Весеннее.

1) *В клетках прямоугольника 11х15 расставлены крестики и нолики. Известно, что в каждой строке прямоугольника крестиков больше, чем ноликов. Докажите, что обязательно найдётся столбец, в котором тоже крестиков больше, чем ноликов.*
2) *Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 10 таким образом, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, делилась на 3? Не забудьте обосновать ответ.*
3) *Молоко и сливки продаются в одинаковых бутылках. За 5 пустых бутылок в магазине можно получить 1 полную бутылку молока, а за 10 пустых бутылок - 1 бутылку сливок. Серёжа нашёл подвале 60 пустых бутылок и понёс их в магазин. Получая при обмене полную бутылку, он выпивал молоко или сливки, а освободившуюся бутылку использовал при последующих обменах. В конце этой деятельности у него осталась всего одна пустая бутылка. Сколько обменов совершил Серёжа?*
4) *Во дворе стоят 10 столбов. Электрику Петрову дали задание соединить столбы проводами таким образом, чтобы каждый провод соединял ровно два столба, никакие два столба не были бы соединены дважды, и, главное, чтобы для любых четырёх столбов нашлось бы ровно три провода, протянутых между этими столбами. Докажите, что электрик Петров не сумеет справиться с этим заданием.*
5) *На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый выстрелил в одного из Тонких. Затем каждый уцелевший Тонкий выстрелил в одного из Толстых. Наконец, каждый уцелевший Толстый ещё раз выстрелил в одного из Тонких. После этого у каждой армии кончились патроны. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.*
6) *Докажите, что найдутся натуральные числа x, y, $z > 19971997$ такие что $(x^2+1)(y^2+1)=z^2+1$.*
7) *Старшина составил расписание нарядов для взвода из 50 курсантов на 30 дней, в котором каждый день заступают в наряд 4 курсанта, и у каждого курсанта перерыв между нарядами не менее 5 дней. Докажите, что можно добавить в каждый наряд по одному курсанту так, чтобы у каждого курсанта перерыв между нарядами был по-прежнему не менее 5 дней.*
8) *По кругу расставлены 100 чисел +1 и -1. Для каждого числа подсчитывается произведение 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Затем исходные числа стирают, а вместо них записывают вычисленные произведения. Докажите, что после многократного повторения этой операции все числа станут +1.*
9) *Клетчатый прямоугольник со сторонами больше одной клетки разбит на доминошки. Пусть А — количество квадратов 2х2 состоящих из двух доминошек, В — количество квадратов 2х2, состоящих из клеток четырёх разных доминошек. Докажите, что $A > B$.*
10) *Найдите все такие натуральные k, для которых k^2 можно представить в виде суммы k различных попарно взаимно простых натуральных чисел.*
11) *В городе нет ни мостов, ни туннелей, ни тупиков. Все перекрёстки имеют крестообразную форму и образованы пересечением ровно двух улиц. Совершая инспекционную поездку по городу, губернатор на каждом перекрёстке поворачивал либо направо, либо налево. Через некоторое время шофёр губернатора заметил, что они едут по дороге, по которой уже проезжали. Докажите, что они едут в ту же сторону, что и в первый раз.*