Четность. Делимость и остатки

ДЗ №1

1) На плоскости расположены 11 шестеренок, замкнутых в круг. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно?
2) Конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал четное число ходов.
3) Может ли прямая, не содержащая вершин 11-звенной замкнутой ломаной, пересекать все ее звенья?
4) Из набора домино выбросили все кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?
5) На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно главной диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.
6) 100 фишек поставлены в ряд. Разрешено менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли поставить фишки в обратном порядке?
7) Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.

ДЗ №2

8) Верно ли, что если натуральное число делится на 4 и 6, то оно делится и на $4 \cdot 6 = 24$?
9) Число $15A$ делится на 6. Делится ли само число A на 6?
10) Найдите последнюю цифру числа 9999^{9999}.
11) Найдите остаток от деления 2^{100} на 3.
12) Числа $p, 2p+1, 4p+1$ – простые. Найдите p.
13) Решите уравнение в целых числах: $x^2 - y^2 = 31$.
14*) К 2015-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна.

Классная работа

1) Число A – четно. Верно ли, что $3A$ делится на 6?
2) Пусть $56a = 65b$. Докажите, что число $(a+b)$ – составное.
3) Пусть a и b – натуральные числа, причем $(a^2+b^2) \vdots 21$. Докажите, что эта сумма делится и на 441.
4) Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно 1 раз?
5) На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 2015$. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов, на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?
6) Вася написал на доске пример на умножение двух натуральных чисел, а затем «зашифровал» его в ребус $\text{АБ} \cdot \text{ВГ} = \text{ДДЕЕ}$. Докажите, что он где-то ошибся.
7) Пусть p и p^2+2 – простые числа. Докажите, что p^3+2 – также простое число.
8) ПД заснул во время составления задач и попал в далекую страну, в которой решил приобрести себе новый галстук (что только не взбредет в голову во сне?). Придя в магазин, он обнаружил, что галстук стоит 19 рублей, у ПД в кармане только трехрублевые монеты, а у кассира только пятирублевые. Сможет ли ПД купить себе галстук, и если да, то как?

ДЗ №3

15) В народной дружине 100 человек и каждый вечер трое из них идут на дежурство. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно 1 раз?
16) Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, …, восьмеркой и девяткой было нечетное количество цифр?
17) Пусть $p, p+10, p+14$ – простые числа. Найдите p.
18) Найдите хотя бы одну сумму $(x+y+z)$, где x, y, z – какие-нибудь положительные целые числа, удовлетворяющие уравнению $28x + 30y + 31z = 365$.
19) Докажите, что $(n^5 + 4n) \vdots 5$ при любом натуральном n.
20) Может ли $n!$ оканчиваться ровно пятью нулями?

ДЗ №4

21) Известно, что у чисел $n-1$ и $n+1$ ровно 2 делителя, а у числа n – ровно четыре делителя. Чему может быть равно n?
22) Найдите остаток от деления:

А) числа 9^{100} на 8;

Б) числа $2^{75}+2^{76}+2^{77}+2^{78}$ на 5.

23) В стране Цифра есть 9 городов с названиями: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только том случае, если двухзначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

24) Найдите последнюю цифру числа $7^{2015}+9^{2015}$.

25) Найдите все такие четырехзначные числа $\overline{abcd}$, что $\overline{abcd}=78\cdot\left(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}\right)$ (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы тоже могут обозначать одинаковые цифры).

ДЗ №5

26) Известно, что

$$\overline{\text{КВАКРЯ}}+\overline{\text{КВА}}+\overline{\text{КВА}}$$

делится на 167 (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные). Докажите, что

$$\overline{\text{КРЯКВА}}+\overline{\text{КРЯ}}+\overline{\text{КРЯ}}$$

точно *не* делится на 167.

27) Докажите, что число, имеющее нечетное число делителей – полный квадрат.

28) За круглым столом сидят жучки и паучки, всего 298 насекомых. Известно, что троек подряд сидящих насекомых, в которых больше жучков, столько же, сколько и троек подряд сидящих, в которых больше паучков. Какое наименьшее количество паучков может находиться за столом?

29) Докажите, что $\left(2222^{5555}+5555^{2222}\right) \vdots 7$.

30) Миша купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал страницы по порядку числами от 1 до 192. Хулиган Влад вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2015?

Классная работа №2

9) При каких натуральных значениях n выражение $\frac{3n-1}{n+2}$ является натуральным числом?

10) Докажите, что следующие числа являются составными:

А) $\underbrace{555\dots553}_{2016\text{ цифр}}$;

Б) $1000^{1000}-1$.

11) В числе $4758967*$ напишите последнюю цифру такую, чтобы число делилось на

А) 2; Б) 5; В) 3; Г) 9; Д) 4; Е) 25; Ж) 11.

ДЗ №6

31) Пусть p и p^2+2 – простые числа. Докажите, что p^3+2 – также простое число.

