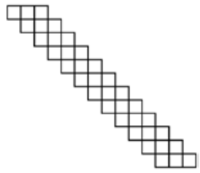
Санкт-Петербургская городская олимпиада школьников по математике

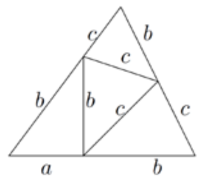
7 класс, 1 тур, 2016 год

1) На круговом шоссе длиной 13 км находятся пять различных населенных пунктов A, B, C, D, E. Может ли быть так, что кратчайшее расстояние по шоссе от A до B равно 3 км, от B до C – 6 км, от C до D – 4 км, от D до E – 5 км, а от E до A – 6 км?
2) В клетках квадрата 7×7 стоит 100 крестиков. Нашлось три горизонтали, в клетках которых в сумме содержится не менее 70 крестиков, и три аналогичные вертикали. Докажите, что либо в какой-то клетке нет ни одного крестика, либо найдется клетка, в которой стоит не меньше семи крестиков (либо и то, и другое).
3) На доске написано 10 последовательных целых чисел (среди них могут быть и отрицательные). Школьнику, указавшему число, после вычеркивания которого сумма оставшихся девяти чисел на доске является квадратом целого числа, Мария Ивановна ставит пятерку (если это число еще не было никем названо ранее). Какое наибольшее количество пятерок могли получить ученики Марии Ивановны? Не забудьте объяснить, почему невозможно получить большее количество пятерок.
4) Дана «лесенка» из 12 строчек (см. рисунок). Костя расставляет в ее клетках числа от 1 до 36 так, чтобы в каждой горизонтали и в каждой вертикали числа возрастали (слева направо и сверху вниз). Сколькими способами он сможет это сделать?



7 класс, 2 тур (довывод), 2016 год

5) На экране своенравного калькулятора написано двузначное число. Калькулятор может умножить число на экране на 2 и вычесть из результата какое-нибудь натуральное число от 1 до 10 (при следующей операции он может вычесть другое число от 1 до 10). Известно, что такими операциями калькулятор может из исходного числа получить 2015. Докажите, что он может получить и 2016.
6) На сторонах треугольника отметили по точке и соединили их так, как показано на рисунке. При этом образовались равные отрезки. Докажите, что $a = c$.



7) На острове Невезения мужчины по средам всегда говорят правду, а по четвергам всегда лгут, а женщины – наоборот. В среду каждый из них сказал: «У меня знакомых мужчин на 1 больше, чем знакомых женщин», а в четверг – «Среди незнакомых мне жителей деревни мужчин на 1 больше, чем женщин». Могло ли на острове быть ровно 2015 жителей?
8) Доска 8×8 красится в два цвета. Раскраска называется *ладейной*, если ладья может пройти от верхней стороны доски до нижней по белым клеткам, переходя каждым шагом с клетки на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что количество ладейных раскрасок меньше половины общего числа раскрасок.

7 класс, 2 тур (вывод), 2016 год

9) На доске написано несколько степеней четверки (не обязательно различных). Андрей задумал еще одну степень четверки, которая больше каждого числа, написанного на доске, но не превосходит их суммы. Докажите, что Андрей может подчеркнуть несколько чисел на доске так, чтобы их сумма равнялась задуманному числу.
10) В остроугольном треугольнике провели три высоты. Докажите, что из получившихся шести отрезков (трех сторон и трех высот) можно составить два треугольника.
11) На плацу нарисован квадрат 9×9, в каждой клетке стоит по солдату. Демократичный старшина за один ход указывает на двух солдат, стоящих в соседних по стороне клетках, и один из них (на выбор солдат) уходит чистить картошку. Как только оказывается, что у кого-то из стоящих солдат ушли два соседа по стороне, процесс прекращается. Какое наибольшее количество солдат старшина может отправить на чистку картошки, независимо от действий солдат?

7 класс, 1 тур, 2014 год

1) Закрасьте несколько клеток таблицы 6×6 так, чтобы в каждой строке было ровно три закрашенных клетки, а в каждом столбце – либо одна, либо четыре.

2) Дана дробь $2/3$. За одну операцию можно либо прибавить 2013 к числителю имеющийся дроби, либо прибавить 2014 к знаменателю, либо сократить дробь на общий делитель числителя и знаменателя. Можно ли такими операциями получить дробь $3/5$?

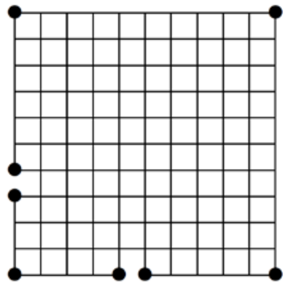
3) В ящике у Гарри Поттера 100 шариков – красных, белых и зеленых. Три из них – волшебные, они время от времени меняют цвет (на любой из этих трех). Однажды Гарри Поттер заглянул в ящик и увидел, что красных шариков больше чем белых, а белых – больше, чем зеленых. Заглянув через минуту, он увидел, что все стало наоборот: зеленых больше, чем белых, а белых – больше, чем красных. Сколько белых шариков он увидел, когда заглядывал в ящик первый раз?

4) Клетчатый прямоугольник размерами 19×20 клеток разрезан на несколько квадратов (все разрезы идут по сторонам клеток). Какое наименьшее число квадратов с нечетной стороной может оказаться среди них?

7 класс, 1 тур, 2013 год

5) На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100; если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут. Не забудьте обосновать ответ.

6) Между городами A и B ездят автобусы с одинаковой постоянной скоростью. Автобус, выехавший из A в полдень, и автобус, выехавший из B в 15.00, встретились на расстоянии 500 км от A. Автобус, выехавший из A в 14.00, и автобус, выехавший из B в 11.00, встретились на расстоянии 300 км от A. На каком расстоянии от A встретятся автобусы, выехавшие из A и из B в 13.00?



