы AB длиной 24 км, водного участка BC длиной 6 км и дороги для бега CD . Два спортсмена имеют одинаковые средние скорости бега (12 км/ч), плавания (6 км/ч) и езды (36 км/ч). Они стартуют одновременно с разных концов трассы – первый бежит из A в D , а второй наоборот из D в A . Также известно, что после плавания спортсмены устают и снижают среднюю скорость бега на 2 км/ч, а велоезды на 6 км/ч.



Нарисуйте на одном графике зависимости координаты x обоих спортсменов от времени (время отсчитайте в минутах).

- 2) Испытание автомобилей на прямом шоссе длилось 1,5 минуты. Первый автомобиль, проехав в момент $t = 0$ точку старта, все время двигался равномерно со скоростью 72 км/ч. Второй же, стартовав на 30 сек позже, равномерно разогнался и спустя 1 мин превысил скорость первого в 3 раза, после чего резко затормозил.

Нарисуйте графики скоростей обоих автомобилей в зависимости от времени.

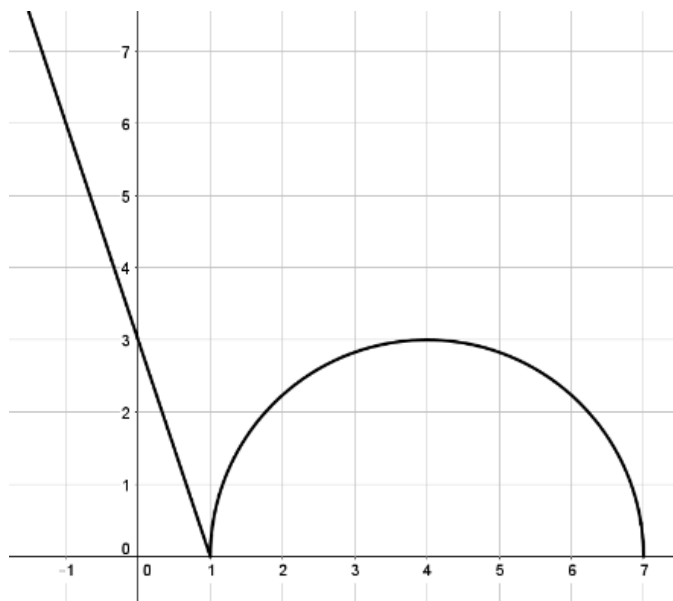
- 3) Два бегуна – на короткую дистанцию (спринтер) и на длинную (стайер) – стартуют одновременно вдоль прямой дорожки. Спринтер в течение 2 сек разгоняется до скорости 10 м/сек, затем 200 м бежит с этой постоянной скоростью, затем устает, в течение 2 сек равномерно сбавляет скорость до 4 м/сек и затем бежит в этом темпе достаточно долго. Стайер же равномерно разгоняется в течение 10 сек до скорости 6 м/сек и далее бежит с этой постоянной скоростью.

Нарисуйте график $V(t)$ скорости спринтера относительно стайера.

Геометрические преобразования графиков функций

Обозначим изображенную снизу функцию за $f(x)$. Постройте с помощью геометрических преобразований следующие функции:

- | | | |
|---|---------------------------------|---|
| 1) $F(x) = f(x) + 2$; | 2) $F(x) = f(x - 4) - 2$; | 3) $F(x) = -f(x)$; |
| 4) $F(x) = f(-x)$; | 5) $F(x) = -f(-x)$; | 6) $F(x) = 2f(x)$; |
| 7) $F(x) = 2f(x - 4)$; | 8) $F(x) = f(2x) - 1$; | 9) $F(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$; |
| 10) $F(x) = 2f\left(\frac{x}{3}\right)$; | 11) $F(x) = \frac{1}{2}f(3x)$; | 12) $F(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{3}\right)$; |
| 13) $F(x) = 2f(3x - 6) + 1$; | 14) $F(x) = -2f(3x - 6) - 1$; | 15) $F(x) = f(4 - x)$; |
| 16) $F(x) = f(4 - 2x) + 2$. | | |









А какова ваша абсолютная функция?

Исходя из графика функции $|x|$, постройте графики следующих функций:

- | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $ x + 2$; | 2) $ x - 4 + 2$; | 3) $- x $; | 4) $ -x $; |
| 5) $- -x $; | 6) $2 x $; | 7) $\left \frac{x}{3}\right $; | 8) $2\left \frac{x}{5}\right $; |
| 9) $2 x - 4 + 5$; | 10) $ -2x - 1$; | 11) $2 3x - 6 + 1$; | 12) $-2 3x - 6 - 1$; |
| 13) $ 4 - x $; | 14) $ 4 - 2x + 2$. | | |

Системы счисления

В мире существует 10 типов людей: те, кто понимает двоичную систему счисления, и те, кто ее не понимает.

- 1) Переведите в десятичную систему счисления:
 А) 111_2 ; Б) 220_3 ; В) 3210_4 ; Г) 2016_8 ; Д) 365_{16} ; Е) ММСМЛХХХХ.
- 10) В каждом ребусе *переложите* одну спичку так, чтобы равенство стало верным:
 А) $XIII - IV = XI$ Б) $VI + V = VI$ В) $XI - I = XIII$
- 11) Решите следующие примеры (ответ запишите римскими цифрами):
 А) $XXIX + LXII$; Б) $XCIII - XLIV$; В) $DCLIII - CDXLIV$; Г) $CXII / XII$; Д) $VI \cdot IX$.
- 100) В какой системе счисления справедливо равенство $3 \cdot 4 = 10$? Если
- 101) Дано: $a = CF_{16}$, $b = 321_8$. Найдите такое двоичное число x , что $a < x < b$.  2 = 
- 110) Существует ли система счисления, в которой одновременно
 А) $3 + 4 = 10$ и $3 \cdot 4 = 15$;
 Б) $2 + 3 = 5$ и $2 \cdot 3 = 11$?  3 = 
- 111) В системе счисления с некоторым основанием десятичное число 18 записывается в виде 30. Укажите это основание. то что означает  -1 = 
- 1000) В саду растет 35 фруктовых деревьев, из них: 16 – яблони, 14 – груши и 2 – вишни. Найдите основание системы счисления, в которой посчитаны деревья. ???
- 1001) Решите уравнение: $101_x + 13_{10} = 101_{x+1}$.
- 1010) Как с помощью 7 гирь можно взвесить любой вес от 1 до 127 грамм? А до килограмма?
- 1011*) Сформулируйте и докажете признаки делимости на 2, 3, 4, 7 в восьмеричной СС.