32) Чему равно $a+2b$, если $2a+3b=10$, а $2a+4b=17$?

33) Докажите, что

А) существует число n такое, что $n+1, n+2, \dots, n+2015$ – составные числа;

Б) $(n^3-n) \vdots 24$ при всех нечетных n;

В) дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ несократима при любом натуральном n;

34) Найдите НОД чисел $2n+13$ и $n+7$.

Классная работа №3

12) Докажите, что $(p^2-q^2) \vdots 24$, если и p, и q – простые числа, большие 3.

13) Докажите, что 7^n-1 кратно 6 при любом натуральном n.

14) Существует ли 100 натуральных чисел таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному?

ДЗ №7 – квазипоследнее ☺

35) Докажите, что только одно число, состоящее из четного числа одинаковых цифр, простое.

36) Найдите НОД$(2^{100}-1, 2^{120}-1)$.

37) Знайдіть найменше натуральне n таке, що сума n доданків

$$S=1+11+111+\dots+\underbrace{11\dots1}_{n}$$

націло ділиться на число:

А) 15; Б) 45. (LXVII Киевская городская олимпиада юных математиков)

38) Найдите НОД всех шестизначных чисел, состоящих из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (без повторений).

39*) Существуют ли натуральные a, b, c такие, что НОД$(a, b, c)=1$ и квадрат каждого из них делится на сумму двух других чисел?

Математический Бой

1) У Попа больше земли, чем у Балды на 90 квадратных аршинов ($90\, a^2$). Каждый год Поп и Балда одновременно обмениваются землей: Поп отдает Балде третью часть своего надела, и Балда отдает Попу третью часть своего надела. У кого из них будет больше земли через 25 лет и на сколько?
2) У князя Гвидона было трое детей. В 1200 году Гвидону и его жене исполнилось по 30 лет, а трем их детям вместе тоже было 30 лет. Известно, что все они жили долго и счастливо. В каком году Гвидону с женой вместе было столько же лет, сколько вместе их детям?
3) Найдите все такие p, для которых $(2p^4 - p^2 + 16)$ − точный квадрат.
4) Четыре черненьких чумазеньких чертенка чертили черными чернилами чертеж четыре часа. Если бы первый чертенок чертил в 2 раза быстрее, а второй – вдвое медленнее, то им потребовалось бы столько же времени; если бы наоборот, первый чертил вдвое медленнее, а второй – вдвое быстрее, то они управились бы за 2 часа 40 минут. За какое время начертили бы чертеж три чертенка без помощи четвертого?
5) Т.А., нарисовав квадрат 3×3, написала в одной из клеток число, и попросила П.Д. заполнить этот квадрат по следующему правилу – если у клетки все соседи еще не заполнены, то П.Д. должен написать туда число, большее всех уже написанных, иначе – число, меньшее всех уже написанных. В итоге получился квадрат, изображенный справа. Какое число написала Т.А.?

1	9	4
8	5	2
3	7	6

6) При каком наименьшем натуральном n найдутся натуральные числа x, y такие, что НОД$(x, y) = 999$ и НОК$(x, y) = n!$?

На каникулах можно отдыхать только преподавателям!

1) По кругу расставлены 9 чисел – 4 единицы и 5 нулей. Каждую секунду над числами проделывают следующую операцию: между соседними числами ставят ноль, если они различны, и единицу, если они равны; после этого старые числа стирают. Могут ли через некоторое время все числа стать одинаковыми?
2) Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел $\vdots\, 6$.
3) Может ли число, записанное с помощью 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?
4) Гриб называется плохим, если в нем больше 11 червяков. Червяк называется тощим, если он съел не более 20% гриба, в котором он живет. Четверть всех грибов в лесу — плохие. Докажите, что не менее трети всех червяков — тощие.
5) Найдите последнюю цифру числа 2^{50}.
6) Докажите, что произведение любых 5 последовательных чисел делится на 120.
7) В числе A переставили некоторые цифры и получили число B. Оказалось, что число $A - B$ состоит из n единиц. При каком наименьшем n это возможно?
8) Докажите, что сумма квадратов трех натуральных чисел, уменьшенная на 7, не делится на 8.
9) Может ли сумма

   А) двух; Б) трех

   квадратов *нечетных* чисел быть квадратом целого числа?
10) Докажите, что сумма n последовательных натуральных *нечетных* чисел при $n > 1$ является составной.
11) Раскрасьте клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки было закрашено ровно 2 соседние. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.)
12) Докажите, что число $1\underbrace{0\ldots0}_{100}5\underbrace{0\ldots0}_{100}1$ не является кубом целого числа.
13) Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.
14) Найдите наименьшее число, которое заканчивается на 15, делится на 15 и сумма его цифр равна 15.
15) Найдите НОД чисел

   А) $\left(\underbrace{1\ldots1}_{100}, \underbrace{1\ldots1}_{60}\right)$; Б) $(690713, 529)$.