7) На рисунке изображен план города Альфинска. Каждый единичный отрезок – это улица. На некоторых улицах движение одностороннее, но при этом с каждого перекрестка можно уехать по крайней мере в три стороны (кроме перекрестков, отмеченных точками – с них можно уехать в две стороны). Докажите, что из левого нижнего угла города можно проехать в правый верхний, не нарушая правил дорожного движения.

8) Таня выписала в строчку 120 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Сережа выписал под ними еще какие-то 120 последовательных чисел в некотором порядке. Под каждым числом второй строчки Саша написал произведение этого числа и числа, стоящего над ним. Оказалось, что в третьей строчке тоже стоят 120 последовательных натуральных чисел. Докажите, что Саша где-то обсчитался.

6 класс, районный этап, 2017 год

1) Андрей отметил в календаре 6 последовательных дней июня и запомнил, на какие числа месяца пришлись эти дни. Потом он выписал эти 6 последовательных чисел в порядке убывания. Павлик перемножил первые четыре из этих чисел, Андрей – все, кроме двух крайних, а Майя – последние четыре. У Павлика и Андрея последние цифры результатов совпали, а у Майи получилась другая последняя цифра. Какая? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

2) На круговом шоссе расположено 5 деревень. Вася обнаружил, что в какой бы деревне он ни очутился, до каких-то двух других деревень он может доехать за 20 минут на велосипеде, а до двух оставшихся – за 10 минут на мопеде (в каждой поездке он проезжает по пути не более одной деревни). И на мопеде, и на велосипеде Вася движется с постоянной скоростью без остановок, причем на мопеде быстрее. За сколько времени Вася сможет сделать один круг по шоссе на мопеде?

3) В таблице с 9 строками и 4 столбцами имеется 8 желтых клеток, 12 зеленых и 16 белых. Если щелкнуть мышкой по строке или по столбцу, произойдет следующее: если в этой линии клеток какого-то цвета было больше, чем каждого из двух других цветов, то вся линия перекрасится в этот цвет; если же такого цвета не было, то ничего не произойдет. Оказалось, что если щелкнуть сначала по всем строкам, а затем по всем столбцам, то все клетки станут зелеными. А если

вместо этого щелкнуть сначала по всем столбцам, а потом по всем строкам, то все клетки станут желтыми. Приведите пример такой таблицы.

4) В школе работают 5 кружков, в них занимаются 7, 10, 13, 15, 25 школьников (каждый школьник посещает только один кружок). Известно, что у каждого школьника в этих кружках есть не менее двух одноклассников. Докажите, что хотя бы в одном кружке есть два школьника из одного класса.

7 класс, районный этап, 2017 год

5) Справа изображена таблица, заполненная «змейкой»: в первой строке слева направо выписаны по возрастанию числа, начиная с 1, потом этот ряд чисел продолжается во второй строке справа налево, потом в третьей строке – снова слева направо и т.д. У Нади есть более крупная таблица, тоже заполненная змейкой, начиная с числа 1. В ней нашелся следующий фрагмент 2×2:

1	2	3
6	5	4
7	8	9
12	11	10

15	14
38	39

Сколько столбцов в Надиной таблице? Приведите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

6) На доске написано 5 четных чисел. Среди последних и предпоследних цифр этих чисел нет одинаковых. Докажите, что сумма этих пяти чисел не может являться точным квадратом.

7) В океане расположено три острова A, B и C, причем расстояния от A до B и от A до C – по 60 км, а от A до C – 80 км. Одновременно из B в C отправилась яхта, а из C в A – катер, оба со скоростью 20 км/ч. Через час яхта села на мель и стала подавать сигнал бедствия. Катер тут же изменил курс, увеличил скорость вдвое и последовал к яхте. С острова B к яхте отправилась спасательная лодка со скоростью 40 км/ч. Докажите, что лодка и катер доберутся до яхты одновременно.

8) В Стране Чудес вдоль дороги растут 12 кустов розы, на каждом кусте по 6 шипов. Прохожим разрешено срывать с каждого куста 1, 2 или 3 шипа, но при этом никто не должен срывать поровну шипов с соседних кустов, иначе стражники арестуют нарушителя. Алиса, потом Болванщик и после них Валет Червей прошли вдоль дороги и сорвали все шипы. Болванщик сорвал меньше 19 шипов. Докажите, что один из двух других сорвал не менее 30 шипов.

8 класс, районный этап, 2017 год

9) Стоимость рубина в рублях равна квадрату его массы в граммах, умноженному на 80, а стоимость аметиста в рублях в пять раз больше его массы в граммах. Двое братьев получили в наследство несколько камней общей стоимостью 5 000 000 рублей. Братья распилили каждый камень пополам и взял себе по половинке каждого камня. Оказалось, что каждый из братьев получил камней на 2 000 000 рублей. Сколько стоили изначально рубины в наследстве?

10) В варианте олимпиады 8 задач, каждая оценивается в 7 баллов. По результатам проверки все участники набрали разное число баллов. Члены оргкомитета втихаря исправили оценки 0 на 5, 1 на 6, 2 на 7. В результате этого участники упорядочились в точности в обратном порядке. Какое наибольшее количество участников могло быть? Приведите пример и докажите, что большее число участников невозможно.

11) Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. Точка K на стороне AB выбрана так, что углы AMK и BMC равны. Докажите, что периметр четырехугольника $KMCB$ меньше периметра треугольника AMB.

12) Два натуральных числа отличаются на 24. Их произведение на 1 больше числа, десятичная запись которого состоит из одних единиц. Найдите эти числа.